奇數、偶數與勝負

—— 一種取的遊戲

林保平

本文作者現爲新莊國中數學教師

銅板若干個，兩人輪流取，每人每次至少取一個至多取三個，取完之後，數一數各人所取銅板的總數，其數量爲奇數者勝，爲偶數者敗。問

1. 這個遊戲對先取者有利或對後取者有利?
2. 若遊戲改成取得數量爲偶數者勝，其情形如何?
3. 若所取數量改爲每人每次至少取一個至多取四個，其情況如何?
4. 推論出 n 個銅板，每人每次至少取一個至多取 m 個的情況。若能分出勝負，其制勝之道如何?

討論這個遊戲，我們採用的方式是分析每種數量的銅板，兩人輪流取時所發生的情形，我們站在先取者（我）的立場，不論輸贏，只論先取者最終所能取得的總數量爲偶數或奇數。將銅板數量分成三類:（每人每次取一至三個）。

（A） **奇偶型**——先取者必可取得奇數個，亦必可取得偶數個（依取者的意願）。
如 2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15, 18, 19, 22, 23, 26, 27, 30, 31, 34, 35, ……

（B） **奇型**——先取者必可取得奇數個，但無法必取得偶數個（即對方必可迫使之只能得奇）。
如 1, 4, 9, 12, 17, 20, 25, 28, 33, 36……

（C） **偶型**——先取者必可取得偶數個，但無法必取得奇數個（即對方可以迫使之只能得偶）。
如 5, 8, 13, 16, 21, 24, 29, 32, 37……

銅板數量之歸類是經下面之分析而得的。

①一個: 只能取奇，無法取偶。**屬B類**。

②二個: 先取一個則得奇；先把二個取完則得偶。**屬A類**。

③三個: 先取三個則得奇；先取二個則得偶。**屬A類**。

④四個: 先取者只能必得奇，無法必得偶。因我取一對方取三，我取二對方取一，我取三對方取一，我無法必取得偶數個。**故屬B類**。

⑤五個: 我先取一個，若對方取一我取三；若對方取二我取一；對方取三我取一。最終我的總數必爲偶。但無法必取得奇數個，因我取一對方取三，我取二對方取三，我取三對方取一，此時，我所得總數爲偶。**故屬C類**。

根據這五種，我們可以推得更多個銅板時的情形:

⑥六個：我取一剩五，對方在五個中無法必取得奇數個（由⑤），亦即我可迫使他取得偶數個，故在這五個中我必可取得奇數個，加上先取的一個，我必可取得偶數個。

我取二剩四，我可迫使對方在四個中取得奇數個（由④），故在這四個中，我必可取得奇數個，加上先取的二個，我必可在最終取得奇數個。

故六個銅板時，我先取一個必可得偶數個銅板（當然要依必勝之法去做），我先取二個必可得奇數個，故六個應在A類中。

⑦七個：我取二剩五，並可迫對方在五個中必取得偶數個（由⑤），故我必可取得奇數個，加上先取的二個，仍為奇數。

我取三剩四，在四個中，我可迫使對方取得奇數個（由④），故我亦可取得奇數個，加上原取的三個，必為偶數。故七個應在A類中。

⑧八個：我取一（或二）個剩下七（或六）個，對方在七（或六）個之情況下，是先取能控制我所取之奇偶（由⑥，⑦）故此時我無法必取得奇數個或偶數個。

若我先取三個剩五個，在五個中我可迫使對方取得偶數個，故我必可取得奇數個，加上先取的三個為偶數。所以八個應在C類中。

⑨九個：我取二（或三）個剩下七（或六）個，我無法依意願取得奇數或偶數個（由⑥，⑦）。

我取一個剩八個，在八個中，我可迫使對方取得偶數（由⑧），故我亦可取得偶數，加上原來先取的一個，我必取得奇數個，故九個應在B類中。

以後各情形的分析均類似。

分析各種數量在各類的分佈情況後，我們發現 A、B、C 三類中數量的規則性。它們都是八的等餘式，令N表自然數或零，我們得到八種形態的數，依其類別列之於下：

A類： $2+8N,\ 3+8N,\ 6+8N,\ 7+8N.$

B類： $1+8N,\ 4+8N.$

C類： $5+8N,\ 8+8N.$

由於只有奇數數量的銅板才能決定勝負，同時根據我們歸類的原則，得到**下列結論**：（請注意此處所討論的是每人每次至多取3個至少取1個）。

(1) 若規定取得奇數為勝，則數量為 $3+8N,\ 7+8N\ \ 1+8N$ 時，先取者必能在最終取得奇數銅板而獲勝，其制勝之道為：

在任一階段輪到我取時，如對方有奇數個銅板〔註一〕，我必需取適當個，使拿後桌面數屬B類〔註二〕；如對方有偶數個銅板，我必需取適當個，使拿後桌面數屬C類〔註二〕。

(2) 若規定取得偶數為勝，則數量為 $3+8N,\ 7+8N,\ 5+8N$ 時，先取者必能在最終取得偶數銅板而獲勝，其制勝之道為：

在任一階段輪到我取時，若對方有奇數個銅板，我必需取適當個，使拿後桌面數屬C類〔註二〕；如對方有偶數個銅板，我必需取適當個，使拿後桌面數屬B類〔註二〕。

〔註一〕對方手中數＝銅板總數－桌面數－我手中數。

〔註二〕若在此階段前，我均依此法則進行，則這一步也一定可行了。（證明如下）

證明： 如果不行，則自此時起，對方必能拿得使我最後失敗。但我已知道如銅板總數為上列型態時，從一開始我即立於不敗之地。因此，如在某一階段，我無法將對方迫入應入的類型時，必然是因前面某一階段我已未能依此法則進行（即取錯而致失去優勢），此與已知條件不合。

以上是討論每人每次取 1 至 3 個的情形。同樣地，我們可以討論 1 至 4 個的情形（注意結果與前者稍有不同），我們並推出它的一般法則，列成兩個定理如下:

【定理一】銅板若干個，兩人輪流取，每人每次至少取 1 個，至多取m個，已知m爲偶數，若銅板數量爲$r+(m+2)N$，其中r爲自然數，$1\leq r\leq m+2$，N 爲任意自然數或零。則

(a) $r\neq 1$，$r\neq m+1$ 且 $r\neq m+2$ 時，
先取者必可依其需要在取完後得到奇數或偶數個銅板。

(b) $r=1$時，
先取者必有法在取完後取得奇數個，但無法必取得偶數個。

(c) $r=m+1$ 或 $r=m+2$ 時，
先取者必有法在取完後，取得偶數個，但無法必取得奇數個。

【定理二】銅板若干個，兩人輪流取，每人每次至少取 1 個，至多取m個，已知m爲奇數，若銅板數量爲 $r+(2m+2)N$，其中r爲自然數，$1\leq r\leq 2m+2$，N 爲任意自然數或零。則

(a) $r\neq m+2$，$r\neq m+1$，$r\neq 1$，$r\neq 2m+2$ 時，
先取者必可依其需要，在取完後得到奇數或偶數個銅板。

(b) $r=1$ 或 $r=m+1$ 時，
先取者必有法在取完之後得到奇數個銅板，但無法必取得偶數個銅板。

(c) $r=m+2$ 或 $r=2m+2$ 時，
先取者必有法在取完後得到偶數個銅板，但無法必取得奇數個。

至於它的制勝法則及此二定理的詳細證明，讀者可以自已試試。