

本期演練試題 [註]

高一、高二暑期作業

羅添壽 設計

羅添壽老師現任教於省立新化高中

【說明】

1. 命題範圍：高一、高二的數學教材內容。每題題號後的括弧內更明確的指出該題所牽涉的教材單元。
2. 測驗對象：高一、高二學生（暑期作業）。
3. 命題構想：以理解為命題之目標，少代死公式，以真正能測出學生程度為主。

1. (集合與運算；多選) 設集合 $A = \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, \oplus, \otimes 均為 A 之二元運算，今定義

$$\begin{cases} a_i \oplus a_j = a_k & (k \text{ 為 } i + j \text{ 被 } 6 \text{ 除所得之餘數}) \\ a_i \otimes a_j = a_l & (l \text{ 為 } i \times j \text{ 被 } 6 \text{ 除所得之餘數}) \end{cases}$$

求下列何者正確？(A) $\{x | x \oplus x = a_0, x \in A\} = \{a_1, a_4\}$

(B) $\{x | x \oplus x = a_2, x \in A\} = \{a_0, a_3\}$ (C) $\{x | x \otimes x = a_1, x \in A\} = \{a_1, a_5\}$ (D) $\{x | x \oplus x = a_3, x \in A\} = \phi$ (E) $\{x | x \otimes x = x, x \in A\} = \{a_0, a_1, a_3\}$

2. (邏輯與命題；多選) 設 f, g 為二函數，若一敘述「若 $f(x) = 0$ 則 $g(x) = 1$ 」為不真，則可推得下列何敘述恆真？(A) $f(x) \neq 0$ 或 $g(x) \neq 1$ (B) $f(x) = 0$ 或 $g(x) = 1$ (C) $f(x) = 0$ 且 $g(x) \neq 1$ (D) $f(x) \neq 0$ 或 $g(x) = 1$ (E) $f(x) = 0$ 且 $g(x) \neq 1$ (提示：畫真值表判斷之。)
3. (充分、必要條件；單選) 設 $x, y \in \mathbb{R}$ 則 (A) $x = y$ 是 $\sin x = \sin y$ 之必要但非充分條件 (B) $\cos x = \cos y$ 是 $x = y$ 之充分但非必要條件 (C) $x = y$ 為 $\tan x = \tan y$ 之充分但非必要條件 (D) $\tan^{-1} x = \tan^{-1} y$ 為 $x = y$ 之充要條件 (E) $\sec^{-1} x = \sec^{-1} y$ 是 $x = y$ 之充要條件
4. (函數問題；單選) 設 $f(x) = \cos^2 x, g(x) = \csc x, f(x) = h(g(x))$, 求 $h(x) =$ (A) $1 - 1/x^2$ (B) $1/x^2$ (C) $1 + 1/x$

(D) $1 + 1/x^2$ (E) $(x+1)/x$

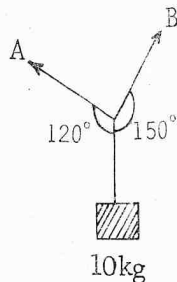
5. (函數求值；單選) $f(x) = x^5 + 2x^2 - 3x - 1$ 求 $f(2.003)$ 之近似值準確至小數點以下第三位 (A) 32.126 (B) 33.126 (C) 33.256 (D) 34.256 (E) 33.156
6. (不等式與高斯符號；單選) 設 $[x]$ 表不大於 x 之最大整數，則 $3 < [3x-1] \leq 6$ 之解集合為 (A) $\{x | 5/3 \leq x < 8/3\}$ (B) $\{x | 4/3 \leq x < 2\}$ (C) $\{x | 5/3 < x \leq 8/3\}$ (D) $\{x | 4/3 < x \leq 2\}$ (E) 以上皆非
7. (數列 1；單選) 設 α, β, γ 成等差數列， $\sin \alpha, \sin \beta, \sin \gamma$ 成等比數列，則 α, β, γ 之公差為 (A) $\pi/4$ (B) $\pi/3$ (C) $5\pi/6$ (D) π (E) 以上皆非
8. (數列 2；多選) 下列各級數何者發散 (A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{5n+7}$ (B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+7}{n+3}$ (C) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[n]{n}} + \dots$ (D) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{25}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{5^n}\right) + \dots$ (E) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{5^{2n+1}}$
9. (對數 1；單選) $(2.5)^{100}$ 展開後，其整數部份為多少位數 (A) 39 (B) 40 (C) 51 (D) 52 (E) 以上皆非

10. (對數 2; 多選) 設 a, b, c 為異於 1 之正數且 $x = \log_a b$, $y = \log_b c$, $z = \log_c a$, $k = x/(xy+x+1) + y/(yz+y+1) + z/(zx+z+1)$, 則 (A) $k \in \mathbf{N}$ (B) k 為無理數 (C) $k! = 6$ (d) $k! = 0!$ (E) $50 < k < 100$
11. (有理式之因式分解; 多選) 設 $(a+b-c)^3 + (b+c-a)^3 + (c+a-b)^3 - 3(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) = k(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$, 求 k (A) $k = 4$ (B) k 為合成數 (C) $k > 3$ (D) k 為 3 之整數倍 (E) $k! = 120$
12. (平面幾何; 單選) 平面 E 與水平面之夾角為 30° , 在平面 E 上有一半徑為 a 的圓, 此圓在水平面上的射影面積為 (A) $\pi a^2 / \sqrt{2}$ (B) $\pi a^2 / \sqrt{3}$ (C) $2\pi a^2 / \sqrt{3}$ (D) $\sqrt{3} \pi a^2 / 4$ (E) $\sqrt{3} \pi a^2 / 2$
13. (三角函數與平面幾何; 複選) 三角形三邊長 a, b, c 成等差級數 (對應角為 $\angle A, \angle B, \angle C$), 則 (A) 三高 h_a, h_b, h_c 成等差級數 (B) $\angle A, \angle B, \angle C$ 成等差級數 (C) $\cos A, \cos B, \cos C$ 成等差級數 (D) $\sin A, \sin B, \sin C$ 成等差級數 (E) h_a, h_b, h_c 成調和級數
14. (二次方程式; 單選) 設 $a, b \in \mathbf{R}$, 若 $[1 + (a+b)^2]x^2 - 2(1-a-b)x + 2 = 0$ 之根為實根, 求 $a^3 + b^3 - 3ab$ 之值 (A) 0 (B) 1 (C) -1 (D) 2 (E) -2
15. (三角函數與極值; 複選) 設 $y = 2\cos^2 x + (\sin x + \cos x)^2 - \sin 2x \cos 2x$, $0 \leq x \leq \pi$, y 之最大值为 M , 最小值为 m , 則 (A) $M = 3$ (B) m 為無理數 (C) $4m^2 - 12m + 6 = -1$ (D) $M!$ 為合成數 (E) $2m - 3 > 0$
16. (三角不等式; 單選) 滿足

$$\cos \frac{n\pi}{100} > 0, \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{n\pi}{100} \right) < 0$$

的最小自然數 n 為 (A) 150 (B) 151 (C) 152 (D) 153 (E) 以上皆非

17. (直線 1; 多選) 有三點 $A(3, 4), B(0, 0), C(8, -8)$, 設 $\angle BAC = \theta$, 則 (A) $\text{area} \triangle ABC = 28$ (B) $\triangle ABC$ 之外接圓方程式為 $14x^2 + 14y^2 + 178x - 221y = 0$ (C) $\sin \theta = 56/65$ (D) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 33$ (E) $\triangle ABC$ 之內角 A 之平分線方程式為 $8x - y - 20 = 0$
18. (直線 2; 單選) $(|x| + |2y| - 1)(|3x| + |y| - 1) \leq 0$ 所表區域之面積為 (A) $7/12$ (B) $11/15$ (C) $7/9$ (D) $5/8$ (E) 以上皆非
19. (向量 1; 單選) A, B 二人同提一件 10kg 物品, (如下圖) 則 A, B 二人共用力若干 kg (A) 10kg (B) $10\sqrt{2}$ kg (C) $10\sqrt{3}$ kg (D) 20kg (E) 以上皆非



20. (向量 2; 複選) 設 O 為原點, $\mathbf{a} = \vec{OA} = (1, 1)$, $\mathbf{b} = \vec{OB} = (-1, +1)$, $\mathbf{p} = \vec{OP}$, P 為任意點. 若 $\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} \leq 1$, $(\mathbf{p} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{a}) > 1$, $(\mathbf{p} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{b}) > 1$, 如此一切 P 之終點所成之圖形令為 S , 則 (A) S 為一圓區域 (B) S 為一圓區域之部份集合 (C) S 之面積為 2 (D) S 之面積為 π (E) S 之面積為 2π