# 只要想得巧

李國偉

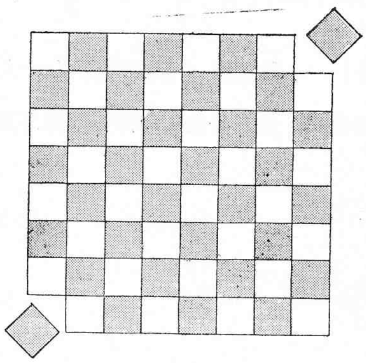
本文作者現任職於本所

數學研究固然經常需要整套整套艱深的理論，但是也有一些短小精幹的片段，只要你抓到了要領，想得夠機巧，一下就能把看起來難如登天的問題解決掉。在這種地方，是最能見到數學神妙動人的本質了。我現在想舉幾個這樣的小例子。

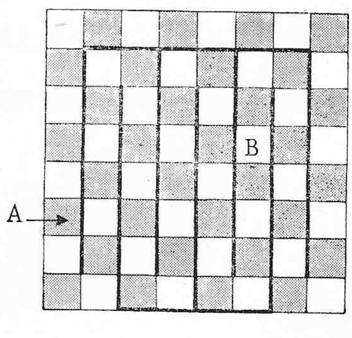
首先讓我講一段匈牙利天才數學家波沙（Louis Pósa）的故事。一九五九年當波沙十一歲時，著名的匈牙利數學家艾爾地希（Paul Erdös）經人介紹認識了他，便請他一同去吃午飯。當波沙正在喝湯時，艾爾地希就出了個題目想考考他的眞本領有多大，他說：「波沙啊，你能不能證明假如有 $n+1$ 個小於或等於 $2n$ 的正整數，則它們中間必有一對數是互質的？」顯然易見這個問題對 $n$ 個數便不對，因爲 $2, 4, 6, \cdots, 2n$ 這 $n$ 個數絕沒有一對是互質的，而當初艾爾地希發現如此小小的定理時，還花了十分鐘去找一個眞正簡單的證明。但是波沙繼續喝着他的湯，還沒過半分鐘便答道：「如果你有 $n+1$ 個小於或等於 $2n$ 的正整數，總會有兩個是相鄰的，當然它們倆是互質的了。」這不是跟大數學家高斯七歲時便能一下算出 1 加到 100 相媲美嗎？事實上匈牙利這麼一個小小的國家，本世紀可眞出了不少大數學家，主要是因爲他們非常重視中小學的數學教育，不僅有數學天才的專門中學，校際以及電視上的數學競試，而且還有一份有八十多年歷史，專門給中學生看的數學雜誌，希望我們的「數學傳播」也能發揮同樣的作用。

第二個例子是有關用邊長爲 1 與 2 的矩形骨牌，覆蓋邊長爲 8 的西洋棋盤。大家都知道如果你把棋盤的右上角與左下角截掉，就無法用31塊骨牌來蓋滿。（請參看圖一）

圖一



圖二

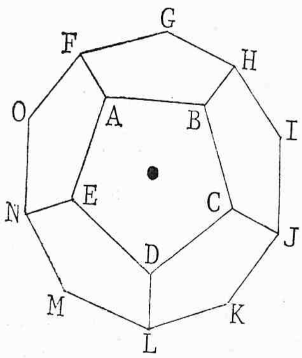



因爲截去的兩角均爲黑色，而一塊骨牌必須同時蓋住一黑格一白格，現在有 30 個黑格，32 個白格，只好「沒法度」了。（這還是六十五學年度臺大數學研究所博士班的考題呢！請參看「數學傳播」第一卷第二期 144 頁）但是如果我們任意割掉一黑格一白格，剩下的棋盤是不是一定可以用 31 塊骨牌蓋住呢？這個問題就不那麼容易回答了。當然你可以畫幾個例子看，然而試試給一個證明說它可以，或是給一個反例說它不可以！這個問題的解答其實是正面的，然而最初的證明建立在圖像的配對理論上，相當的艱深。前幾年美國 IBM 的一位數學家高莫瑞（Ralph Gomory）想到了一個證明，簡直是不費吹灰之力便達到目的了。如圖二中，我們在棋盤上放一個向上的三叉戟，一個向下的四叉戟，那麼我們沿著「迷宮」走一圈，

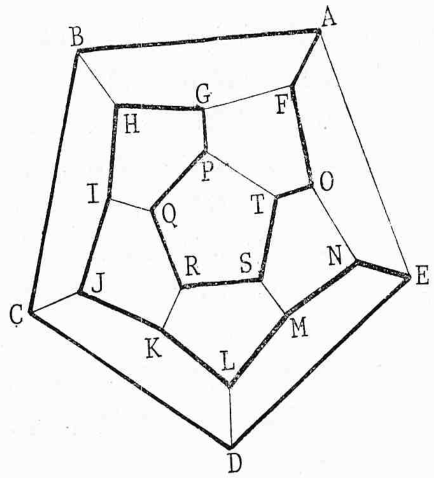
一定可以回到原來的出發點，也就是說這兩把戟一放，我們便給所有的方格一個循環性的次序。假設我們現在把 $A$ 與 $B$ 兩格割掉，就有兩條路從 $A$ 走到 $B$，但是沿著任何一條路，總是黑白相間的走。這就證明了在這個「迷宮」中，對任何一對顏色相異的方格而言，它們之間的通道上有偶數個方格。因此骨牌便可一塊一塊的蓋上去，空間是一定夠了，就怕轉彎時轉不過來。但是因爲骨牌可以直放，也可以橫放，所以轉彎的地方並不會發生麻煩，於是沿著從 $A$ 到 $B$ 的兩條通道一路蓋過去，終究是要把有洞的棋盤剛剛好蓋滿的。

在「數學傳播」第一卷第四期中，黃光明先生有一篇「組合學漫談」，曾經提到「漢彌爾頓圈」。原來在一八五〇年代，愛爾蘭的著名數學家漢彌爾頓 (Sir William Rowan Hamilton) 發明了一個小遊戲：假如我們手頭有一個正十二面立體，每個頂點當作世界上一個著名的城市，試試看從任一城市出發，沿著稜線經過所有城市再回到原地，不過除了出發點，每一個城只能經過一次。漢彌爾頓把這個遊戲叫做「環遊世界」，並且以二十五英鎊賣給了玩具商。

如果我們在圖三中，把左邊的 $ABCDE$ 正五邊形戳一個洞，將整個立體攤開成右邊的平面圖形，就

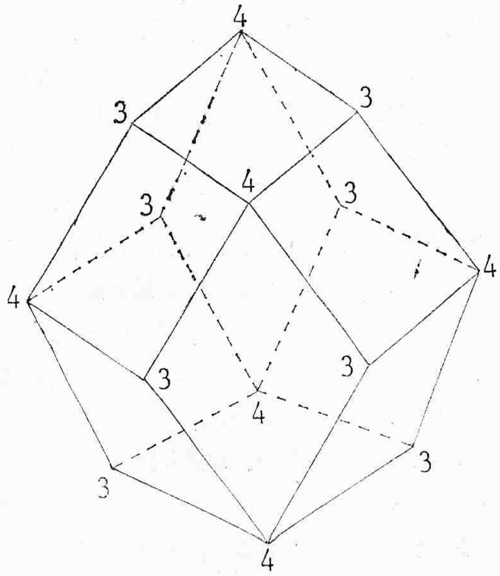



圖三




不難看出如何畫漢彌爾頓圈的方法了。但是如果我們的十二面體的每一面不是一個正五邊形，而是一個菱形的話，還能不能找到漢彌爾頓圈呢？加拿大的著名幾何學家科克斯特 (H. S. M. Coxeter) 很巧妙的證明了沒有這種圈存在。

如圖四中所示，每一個頂點要麼有三條邊來相會，要麼有四條邊來相會，而且與三邊點相鄰的是四邊點，與四邊點相鄰的是三邊點。所以假如有一條漢彌爾頓圈。則它必須相間的經過三邊點與四邊點，因此要通過 14 個頂點，這種圈上必須有 7 個三邊點 7 個四邊點。但是不幸的是現在我們只有 6 個四邊點，所以「漢彌爾頓圈」是註定找不著了。




圖四