偶數階幻方的快速構作

梁彩麗　梁培基

摘要: 本文給出一種構作 $n(n=4k及4k+2)$ 階幻方的方法, 當 $n=4k(k=1,2,\ldots)$ 時, 其構作速度之快與在紙上直接書寫自然數的速度差不多, 所以稱爲“直接書寫法”。

幻方, 就目前來說大致可分爲四類: 和幻方 [1][2]、平方幻方 [3]、雙重幻方 [4][5]及功能組合幻方 [6][7]。構作方法有十幾種, 和幻方 (本文所述均指和幻方) 的造法更多, 在計算機問世以前的幾千年裡, 人們用手寫筆算 (或珠算) 來構作和計算幻方, 因此, 渴望找到一種造法簡單速度較快的方法。法國人魯貝爾1693年發表了一種“東北法”[3], 可以極方便的造出 $n=2k+1(k=2,3,\ldots)$ 階幻方, 對於偶數階幻方的構作, 傳統的方法是在一個數陣的基礎上移動元素或調換元素的位置來生成幻方, 本文給出的方法可以較方便的造出偶數階幻方, 這個方法也適用於計算機構作幻方。

定義 1: 將 n^2 個連續自然數 $1,2,\ldots,n^2$ 排列成一個 n 階方陣, 若每行、每列及兩條對角線上 n 個元素之和都等於定值 (這個定值叫作幻和, 記作 S_n), 這個方陣稱爲幻方, 其幻和 $S_n=n(n^2+1)/2$。

定義 2: 由 n^2 個互不相同的自然數 (不是 $1,2,\ldots,n^2$, 這 n^2 個連續自然數) 構成的幻方, 稱爲“增廣幻方”。

一. $4k$ 階幻方的構作

利用下述定理可造出 $n=4k(k=1,2,\ldots)$ 階幻方。

定理 1: 設 $H=(h_{ij})$ 爲 $n(n=4k;k=1,2,\ldots)$ 階方陣, 若

$$h_{ij}=\left[\begin{array}{ll} n(i-1)+j & i,j=\left[\begin{array}{c} 1,2,\ldots,k,3k+1,3k+2,\ldots,n. \\ k+1,k+2,\ldots,3k \end{array}\right] \\ n(n-i+1)-j+1 & i=\left[\begin{array}{ll} 1,2,\ldots,k,3k+1,3k+2,\ldots,n; & j=k+1,k+2,\ldots,3k. \\ k+1,k+2,\ldots,3k; & j=1,2,\ldots,k,3k+1,3k+2,\ldots,n \end{array}\right] \end{array}\right]$$

則 $H=(h_{ij})$ 是一個 $4k$ 階幻方。

證明: $H(h_{ij})$ 陣的任意一行上 n 個元素之和爲

$$\sum_{j=1}^{n} h_{ij}=2k[n(i-1)+n(n-i+1)+1]$$
$$=2k(n^2+1)=n(n^2+1)/2$$
$$(i=1,2,\ldots,n)$$

同理可證任意一列上 n 個元素之和爲 $n(n^2+1)/2$。由構作方法知, $H=(h_{ij})$ 陣的兩條對角線上都由 $2k$ 個其和等於 n^2+1 的元素對所組成, 故它們的和爲

$$\sum_{i=1}^{n} h_{ii}=2k(n^2+1)=n(n^2+1)/2$$
$$(i=1,2,\ldots,n)。$$
$$\sum_{i=1}^{n} h_{i,n-i+1}$$
$$=2k(n^2+1)=n(n^2+1)/2$$
$$(i=1,2,\ldots,n)。$$

圖1與圖2是利用上述方法造出的4階與8階幻方, 圖中的虛線爲“井”字形分塊線。

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

圖 1. $S_4=34$

1	2	62	61	60	59	7	8
9	10	54	53	52	51	15	16
48	47	19	20	21	22	42	41
40	39	27	28	29	30	34	33
32	31	35	36	37	38	26	25
24	23	43	44	45	46	18	17
49	50	14	13	12	11	55	56
57	58	6	5	4	3	63	64

圖 2. $S_8=260$

爲了便於記憶, 我們將上述定理編成下述歌訣:

方陣分爲井字形, 四角中心順序行, 其餘四邊逆序寫, $4k$ 階幻方便刻成。

二. $4k+2$ 階幻方的構作

當 $n=4k+2(k=1,2,\ldots)$ 時, 我們把 n 階方陣分爲兩部分——外層部分與中心部分, 外層部分包括第1行、第 n 行與第1列、第 n 列; 中心部分包括第 $2,3,\ldots,n-1$

行與第 $2,3,\ldots,n-1$ 列 (其實是一個 $4k$ 階方陣), 這個方法稱爲“分層法”。

圖3是用“分層法”造出的 6 階幻方 (其內層是一個 4 階增廣幻方)。

1	34	32	30	10	4
6	11	25	24	14	31
8	22	16	17	19	29
35	18	20	21	15	2
28	23	13	12	26	9
33	3	5	7	27	36

圖 3. $S_6=111$

1	98	96	94	89	84	14	15	10	4
6	19	20	80	79	78	77	25	26	95
8	27	28	72	71	70	69	33	34	93
11	66	65	37	38	39	40	60	59	90
18	58	57	45	46	47	48	52	51	83
88	50	49	53	54	55	56	44	43	13
85	42	41	61	62	63	64	36	35	16
99	67	68	32	31	30	29	73	74	2
92	75	76	24	23	22	21	81	82	9
97	3	5	7	12	17	87	86	91	100

圖 4. $S_{10}=505$

當 $k>1$ 時, 設 $A=(a_{ij})$ 爲 $4k+2(k=2,3,\ldots)$ 階幻方, 其構作方法按如下步驟進行:

外層部分的構作

1. 先將 $1,2,\ldots,10$ 這十個元素按表1所示固定在各自的位置上, 使第1行 (列)、第 n 行 (列) 上3個元素之和都等於15。

<table>
<tr><td>j</td><td>1</td><td>n</td><td>$n-1$</td><td colspan="3">2 — 4</td><td colspan="2">n</td><td colspan="2">1</td></tr>
<tr><td>a_{ij}</td><td>1</td><td>4</td><td>10</td><td>3</td><td>5</td><td>7</td><td>2</td><td>9</td><td>6</td><td>8</td></tr>
<tr><td>i</td><td colspan="3">1</td><td colspan="3">n</td><td>$n-2$</td><td>$n-1$</td><td>2</td><td>3</td></tr>
</table>

外層的其它元素按下列規則填寫:

$$a_{ij} = \left[\begin{array}{cc} 11, 12, \ldots, k+9 & (i = 4, 5, \ldots, k+2; \quad j = 1) \\ k+10, k+11, \ldots, 2k+8 & (i = n; \quad j = 5, 6, \ldots, k+3) \\ 2k+9, 2k+10, \ldots, 3k+7 & (i = 2k+2, 2k+3, \ldots, 3k; \quad j = n \\ 3k+8, 3k+9, \ldots, 5k+5 & (i = 1; \quad j = 2k+3, 2k+4, \ldots, 4k) \\ 5k+6, 5k+7, \ldots, 6k+4 & (i = 3k+1, 3k+2, \ldots, 4k-1; \quad j = n) \\ 6k+5, 6k+6, \ldots, 7k+3 & (i = n; \quad j = k+4, k+5, \ldots, 2k+2) \\ 7k+4, 7k+5, \ldots, 8k+2 & (i = k+3, k+4, \ldots, 2k+1; \quad j = 1 \end{array}\right]$$

此時填寫完了外層各邊上的 $\frac{1}{2}$ 個元素, 各邊元素之和都等於

$$(k-1)(8k+13)+15=8k^2+5k+2。$$

2. 令左 (右) 上角與右 (左) 下角對稱的兩元素之和等於 n^2+1, 令每行 (列) 關於本行 (列) 水平 (垂直) 對稱的兩元素之和都等於 n^2+1。

中心部分的構作

按照定理1提供的方法, 構作一個 $4k$ 階增廣幻方 $B=(b_{ij})$, 其元素由 $2n-1, 2n, \ldots, n^2-2n+2$ 所組成, 容易證明 $B=(b_{ij})$ 陣的每行、每列及兩條對角線上諸元素之和爲 $2k(2n-1+n^2-2n+2)=2k(n^2+1)$。我們把 $B=(b_{ij})$ 陣作爲 $A=(a_{ij})$ 陣的中心部分:

$$(b_{ij})=a(i+1,j+1)$$

圖4是利用"分層法"造出的10階幻方。

現在來證明 $A=(a_{ij})$ 是 $4k+2(k>1)$ 階幻方。

由於構成 $A=(a_{ij})$ 陣的元素是由 n^2 個連續自然數 $1,2,\ldots,n^2$ 所組成的, 故只須證明 $A=(a_{ij})$ 陣的每行、每列及兩條對角線上 n 個元素之和都等於幻方的幻和即可。

(i) 外層部分: 由構作方法知, $A=(a_{ij})$ 陣的第1行、第 n 行與第1列、第 n 列上 n 個元素之和都等於 $n(n^2+1)/2$, 故它們各自的元素之和都等於幻方的幻和。

(ii) $A=(a_{ij})$ 陣的第2行至第 $n-1$ 行, 各行中 n 個元素之和爲

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} &= 2k(n^2+1)+n^2+1\\ &=(2k+1)(n^2+1)\\ &=n(n^2+1)/2 \ (i=2,3,\ldots,n-1)\end{aligned}$$

同理可證 $A=(a_{ij})$ 陣的第 $2,3,\ldots,n-1$ 列及兩條對角線上 n 個元素之都等於 $n(n^2+1)/2$。

所以, 利用上述"分層法"造出的 n 階方陣 $A=(a_{ij})$ 是一個 n 階幻方。

參考資料

1. 李儼, 中算史論叢, 科學出版社 (1953)。
2. 梁宗巨, 世界數學史簡編, 遼寧人民出版社 (1980)。
3. 戴文賽, 戴文賽科普創作選集, 科學普及出版社 (1980)。
4. J. Demes and A. D. Keedwell, "Latin Squares and Their Applications," (1974)。
5. 梁培基, 顧同新, 平方幻方與雙重幻方的構造, 數學傳播, 3(1989) 65-69。
6. 梁培基, 顧同新, 多功能組合幻方, 數學傳播, 2(1990) 82-89。
7. 梁培基, 洛書古今談, 自然雜志, 6(1991) 454-457.
8. 梁培基, 張航輔, 張俠輔, 幻方的一種構作方法, 雲南大學學報, 4(1989) 310-319。
9. 林克瀛, 漫談魔方陣, 科學月刊, 三卷, 十期。
10. 林克瀛, 魔方陣的性質, 科學月刊, 十一卷, 十二期。
11. Ku Tung-Hsin and W. D. Wallis. The Development Combinatories, Math. Scientist, 1986, 11, 33-43。
12. 梁培基, 雙重幻方, 數學研究與評論, 2(1982) 14。

—本文作者任教於中國河南省封丘縣科協—