你知道超越數嗎？

林聰源

本文作者現任教於清華大學數學系

甲、設 α 為任意一複數，即 $\alpha\in\mathbf{C}$，若 α 是某一個整係數多項式 $P(x)\in\mathbf{Z}[x]$ 之一根，即 $P(\alpha)=0$，則稱 α 為代數數。根據這個定義，很顯然的，所有的有理數都是代數數。由高等代數學的理論，在 α 所滿足的整係數多項方程式中，存在一個次數最小者（必為 $\mathbf{Q}[x]$ 中之不可分解式），設其次數為 s，則稱此代數數之次數為 s。又所有代數數所成的集合形成一個體，此體通常以符號 $\mathbf{A}$ 表示。$\mathbf{A}$ 在 $\mathbf{C}$ 中的補集裏的元素稱為超越數；換句話說，不能滿足任何整係數多項方程式的複數叫作超越數。舉例來說，i, $\sqrt{2}$ 及 $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ 都是代數數，它們依次滿足整係數多項方程式 $x^2+1=0$, $x^2-2=0$ 及 $x^4-4x^2+2=0$. 然而超越數的發現，比起代數數來得晚許多，距今才只有一百五十年左右的光景。現在就讓歷史帶領我們做一番回顧吧!

乙、在數學史上第一個引起我們注意，和超越性有關的事蹟是在 1737 年，瑞士人 Euler 證明的一個定理:

定理: e，自然對數的底，是一無理數。

證明: 由對數的定義以分析方法可導出:

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$$

今就 e 之無窮級數表法，將 e 寫成「部分和」s_n 及「尾巴級數」r_n 的和，即

$$e=s_n+r_n,\quad n=1,2,\cdots$$

其中
$$s_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!},\qquad r_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}$$

由於
$$\begin{aligned}r_n&=\frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\cdots\right)\\&<\frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\cdots\right)\\&=\frac{1}{(n+1)!}(e-1)\qquad\text{對 } n=1,2,\cdots\text{成立,}\end{aligned}$$

當 $n=1$ 時，$e=s_1+r_1$, $s_1=2$, $r_1<\dfrac{e-1}{2}$

故得
$$e<2+\frac{e-1}{2}$$

由此式即解出 $e<3$（事實上 $e=2.718\cdots$），因此

$$0<r_n<\frac{2}{(n+1)!},\quad n=1,2,\cdots\cdots$$

令 $a_n=n!\,s_n$，$b_n=n!\,r_n$，則 a_n 爲正整數，而

$$0<b_n<\frac{2}{n+1}\leq 1,\quad n=1,2,\cdots\cdots$$

由等式 $n!\,e=a_n+b_n$，右式非爲整數，故 $n!\,e$ 非整數，明顯地 ne 也不可能是整數了，此一事實對所有正整數 n 都成立，因此 e 不是有理數，證明完畢。

Euler 不僅是一位想法很多，也很會算的數學家，他還是一個善於創造符號的人；譬如說，e,π 及 log 都是由他首創，一直通行至今的。他所完成的工作中，最爲人所樂道，而且也是流傳最廣的，是下列所謂的 **Euler 恆等式:**

$$e^{i\pi}+1=0$$

此式值得我們注意一下，它包含五個數，即 $e,\pi,i,1,0$，以及兩個符號$+$，$=$，這五個數是數學中最重要的五個數，而這兩個符號也是算術中最基本的符號。在數學中，像這麼漂亮而典雅的式子，恐怕很難再找到了。在以後的章節裏將會用上它，而發現它是很重要的一個式子。

Euler 本人對 e,π，及 $\log_a b=\log b/\log a$ $(a,b\in\mathbf{Q},a,b>1)$ 這些數之研究不遺餘力，1750 年他提出如下猜測:

Euler 猜測: *e,π 及 $\log_a b$ 均爲超越數*

〔註〕$\log_a b$ 有可能是有理數的，所以 Euler 猜測中應該更詳盡地寫爲：**當 $\log_a b$ 不是有理數時，則必爲超越數。**

丙、接着在 1770 年法國人 Lambert (即 D'Alembert) 證明了 π 是無理數。證法之一是考慮積分

$$I_n(\alpha)=\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\cos(\alpha x)\,dx,\qquad n=0,1,2,\cdots\quad \alpha\in\mathbf{R}\ (\text{實數體})$$

利用部分積分可導出遞迴公式　$$I_n(\alpha)=\frac{2n(2n-1)}{\alpha^2}I_{n-1}-\frac{4n(n-1)}{\alpha^2}I_{n-2}\qquad n\geq 2$$

簡單的計算顯示　$$I_0=\frac{2}{\alpha}\sin\alpha,\qquad I_1=\frac{4\sin\alpha}{\alpha^3}-\frac{4\cos\alpha}{\alpha^2}$$

代入上式即得　$$\alpha^{2n+1}I_n(\alpha)=n!\,(P(\alpha)\cos\alpha+Q(\alpha)\sin\alpha)$$

其中 $P(\alpha)$ 與 $Q(\alpha)$ 爲 α 之多項式而其次數皆小於 $2n+1$. 若 π 爲有理數，設其爲 $\pi=a/b$，其中 a 爲整數，b 爲正整數，令

$$J_n=\frac{a^{2n+1}I_n(\frac{\pi}{2})}{n!}\qquad n=0,1,2,\cdots\cdots$$

則一方面經由化簡可知

$$J_n=\frac{a^{2n+1}\cdot\left(\frac{a}{2b}\right)^{-2n-1}\cdot n!\;Q\left(\frac{a}{2b}\right)}{n!}=(2b)^{2n+1}\,Q\left(\frac{a}{2b}\right)$$

爲一整數，而且

$$I_n\left(\frac{\pi}{2}\right)=\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx>0$$

(因爲被積分函數之中，$(1-x^2)^n>0$，$\cos(\pi x/2)>0$，$\forall -1<x<1$)故 J_n 爲非零整數，$(n=0,1,2,\cdots)$。

另方面由估計值

$$|J_n| \leq \frac{|a|^{2n+1}}{n!} \cdot \int_{-1}^{1} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx \qquad (\because |1-x^2| \leq 1,\ \forall -1<x<1)$$

$$= \frac{C|a|^{2n+1}}{n!}$$

其中C表積分 $\int_{-1}^{1} \cos(\pi x/2)dx$ 之值，是一與n無關之常數。現在我們讓n趨近正無窮大，則由簡單的極限理論

$$\lim_{n\to\infty} \frac{C|a|^{2n+1}}{n!} = 0, \quad 故 \lim_{n\to\infty} J_n = 0$$

這就與 J_n 爲非零整數之事實相互矛盾，因此π爲有理數之假設是荒謬的，證明完畢。

丁、1844 年 Liouville 發現代數數以有理數逼近時，不能超過某種限度，他的結果如下：

定理： 設ξ爲一無理代數數，其次數爲 s $(s \geq 2)$，則存在一正常數c使不等式

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| > \frac{c}{q^s}$$

對所有有理數p/q $(q>0)$ 成立。

根據這個定理，馬上有如下結論：

系： 設 $\{p_n/q_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 爲一有理數序列，$\{s_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 爲一實數序列，且 $\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$；若一複數$\xi$滿足所有不等式

$$\left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \frac{1}{q_n^{s_n}} \qquad n=1,2,\cdots\cdots$$

則ξ爲一超越數。

證明： 設其不然，則ξ爲一代數數，令其次數爲s，則根據上定理之結論與本定理之假設，下列不等式

$$\frac{c}{q_n^s} < \left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \frac{1}{q_n^{s_n}} \qquad 對所有\ n=1,2,\cdots 成立。$$

此卽蘊涵

$$0 < \frac{c}{q_n^s} \leq \frac{1}{q_n^{s_n}} \qquad n=1,2,\cdots\cdots$$

化簡卽得$0 < c \leq q_n^{s-s_n}$；但另方面當$n\to+\infty$而q_n大於 1 時，$s-s_n\to-\infty$故而$q_n^{s-s_n}\to 0$。這就導出一個矛盾，因此ξ爲超越數，證明完畢。

利用此系可製造出無數之超越數，此種超越數特稱爲 Liouville 氏數。以下卽爲一例。

〔例〕 $\xi = \Sigma^{\infty}_{v=1} 1/10^{v!}$ 爲一 Liouville 氏數。

證明： 由無窮級數之比較審斂法

$$\because \quad \frac{1}{10^{v!}} \leq \frac{1}{10^v} \qquad v=1,2,\cdots\cdots$$

故

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{10^{v!}} < \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{10^v} = \frac{1}{9}$$

因之 $\Sigma_{v=1}^{\infty} \frac{1}{10^{v!}}$ 爲一收歛級數，設其部分和

$$s_n = \frac{p_n}{q_n}, \quad 卽 \quad \frac{p_n}{q_n} = \sum_{v=1}^{n} \frac{1}{10^v}$$

由觀察可知 $q_n = 10^{n!}$，另方面

$$\left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right| = \sum_{v=n+1}^{\infty} \frac{1}{10^{v!}} < \frac{1}{10^{(n+1)!}}\left[1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots\right]$$

$$=\frac{10}{9}\cdot\frac{1}{10^{(n+1)!}}=\frac{10}{9\cdot10^{n!}}\cdot\frac{1}{(10^{n!})^n}<\frac{1}{(10^{n!})^n}=\frac{1}{q_n{}^n}$$

故可取 $s_n=n$，代入系中，而知 ξ 爲一超越數。

例中的 ξ 以小數點表示時，呈 0.110001000 之型，1 之出現越來越稀疏，此現象可看成是超越數的充分條件。如果以 2 易 10 而考慮 $\sum_{\nu=1}^{\infty}1/2^{\nu!}$ 時，也得一超越數。有人證過下列由正整數排列所得之小數亦爲一超越數:

$$\eta=0.\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12\ 13\cdots\cdots$$

Liouville 的這些定理後來經過不少數學家的進一步研究而加以改進，現在我們稱這種理論爲“超越測度理論”。

戊、十九世紀末葉，數學上最令人震驚，同時也是最引起爭論的成就是德國人 Cantor 創設的集合論。這是人類首次「冒犯」無窮大這些數，企圖揭開它們的面紗，描繪它們的秩序。由於結果是出奇的美妙，因此立即蒙受兩種完全極端的對待；一派的數學家讚嘆不已，另一派則斥爲無稽之談。前者以 Weierstraβ, Hilbert 等人爲首，後者以 Brower, Weyl 最爲有名。事實上兩派的爭執到今天還沒終了，只是目前數學之急速進展有如百花怒放，讓大家目不暇給，忙個不停，暫時休戰而已。今天我們得心應手享用的一些基本而美好的定理都是建立在集合論上的，無怪乎有人說，現在的數學家是生活在 Cantor 爲我們創造的樂園裏。

Cantor 的集合論中，證明了一件相當重大的結果，那就是說，**實數的基數大於有理數的基數**。由代數數的定義可知所有代數數形成的體的基數和有理數的基數相等，都是可數的集合，因此所有超越數所成的集合的基數是不可數的，也就是說，超越數的個數是無窮多，而且是不可數的，遠比代數數的個數多得多；用一句不太明確的話來說，複數中「**幾乎**」所有的數都是超越數!

順便一提，集合論中有一個重要而基本的**猜測**說：**實數中之無限集合，必與實數全體或有理數全體二者之一有共同的基數**。這就是著名的「**連續統假設**」，至今仍懸而未決。根據此**假設**，超越數之全體之基數與實數者相等。

己、1873 年法國人 Hermite 證明了 e 是超越數，這是一件劃時代的貢獻。因爲雖然 Liouville 和 Cantor 已經分別用建設性的及理論的方法證明了超越數的存在，但這些都是人爲的，而非數學中自然產生的數。所以 Hermite 的結果讓人耳目一新，振奮不已。事實上，近一百年來有關超超越性理論的發展於焉啓幕。

Hermite 的證明其想法是很單純的。假設 e 不是超越數，
則滿足下列型式之方程式:

$$C_0+C_1e+\cdots+C_ne^n=0\,,\quad C_0,C_1,\cdots,C_n\in\mathbf{Z}\ (\text{不全爲}\ 0)$$

他利用下列特別的多項式;

$$\phi(x)=x^{p-1}\frac{[(1-x)(2-x)\cdots(n-x)]^p}{(p-1)!}$$

找到一個正整數 M 以 M 乘原方程式則得

$$C_0M+C_1Me+\cdots\cdots+C_nMe^n=0$$

令 $Me^i=M_i+\varepsilon_i(i=1,2,\cdots n)$，其中 M_i,ε_i 分別爲 Me^i 之整數部分及小數部分，則得

$$(C_0M+C_1M_1+C_2M_2+\cdots+C_nM_n)+(C_1\varepsilon_1+\cdots+C_n\varepsilon_n)=0$$

但原先正整數M之選取可滿足如下兩條件:

$$\begin{cases}C_0M+C_1M_1+C_2M_2+\cdots+C_nM_n\neq0\\ C_1\varepsilon_1+\cdots+C_n\varepsilon_n\ \text{可任意小}\end{cases}$$

因此 $(C_0M+C_1M_1+\cdots+C_nM_n)+(C_1\varepsilon_1+\cdots+C_n\varepsilon_n)$ 等於一非零整數加一微小的數，其值不可能是 0，

於是產生矛盾。如果我們注意

$$e^1:e^2:\cdots:e^n\doteqdot\frac{M_1}{M}:\frac{M_2}{M}:\cdots:\frac{M_n}{M}=M_1:M_2:\cdots:M_n$$

那麼本證法之關鍵卽在於發現 $e^1, e^2, \cdots, e^n$ 之比例，在極小的誤差內，等於某些整數 $M_1, M_2, \cdots, M_n$ 之比例，而此組整數無法滿足原設方程式

$$C_0M+C_1M_1+\cdots+C_nM_n=0$$

庚、九年之後，Lindemann 將 Hermite 的定理利用代數的方法很自然地推廣而得到如下之結論;

定理: e 不能滿足以代數數作係數或指數的多項式方程式，亦卽

$$C_0+C_1e^{k_1}+C_2e^{k_2}+\cdots+C_ne^{k_n}\neq 0$$

其中 $C_0, C_1, \cdots, C_n$（不全爲 0），$k_1, \cdots, k_n$（非零且相異）均爲代數數。

利用這定理，Lindemann 導出了下一重大的結果:

系: π 爲超越數。

證明：若 π 爲代數數，則 $i\pi$ 也是代數數，而 Euler 恆等式

$$e^{i\pi}+1=0$$

就和定理矛盾了。

π 爲超越數這事實，解決了四千年來人們企盼的「方圓問題」之一否定的解答。「方圓問題」是古希臘時代遺留下來很久以來一直未能解決的三大作圖題之一（其他兩個是倍立方問題及三等分角問題，**這三個問題都在十九世紀被解決了**，有興趣的讀者可參考 Klein 所著“著名的幾何問題”一書，商務書局有中譯本）。問題是能否以直尺及圓規做出等面積的一正方形與一圓? 今假定正方形的邊長爲單位長而圓之半徑爲 r 則有 $1=\pi r^2$, 由於尺規只能做出特殊一類的代數數，絕不可能做出超越數， 故 r^2 爲代數數而由系知 π 爲超越數，故 πr^2 亦爲超越數，這就和等式 $1=\pi r^2$ 矛盾了。Lindemann 卽以解決「方圓問題」而在歷史上留芳百世。

Lindemann 定理的內涵可以由下列兩個曲線的幾何圖形來體會:

(1). $y=e^x$（卽 $x=\log y$）

若 x 爲代數數($x\neq 0$)則由 Lindemann 定理知 y 爲超越數; 反之，若 y 爲代數數（$y\neq 1$）則 x 爲超超數。換句話說 x 與 y 不能同時爲代數數（$x=0$, $y=1$ 是唯一的例外）。以圖形來看就相當於指數曲線 $y=e^x$ 及對數曲線 $x=\log y$ 不通過任何的代數點（注意我們的 x 與 y 均爲複變數，所謂代數點是指座標 x 與 y 均爲代數數的點）。如果我們再提醒自已一下，代數點在雙複變的平面上是稠密分佈的話，那麼此二曲線除在 $x=0$ $y=1$ 以外， 完全避開此一稠密點集的事實是很驚人的! 以文字敍述卽:

系: 設 $\alpha\neq 0$, $\beta\neq 0, 1$ 爲代數數，則 e^α, $\log\beta$ 爲超越數。

(2). $y=\sin x$（卽 $x=\sin^{-1}y$）

此時 $2iy=e^{ix}-e^{-ix}$（$\because$ $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ 等等）

若 $x\neq 0$ 爲代數數則由 Lindemann 定理 y 爲超越數；反之若 $y\neq 0$ 爲代數數，則 x 爲超越數，仿照(1)之討論，此正弦曲線（反正弦曲線）除了 $x=0$，$y=0$ 以外不通過任何代數點。以文字敍述卽:

系: 設 $\alpha\neq 0$ 爲代數數，則 $\sin\alpha$, $\sin^{-1}\alpha$ 爲超越數。

辛、Weierstraβ 是分析的鼻祖與重臣之一， 許多超越性理論經他的手變得更完美， 更易於爲人所瞭解，更顯出其重點之所在，比如我們今日在一般教科書上所看到的有關 e 和 π 的超越性的證明有些就是

Weierstraβ 的傑作。除此之外，他也有下列獨創的成果（發表於 1855 年）：

定理：設 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 爲相異代數數，則 $e^{\alpha_1}, e^{\alpha_2}, \cdots, e^{\alpha_n}$ 在體 $\mathbf{A}$ 上是線性無關的。

此定理涵蓋了許多以前的結果於一爐：

(1) 取 $\alpha_1=0, \alpha_2=\alpha$，則 $e^{\alpha_1}=e^0=1, e^{\alpha_2}=e^{\alpha}$ 由此定理卽得 1 與 e^{α} 在體 $\mathbf{A}$ 上線性無關，也就是說 e^{α} 是超越數，此卽庚節(1)。特別地，取 $\alpha=1$ 則得 Hermite 定理。

(2) 設 $\beta \neq 0, 1$ 爲代數數，$\alpha=\log\beta$. 若 α 爲代數數，則取 $\alpha_1=0, \alpha_2=\alpha$，由此定理可知 $\beta=e^{\alpha} \notin \mathbf{A}$ 這是矛盾，故得庚節(1)。

(3) 設 π 爲代數數，則取 $\alpha_1=0, \alpha_2=\pi i$ 由此定理可知 $e^{\pi i} \notin \mathbf{A}$ 但有 Euler 恆等式 $e^{\pi i}=-1$ 這是矛盾，故得 Lindemann 定理之。

壬、除了 Weierstraβ 之外，十九世紀末葉的數學家 Hurwitz 及 Hilbert 也對超越理論深感興趣，雖然 e 和 π 的超越性已經解決了，但是 Euler 猜測中關於 $\log_a b$ 爲超越數的部分仍然沒有答案。Hilbert 本人在此問題上下了一番功夫沒有結果之後，深感此問題之困難與重要，乃於 1900 年在巴黎舉行的世界數學大會上，提出此問題，列名第七（他一共提了二十三個問題，第一個問題卽爲我們提過的「連續統假設」）：

Hilbert **氏第七問題**：*設 $\alpha \neq 0, 1$, $\beta \neq 0$ 爲代數數，若 $\log_\alpha \beta$ 不爲有理數，則必爲超越數。*

讀者必已發現這問題實際上是原來 Euler 猜測推廣後的形式，Hilbert 把 Euler 猜測中 a, b 爲有理數的部分推廣到 α, β 爲代數數的情形。

Hilber 第七問題也可以換成下列的形式來問：

別型：設 $\alpha \neq 0, 1$, $r \notin \mathbf{Q}$ 爲兩代數數，則 α^r 爲超越數。

我們現在來證明 Hilbert 這個問題的原型與別型是等價的：

證明：(1)　（原型$\Longrightarrow$別型）假設別型不成立則 α^r 爲代數數，以 β 表示，則 $r=\log\beta/\log\alpha=\log_\alpha\beta$ 由已知 $r \notin \mathbf{Q}$，故可由原型導出 r 爲超越數的結論。此爲矛盾。

(2)　（別型$\Longrightarrow$原型）假設原型不成立，卽 $\log_\alpha\beta$ 爲代數數，以 r 表之，則 $\alpha^r=\beta$，故可由別型導出 β 爲超越數，此爲矛盾。

由 Hilbert 問題可導出如下之實例：

(1) $2^{\sqrt{2}}$ 爲超越數；此卽別型中 $\alpha=2, \beta=\sqrt{2}$ 之情形。

(2) e^{π} 爲超越數；這是因爲 $i^{-2i}=e^{-2i\log i}=e^{-2i\cdot(\frac{\pi}{2}i)}=e^{\pi}$，卽別型中 $\alpha=i$, $\beta=-2i$ 的情形。

這兩個實例分別在 1929 及 1930 被俄國人 Gelfond, Kuzmin 所證實，而整個 Hilbert 問題是在 1934 年被 Gelfond 及德國人 Schneider 所解決的。

癸、本文最後以兩個故事做爲結束。

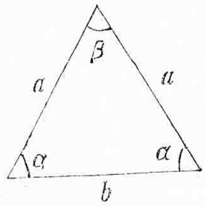
(1) Hilbert 提出這問題之後，有一次在演講中又提到它，那時 (1919) Siegel 剛進 Göttingen，還是年輕的學生，當天也在座聽到 Hilbert 說如下的話：「……這第七問題是非常難的，短期內恐不易解決，打個譬喻說吧！我在有生之年也許有幸可以看到 Riemann hypothesis（關於 Riemann Zeta 函數零點之分佈情形）之解決；在座聽衆之中有人可能可以活到親眼目睹 Fermat 最後問題（方程式 $x^n+y^n=z^n$ 當 $n \geq 3$ 時沒有整數解）之解決；但今天參加這集會的所有人沒有一個可能看到第七問題的答案！」事實並非如此，當 Hilbert 在 1943 年初壽終的時候，第七問題已經解決了有九年之久，而其他兩個難題直到今天還沒有人摸到頭緒。

Siegel 對第七問題的解決有很大的貢獻，前文提到的 Schneider 就是他的學生之一。Siegel 戰後在 Princeton 高等研究所寫了一本書“超越數”，網羅那時這方面進展的成果，在某一頁上他還特地舉出上面

這段故事告誡我們說，在一個問題沒有被解決之前，卽使是一個卓越的數學家，也不易清楚這問題到底有多難。

(2) 在古希臘時代，畢氏定理沒有發現之前，數學家們只知道有有理數，也只談有理數，他們以爲所有的線段都是可以公度的，也就是說，任意二線段長度之比恆爲二整數之比，亦卽比值爲一有理數。畢氏造一等腰直角三角形，若腰爲單位長則斜邊$\sqrt{2}$爲一無理數，因而斜邊與腰不可公度，這個發現震撼了當時的數學界，整個的幾何理論爲之動搖，彷彿數學的末日來臨一般。事實上，數學的歷史沒有因爲一個定理的發現而告終，反而覺悟到以前認定之錯誤而尋覓到完整的新觀念取而代之，使數學走向更光明的境界，Hilbert 第七問題的出現和畢氏定理有着異曲同工之妙，因爲在下面我們將證明此問題可導出“有二線段其長度比爲超越數”之事實:

定理: 一等腰三角形若其底角與頂角之比爲一無理代數數，則底邊與腰之比爲一超越數。



證明: 由正弦定律

$$\frac{b}{a}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{\sin\beta}{\sin\left(\frac{\pi-\beta}{2}\right)}=\frac{\sin\beta}{\cos\frac{\beta}{2}}=\frac{2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}=2\sin\frac{2}{\beta}$$

由假設 β/α 爲一無理代數數，則由

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{(\pi-\beta)/2}{\beta}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{\beta}-\frac{1}{2}$$

可知 β/π 亦爲一無理代數數，由第七問題卽可導得 $i^{\beta/\pi}$ 爲一超越數，

但
$$i^{\frac{\beta}{\pi}}=e^{\frac{\beta}{\pi}\log i}=e^{\frac{\beta}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}i\right)}=e^{\frac{\beta i}{2}}=\cos\frac{\beta}{2}+i\sin\frac{\beta}{2}$$

其中$\cos^2(\beta/2)+\sin^2(\beta/2)=1$，因此 $\cos(\beta/2)$ 及 $\sin(\beta/2)$ 均爲超越數（若 $\sin(\beta/2)$ 爲代數數，則 $\cos(\beta/2)=\pm\sqrt{1-(\sin(\beta/2))^2}$ 亦爲代數數），這就證明了 b/a 是超越數的結論。

有人讀了這麼多之後不禁要發問: “爲什麼要研究超越數呢？”我只想說出我的感覺，當你步向一個光輝耀目的遠景的時候，路旁必也有無數美麗的鮮花供路人瀏覽。

◀參　考　書▶

1. Klein 原著: *Famous Problems of Elementary Geometry*,（中譯本: 幾何三大作圖題，商務印書館印行）

2. A. M. S.（美國數學學會）: *Mathematical Development Arising From Hilbert Problems.*（臺灣有翻版，凡異出版社印行）

66年6月1日脫稿於新竹清華大學