

漫談應用數學

沈美昌

本文作者現任美國威斯康辛大學數學系教授，應國科會之邀請於今年年初返國講學研究，擔任本所特約講座教授。

文末另附作者最近在省立彰化高中的一篇演講——「數學的應用」。

——編輯部

應用數學最早的名稱來源，根據美國紐約大學 (New York University) 數學科學學院首任院長 R. Courant [註一] 的說法 [1]，是在德國哥廷根大學 (University of Göttingen) F. Klein [註二] 為數學院長時設立了一個應用數學講座而產生。當時設立這講座的目的是在推廣抽象化的數值方法。第一任的講座為 C. Runge [註三]。但是自他去世以後即沒有其他人能夠承繼他的位置。目前雖然應用數學在美國各大學已漸設有專門學系，可是應用數學究竟是什麼，卻是一個常常引起爭辯的問題。

要了解應用數學，我們先談談應用數學在美國發展的情形，而以布朗大學 (Brown University) 及紐約大學兩個學校來作例子。這兩個學校的應用數學在美國頗有歷史性，以它們來作為代表也是十分適合的。在二次大戰初期，美國政府為了要為軍方解決一些問題，乃召集了一批數學人才來研究發展數學方法在實用問題上的應用。當時布朗大學藏書已甚為完全，同時又位於波斯頓 (Boston) 和紐約的中間佔了地利之便，所以就被選擇來設立了應用力學高等研究中心。從這中心的名稱就可知道在當時應用數學就是數學應用到力學方面的問題。在大戰以後，此中心乃改為應用數學部由 W. Prager 為部主任。在研究中心成立的同一時期，Courant 邀請了 K. O. Friedrichs, F. John, 和 J. J. Stoker 在紐約大學成立了數學科學學院。此三氏在泛函分析，偏微方程及微分幾何方面各有極高的造詣，同時在應用科學方面亦有精深的研究，對於應用數學以後的發展有不可泯滅的功勞。Courant 為該院院長，一直到他退休為止。為了紀念他的偉大貢獻，乃改名為今日享有盛譽的 Courant Institute of Mathematical Science。我們知道 Courant 曾承繼 D. Hilbert [註四] 為哥廷根大學數學學院院長，在他的領導下，加入了哥廷根的傳統作風。紐約大學和布朗大學的應用數學乃走上了不同的道路。在布朗大學應用數學部則延續了以應用力學為中心的傳統，一直

[註一] R. Courant (1888-1971) 著有 *Methods of Mathematical Physics* 二冊 (和 Hilbert 合著)，*What Is Mathematics* (和 Robbins 合著) 及 *Dirichlet principle* 等書。他發現的 minimax 原理在計算特徵值時常被引用。*What Is Mathematics* 是一本頗有趣味的書。

[註二] F. Klein (1849-1925) 在幾何，代數及函數論方面都有很大的貢獻。所著的 *Elementary Mathematics from a Higher Standpoint* 二冊是頗值得一讀的書。他於相對論方面亦做了不少工作。

[註三] C. Runge (1856-1927) 以研究數值方法出名。Runge-Kutta 方法是常常被引用的。

[註四] D. Hilbert (1862-1943) 在純粹數學方面的貢獻是大家都知道的。但在氣體動力論方面，他對於 Boltzmann 方程式的研究亦常被引用。其他在放射理論和相對論方面都有相當貢獻。

至1960年左右仍離不開連續力學的研究範圍。全美國力學的精華大半都被布朗大學吸引了來而聚集在此。至1961年後，布朗的應用數學部也逐漸增加了電子計算機組和機率統計組而更具完備性。

我們再看看二校應用數學發展的方向是如何。在紐約大學數學科學學院一切決策大半由 Courant 獨攬。有人說 Courant 的貢獻不在數學而在其獨特的行政能力和吸收人才的慧眼。他採取了純粹數學和應用數學應該融洽和並重的看法。我們在 Courant 和 Hilbert 合著的數學物理方法第一冊的序言中就可以了解 Courant 對發展數學的觀點。以純粹數學方面有造詣的數學家再來研究自然或社會科學，往往有獨到的地方。例如 Friedrichs 在流體力學，彈性力學，電磁場，磁性流體力學，相對論方面都有第一手的著述，而開拓了甚多新的研究領域。同時受過紐約大學數學學院洗禮的博士中更是名人輩出，大半仍留在該學院任教使得它的聲譽蒸蒸日上。在應用數學方面，波動傳播部的主持人 J. B. Keller 及磁性流體部的主持人 H. Grad 都是當今國際上的權威。可是布朗的應用數學部在 1963 年後因為一些決策的問題，人才星散，乃由一羣研究控制的數學家來填充了這留下來的空隙。這些興衰的變更也反映了現代應用數學所應走的方向，可是布朗在 1961 年所奠定的基礎亦成為以後其他各校成立應用數學系的模型。目前其他比較完備的應用數學研究所在美國東岸以麻省理工學院和哈佛大學為代表，西岸以加州理工學院為代表。這些學校都有良好的工學院，所以應用數學發展起來比較容易。美國中西部有獨立應用數學研究所的學校還不多，大半屬於數學系。例如威斯康辛大學麥迪生本校 (University of Wisconsin, Madison) 數學系中有一應用數學組，同時威大的數學研究中心亦常常有世界各地來拜訪的應用數學家，而引起不少交流的作用。

現在我們可以開始談談應用數學。我們常常可以聽到一些應用數學的必須條件，而充分條件更是多不勝言。有人主張應用數學根本應該和純粹數學分開而成為一門與純粹數學毫不相關的科學。有些人主張應用數學根本不存在，例如威大的 R. Buck 認為只有應用數學家而沒有應用數學 [1]。在這裏一切爭論的焦點都是在於應用數學的定義。可是從最近美國工業及應用數學學會與布朗大學所舉辦的討論會的報告中 [2, 3]，顯然地，應用數學這一名詞已被一般數學家所接受，應用數學是確實有其獨特的地方，而且是溝通純粹數學與應用科學不可缺少的橋樑。因之，應用數學家的責任和應具備的知識是非常沉重的。在利用數學來解決一個實際的問題中，或者比較主觀的來說，來解決一個應用數學的問題，下列所謂的循環四行程是不可少的（據謂此四行程乃由 Friedrichs 首先提出，詳情待考）：

- (1) 利用假設以簡化原有的問題。
- (2) 構造簡化問題的數學模式。
- (3) 數學問題的解決。
- (4) 數學問題答案與原來問題的關聯及解釋。

在第(3)步中是利用已有或發展新的數學方法來解決問題，可是(1)，(2)，(4)三步中卻需要特別的訓練，也許這就是應用數學的特性所在。正如現任紐約大學數學科學學院院長 P. Lax 在美國工業及應用數學學會所發表的報告中提出的 [2]，我們需要設立一個純粹及應用數學的雙重博士學位，而論文須在二方面各作一篇。目前這種看法也尚未到成熟的地步，可是卻說明了對於一個應用數學家的嚴格要求。以威大數學系為例，應用數學組中修讀博士的同學們至少在純粹數學和應用數學二方面各選修 9 學分，在計算機系或物理系選修 12 學分，方有充分的準備來參加博士鑑定考試，通過後再參加應用數學的專科口試。生於廿世紀中，值得慶幸的是我們已具備了 Runge 時代所不能想像的數學工具；可是實際問題往往愈來愈複雜，使得應用數學更富有挑戰性。現在國內數學界中，由於很多新血輪的增加，有着一片蓬勃新生的氣象，正是大家不分成見共同來推廣應用數學的大好時機。最後我將 W. Prager 對於應用數學家所作的解釋 [3] 取來作為本文的結束。

「應用數學家應和純粹數學家們分享共同的興趣來發展新的數學工具，和工程師及應用科學家們有共同的目標，將數學應用到改進自然和人為環境的控制和了解。在此二者之間，應用數學家更應贊賞純粹數學家嚴謹的態度，同時又應同情應用科學家直覺的立論。他必須能夠設立一個數學定理的嚴格證明，同時又能針對他所研究的問題構造一個妥切而且可行的數學模型。」

(本文承施思明博士提出不少寶貴意見，特此致謝。——筆者)

參 考 資 料

1. R. Buck, *Advanced Calculus*, 1956 McGraw-Hill, New York.
2. *Education in applied mathematics*, SIAM Review, 9, 1967, 293-415.
3. Proc. symp., *On the future of applied mathematics*, Brown University, Ouar. Appl. Math., 30, 1972, 1-125.

【附錄】

數 學 的 應 用

沈美昌 主講
張永福 筆記

本演講記錄係由彰化高中高二一班同學張永福所記

今天很榮幸到彰化拜訪，感謝關校長和救國團安排此次講演，我大概十八年沒有回來了，這次能和諸位老師同學見面，實在非常高興。今天演講的內容是「應用數學的歷史、發展及該用何種態度來研究」。

本人畢業於國立臺灣大學，原習電機。於一九五八年入美國布朗大學深造，攻讀應用數學。布朗大學在應用數學方面，頗負盛名。二次大戰期間，軍方因該校在師資及設備方面均優。希望該校在力學方面，對軍方有所協助，乃成立了高等力學研究中心。當時並沒有計算機，一切都很簡陋。到了大戰以後方正式成立應用數學部。後來除了力學組以外又成立統計組，及電腦組。以後其他學校成立應用數學系時，多以布朗大學應用數學系之組織模型為藍本。本人後來又至紐約大學繼續研究。發現紐約大學之研究情形頗異於布朗大學。因為美國應用數學淵源於德國。而德國又以哥廷根大學在此方面最負盛名。二次大戰期間，許多猶太人的數學家被德國驅逐，彼等到美國後於紐約大學成立研究機構。他們的研究方針係將數學與其他學科配合應用，而不將應用數學視為一特別課程。我必須特別說明數學並無應用數學和純數學之分，如把數學應用在實際問題即為應用數學。紐約大學之數學研究，注重方法，然後應用於自然及社會科學方面，如磁性流體，波動理論，及經濟學等。愛因斯坦提到一句話：「普天之下，凡能用數學表示者，就是物理」。此語用於應用數學似乎也很適合。

後來我到威斯康辛也是採取了這種研究的觀點，學生必須選修純數學與應用數學之課程，如此方可將

數學研究透徹。不過如果數學無實際問題促其發展，數學方法必無法活用。十九世紀一英人在運河上散步，發現一甚為有趣之現象：當船停止時，有一道波浪向前直去，高度及速度一定。他將觀察結果在一科學雜誌上發表，希望數學家能應用數學方法解釋此種現象。後來在一九〇〇年左右有二位科學家用複雜的數學方程式，初步解釋此一現象。至一九六〇年在普林斯頓大學，四位科學家以量子力學上反散射的方法，以解決上述問題。此問題經過一百多年方告徹底解決。其他如潮水、波浪等種種自然現象也都可拿來研究。在應用數學方面，我們不但是要研究數學本身，而且更是用數學方法去研究與生活有關的各項問題。

我們再討論一下應採什麼態度去研究應用數學？紐約大學有一位德籍教授費爾第斯提出四點。一、把問題、自然現象徹底了解，找出重要因素，而提出假設。二、將假設變成數學程式，此為數學家之工作，解此方程式，可以用分析方法、電腦、統計或機率方式為之。三、解決後再回過頭來，配合原問題，以檢視此過程之正確性。四、推廣方法將其抽象化，並應用到其他問題。應用數學家也就是如何配合上面四個程式和實驗，研究自然現象。其次要談的是如何建立數學模型，這是比較難的一步。如物理上的問題，要從虛有的東西，把它變成有形的數學程式是比較難的。如火箭的研究，加州理工學院 JPL 裏有許多中國的流體力學家也在研究火箭之設計，在研究模型時，常發現某些因素互相衝突。在某方面有利，另一方面有弊，無法兼籌併顧。研究結果，最後以三節火箭最合經濟原則，又可剛好發射升空。其他大如星雲之結構，小如霉菌散佈情形都是值得研究的。任何一種學科以及日常生活的問題，均與數學有關。因此應用數學的研究範圍是包羅萬象而且非常富有挑戰性的。

去年我到紐西蘭參加研究由地震而引起的海嘯問題，應用數學家研究它可走多遠，浪多高。還有運籌學上研究倉庫的分佈和運用，如何可達到最大效果。最近數學也應用到醫學方面，如神經上電流傳導的問題，肌肉、血流和心臟幫浦的這些問題。他如社會行政的問題和最近美國利用電腦研究軍隊調度分佈的問題。總之可利用數學研究的問題太多了。

至於聯考的問題，這也值得研究的，如何花費最少時間求得最大效果。我當時投考臺大競爭並沒有這麼激烈。九百多人投考，只考四科：國、英、數、理化幾科而已。希望大家能把握重點，不要花冤枉的時間，要打有把握的仗。時間也不多了，不知大家有否問題？如不便在這裏發問，歡迎大家寫信到南港中央研究院。在國內，我大概還有四個月，謝謝各位。