拉丁方陣及其對角線

（徵答對象：不拘）

黃 光 明

本文作者現任美國貝爾電話實驗室研究員

一個序 n 的拉丁方陣是一個有 n 行、n 列、n^2 位置的方陣，每一位置中含一元素，方陣中祇有 n 種

〔註〕自本期起演練性試題祇供讀者觀摩、練習之用，不再徵答；但其答案仍將於次期刊登。

不同元素，且任一元素出現在每一行及每一列中正好一次。如果我們讓數字 1, 2, ……, n 代表這 n 個元素，則下圖中爲序 2 到序 6 的拉丁方陣的例子：

$$
\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & \underline{3} & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & \underline{1} & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & \underline{4} \\ \underline{2} & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & \underline{5} & 1 & 2 & 3 \end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 6 & 4 & \underline{5} & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 2 & \underline{1} \\ 5 & 1 & 2 & \underline{3} & 6 & 4 \\ 6 & 3 & \underline{4} & 5 & 1 & 2 \\ 4 & \underline{6} & 1 & 2 & 3 & 5 \\ \underline{2} & 5 & 3 & 1 & 4 & 6 \end{array}
$$

L_2　　L_3　　L_4　　L_5　　L_6

圖　一

一個序 n 的拉丁方陣中如有 n 個位置分占了每一行及每一列，且所含元素正好是 1 到 n 各一次，則此 n 個位置稱爲一條「貫通」。L_5 中做了記號的五個位置卽是一條貫通。每一陣中有兩條對角線，分稱爲左和右。除了這兩條主對角線外，左右各還有 $n-1$ 條副對角線。如 L_5 中左(主)對角線是 1 4 2 5 3，其他的左副對角線是 2 5 3 1 4，3 1 4 2 5(做記號者)，4 2 5 3 1，5 3 1 4 2，如果一個拉丁方陣所有的主副對角線都是貫通時，稱爲一個「Knut Vik 方陣」（如 L_5）；如果祇有兩條主對角線是貫通，則稱爲「對角線拉丁方陣」(如 L_4)。如果祇有某一方向的對角線有這些性質，則分別稱爲半 Knut Vik 方陣（如 L_3）及半對角線方陣（如 L_6）。願意用點心的讀者，這時可以自己開始想方法來造有以上性質的各種丁拉方陣，自己做了後再讀下文，可以得到更大的滿足。

造一個拉丁方陣非常容易，設 C_{ij} 爲第 i 行第 j 列的元素，則令 $C_{ij}=i+j-1$ 卽可（C_{ij} 大於 n 時減去 n）。L_2 和 L_3 就是這樣造出來的。而且當 n 是奇數時，這樣造出來的方陣必爲半 Knut Vik 方陣。當 n 是偶數時，參考一中證明了半 Knut Vik 方陣不存在，所以我們已全部解答了有關半 Knut Vik 方陣的問題。

當 n 是一個不被三除的奇數時，則令 $C_{ij}=2i+j-2$ 卽可得一 Knut Vik 方陣。另外參考一中證明如序 n 和序 m 的 Knut Vik 方陣都存在，則序 nm 的 Knut Vik 方陣也存在。剩下的問題是當 n 爲可除三的奇數時，Knut Vik 方陣存不存在？$n=9$ 是最小的這樣一個數目。如果造出了 $n=9$，則也造出了 $n=45, 63, 81, 99\cdots$。但也很可能 n 屬這一類數目時，Knut Vik 方陣根本不存在。**筆者願意把這作一徵獎的問題**，對此題能有最好進展（不一定是解答）的應徵作品將獲薄禮。〔註〕

當 n 是大於二的偶數時，對角線或半對角線拉丁方陣存不存在呢？答案是都存在。先說半對角線拉丁方陣。取一個序 $(n-1)$ 的半 Knut Vik 方陣（$n-1$ 爲奇數，故存在），把一條「貫通」的副對角線的元素都換成 n。如 C_{ij} 是這對角線中一位置，且 C_{ij} 的元素是 k，則令 C_{in} 和 C_{nj} 的元素都爲 k，最

〔編者註〕編輯室收到這篇文稿是在今年 5 月 2 日，當時這問題尙未得解；但 6 月22日再接作者黃先生來函告知本問題已被 Hedayat 解出，其解答刊登在今年 (1977 年) 5 月號的 Journal of Combinatorial Theory, Series A 上，故作者特此聲明，並取消徵答。

站在本刊的立場，我們仍然歡迎讀者應答此題，優良作品本刊將薄致獎勵。

後令 C_{nn} 的元素爲 n，即得一序 n 的半對角線拉丁方陣。L_6 即是以此法從 L_5 得到的，所取的副對角線是作了記號的那條。參考二中證明了任何一個左（右）方向半對角線拉丁方陣一定有一條貫通它的 n 個位置全不在左（右）對角線裏。L_6 裏作了記號的六個位置就是這樣的一條貫通。

最後再介紹 $n=2m$（n 爲偶數）時對角線拉丁方陣的造法（取材自參考二）。我們先造四個序 m 的方陣，D_1, D_2, D_3, D_4

$$D_1=\begin{matrix}1 & \underline{2} & 3\\ 2 & 3 & \underline{1}\\ \underline{3} & 1 & 2\end{matrix}\qquad D_2=\begin{matrix}3 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 2\\ 2 & 1 & 3\end{matrix}\qquad D_4=\begin{matrix}2 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{matrix}\qquad D_3=\begin{matrix}1 & 3 & 2\\ 3 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{matrix}$$

圖　二

其中 D_1 是一個序 m 的左方向半對角線拉丁方陣，D_2 是 D_1 的反射。從我們前面的討論裏，知道 D_1 一定有一條貫通其所含 m 位置都不在左對角線上。把這條貫通叫做 f，且假設其在 i 列（直行）的元素是 f_i。圖二給了 $m=3$ 時一個例子，D_1 中作了記號的三個位置是 $f(f_1=3, f_2=2, f_1=1)$。設 g 爲 D_2 的右對角線，且 g_i 是 g 在第 i 列的元素。在上例中 $g_1=2, g_2=3, g_3=1$。比較 g_i 和 f_i，看看元素作了何種變換，譬如在上例中，g 的元素 1 不變，2 和 3 互換則得 f。把 D_2 中所有的元素都作相同的變換，即得 D_4。D_3 則是 D_4 的反射。

把 f 和 D_2 中對應於 f 的 m 個位置都作上記號，把 D_3 的左對角線和右對角線都作上記號，再把 D_1、D_2、D_3、D_4 拼在一起，則得圖三(A)

$$\begin{matrix}1 & \underline{2} & 3 & 3 & \underline{2} & 1\\ 2 & 3 & \underline{1} & \underline{1} & 3 & 2\\ \underline{3} & 1 & 2 & 2 & 1 & \underline{3}\\ 2 & 3 & \underline{1} & \underline{1} & 3 & 2\\ 1 & \underline{2} & 3 & 3 & \underline{2} & 1\\ \underline{3} & 1 & 2 & 2 & 1 & \underline{3}\end{matrix}\qquad\qquad \begin{matrix}1 & \underline{5} & 3 & 6 & \underline{2} & 4\\ 2 & 3 & \underline{4} & \underline{1} & 6 & 5\\ \underline{6} & 1 & 2 & 5 & 4 & \underline{3}\\ 5 & 6 & \underline{1} & \underline{4} & 3 & 2\\ 4 & \underline{2} & 6 & 3 & \underline{5} & 1\\ \underline{3} & 4 & 5 & 2 & 1 & \underline{6}\end{matrix}$$

(A)　　　　(B)

圖　三

最後把 D_1 和 D_3 中有記號的元素都加 m，把 D_2 和 D_4 中沒有記號的元素都加 m，則得圖三(B)，也就是我們要造的方陣。

參　考　文　獻

1. A. Hedayat and W. T. Federer, *On the nonexistence of Knut Vik designs for all even orders*, Annals of Statistics, 3 (March 75), 445-447.

2. J. Dénes and A. D. Keedwell, *Latin Squares and Their Applications*, Academic Press, New York 1974.