

四個階段的數學

石厚高

民國八十四年一月22日 Times 時報報導，自1990年以來英國劍橋大學已二度降低數學課程的難度，前年(1994)發現大一學生還是覺得課程跟不上，劍大學生一向是英國最優秀的，在A級數學裡可以得成績A的，1990年改革是刪減雙曲線函數與微分方程式以及解析幾何，如今全英國已有近五十所大學把三年學完的數學課程延長至四年，因為學生在學校所學到的日漸減少，許多人必需「補習」才能過關。

名數學家克萊頓 (David Crighton) 於一月聯合四位英國最資深的數學家，向政府提出一封公開信表達他們對英國數學教育的嚴重關切。又根據機械工程學會的調查報告，工程學教授認為他們的學生在和數學有關課程的表現都比十年前差勁，不過官方並不認同，堅持新修訂的全國數學課程能增進學生程度，也能讓更多學生了解基本的算術。世界知名的應用數學及物理系主任克萊頓 (David Crighton) 教授表示，學生花在計算的時間太少，高等數學和音樂一樣必需在早年經常認真的學習技巧，當老師要講某個特殊觀點時，他們常因為沒有正確計算的信心不太理解。

這篇報導發人深省，學生成績低落的原因該文並未深入探討，看看我國數學教育的現況也是有待商榷，多年來很多次聽到同行表示學生數學程度愈來愈差，其實程度可以由兩方面來探討，一方面是教育愈來愈普及，進學校多讀幾年書總是好事；再者高中數學教材內容愈來愈多教材的面也愈來愈廣，備多力分不能每一章節都弄清楚是很正常的現象。後者是本文重點，前者我舉個例子，多年來很多次聽到建中沒落了的呼號，其實沒有這回事，列個表看看

	建中高三學生	台灣人口
民國47年	7班	1000萬
民國84年	33班	2100萬

所以建中並未沒落，84年建中學生不能和47年建中學生比，立足點的不平等又如何比，只能說教育愈來愈普及國民水準愈來愈高是好現象。

有一次校友返校為學弟講解大學情況，有學弟問大學數學有沒有用到中學數學？學長不假思索立即答以大學數學那裡用到中學數學，學弟非常失望，其實用到了。初中畢業生不讀高中能讀大學數學嗎？習慣上我們把

中學學的數學叫作中學數學，大學學的數學叫作大學數學。多年來高三學生都是五月三十一日結業，六月一日至六月三十日很多學生仍然回原教室自修準備大專聯考，有一年某畢業班教室冒起煙來，訓導人員大為緊張前往查看，原來是某位老弟痛恨聯考把課本放在桶裡燒掉洩恨，幸未肇禍。所以我又有了「樣本教材」，從那一年開始我每年都要提醒大家，畢業後數學課本要保存好，因為讀大學還是要用到的。有些公式不記得或證明忘了都要查書，保存起來以備不時之需總是好的，要談中學數學與大學數學的分際倒也饒有趣味

數學是學子夢魘，而三角是夢魘裡的夢魘，反三角函數現行的理科數學已經刪去了，

反三角函數不是不能教而是需要界定教到甚麼程度，民國七十三年前中學生對反三角函數十分感冒。在舊教材時代因為教本沒有把定義域規定清楚，就連老師都不明白，民國五十四年開始實施新教材，東華本第二冊專講三角，反三角函數這一章的教材值得肯定，定義清楚公式不多，可惜編者沒有把六個三角函數的定義域與值域列個表。三角函數是沒有反函數的，若把定義域加以適當限制可以有反函數。在學這一章要弄清楚六個基本三角函數的圖形，找出那些區間是對射 (bijection)，再看定義熟悉定義域與值域，公式就很容易證明又記住了。我把應該教的寫在下面。

反三角函數定義域與值域表

函 數	定 義 域	值 域
\sin^{-1}	$\{x -1 \leq x \leq 1\}$	$\{y -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$
\cos^{-1}	$\{x -1 \leq x \leq 1\}$	$\{y 0 \leq y \leq \pi\}$
\tan^{-1}	$\{x x \in R\}$	$\{y -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\}$
\cot^{-1}	$\{x x \in R\}$	$\{y 0 < y < \pi\}$
\sec^{-1}	$\{x x x \geq 1\}$	$\{y 0 \leq y \leq \pi, y \neq \frac{\pi}{2}\}$
\csc^{-1}	$\{x x x \geq 1\}$	$\{y -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}, y \neq 0\}$

$$(一) \sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

$$\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

$$\sec^{-1} x + \csc^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

(二) $xy < 1$ 時

$$\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1} \frac{x+y}{1-xy}$$

$$xy > 1 \text{ 時 } \tan^{-1} x + \tan^{-1} y$$

$$= \tan^{-1} \frac{x+y}{1-xy} + \pi \quad (x > 0, y > 0)$$

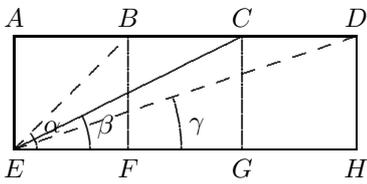
$$\tan^{-1} x + \tan^{-1} y$$

$$= \tan^{-1} \frac{x+y}{1-xy} - \pi \quad (x < 0, y < 0)$$

(一) 中第二個在舊教材時代 \cot^{-1} 的定義域是規定在 $-\frac{\pi}{2} < \cot^{-1} x < \frac{\pi}{2}$ ，所以那時課本上有過這樣的文字。

$x = -1$ 時 $\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$ 是個例外實在讓人笑掉大牙。

平面幾何有個名題，ABFE、BCGF、CDHG 均為正方形



求 $\alpha + \beta + \gamma$

用 (二) 中第一個就比平面幾何作法簡單多了。

$$\begin{aligned} \text{解: } \alpha + \beta + \gamma &= \tan^{-1} 1 + \tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{3} \\ &= \frac{\pi}{4} + \tan^{-1} \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} = \frac{\pi}{4} + \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

三角方程式也刪去了，其實這一章應該講，尤其是滿足六個三角函數方程式的通解公式是應該知道的，它們是 \sin 與 \csc 是

$$n\pi + (-1)^n \alpha, \quad n \in Z \quad (1)$$

\cos 與 \sec 是

$$2n\pi \pm \alpha, \quad n \in Z \quad (2)$$

\tan 與 \cot 是

$$n\pi + \alpha, \quad n \in Z \quad (3)$$

其中

(1) 在 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 時，宜作答 $2n\pi + \frac{\pi}{2}, n \in Z$ (4)

在 $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ 時，宜作答 $2n\pi - \frac{\pi}{2}, n \in Z$

(2) 在 $\alpha = \pi$ 時，宜作答 $(2n+1)\pi$ 或 $(2n-1)\pi, n \in Z$ (5)
不宜答以 $(2n \pm 1)\pi, n \in Z$

在 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 時，宜作答 $n\pi + \frac{\pi}{2}, n \in Z$ (6)

在 $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x, \sec x, \csc x$ 之值為定義域內 \pm 某數時一律答以

$$n\pi \pm \alpha, \quad n \in Z, \alpha \text{ 為滿足方程式之任一角} \quad (7)$$

(4)、(5) 與 (6) 在以 (1)、(2) 與 (3) 作答時，答案有重複。(1)、(2)、(3) 是應該在大學教的大學數學，(4)、(5)、(6)、(7) 是應該在高中教的中學數學。或者把這二章放在高三教，其它的特別角三角函數、複角函數與三角形的性質在高一教也較為合宜。筆者高一讀三角時這些公式課本裡只列出了 (1)、(2)、(3)，民國五十四年實施「新數學」東華本第二冊專講三角也只有 (1)、(2)、(3) 與 (4)，至於 (5)、(6)、(7) 就沒有列出來，談到 (5) 筆者沒有想到，是筆者在學生考卷上發現的！本文把 (1) 至 (7) 完整列出雖然談不上「嘉惠學子」至少是頗有「成就感」的。坊間參考書完全列出 (1) 至 (7) 的筆者尚未見過。

筆者讀高中時 (民國 44 ~ 47) 與以往的歲月中學是不教向量的，自五十四年實施「新數學」後五十六年開始高三學生都要學向量了，找找東華本看看，向量部份並不「恐怖」，七十三年實施第三度革新的教本後，七、八年前已經聽到高一老師抱怨教不完向量，最近一次教學研究會又有老師提出把高一下的向量放在高二上的向量一起教，所以把一下與二上的課本看了一下，原來教材是如此的「豐富」，第二冊第四章「平面向量」佔全書的 $\frac{53}{225}$ ，而第三冊的第一章「空間向量」佔全書的 $\frac{62}{233}$ ，二章合計佔了高一下與高二上四分之一以上的教材，我想教材可以精簡一些，

每年我給應屆畢業生複習向量時，總以下列三篇文章作提綱，講解 (2) 與 (3) 的說明演算過例題，再要學生把 (1) 的題目作一遍，行之有年反應良好，高一、二學生知道這些也就很夠了。

「數播 4」丁村成「法向量及其應用」 (1)

「數播 9」王湘君「向量的內積與應用」 (2)

「數播 12」孟文石「幾個外積應用的例子」(3)

矩陣在中學不宜多教，要教的是定義、加法、減法、矩陣乘以數字、乘法、矩陣乘法之特殊性質、乘法反元素等，至於使用基本列運算同時施之於一方陣和一個同階單位方陣，最後方陣成了單位方陣，而單位方陣就成了原方陣的乘法反元素，這種 equivalent 求反元素的方式還有秩 (rank) 實在不宜在中學教！

數值方法這一章有太多的誤差公式，很讓學生感冒，中學生可以談談數值方法，至於講到甚麼程度，請參閱筆者「高中生應該知道的數值方法」(數播63)。

某老師說大學教授反對高中教微積分，因為中學教了他們就混不下去了，好像沒有這麼嚴重；楊維哲教授在「數播51」寫過「自從有了“高中微積分”的這門課程之後，大一微積分的數學增加了許多困擾」，也有些言過其實。在中學裡數學教學與國文教學是不一樣的，數學要教得少教得正常，國文要教得多教得好。

循環小數化分數本來是小學數學，現在成了初中數學；虛數在初中已不見蹤影成了高中教材。這些改進是數學教育家的卓越貢

獻。前者不宜在小學教，後者不宜在初中教。有一年初三的學生已經畢業了，教育部才規定高中入學考試要考三角，已經畢業的學生又被找回來補講三角，所以從那一年起初三的學生都要學三角了。為甚麼初中學生要學三角，因為有的初中畢業生不再升學，有些概念是不錯的。作作考據，游老師說他在民國五十五年考高中沒考三角，蕭老師六十二年考高中沒考三角，她的妹妹六十五年考高中考了三角，所以高中入學考試要考三角始於民國六十三、六十四或六十五年。

小學數學的中心是九九乘法表，初中數學的中心是小代數與平面幾何，高中數學的中心是代數與解析幾何，大學數學的中心是微積分與線性代數。十幾年前有次去紫微斗數算命，那時還沒有電腦，算命的排命盤很花時間，他的女兒在一旁作數學作業，我看看幾乎全錯了，她不會九九乘法表；忘了在那裡看過古代歐洲只要會背九九乘法表就可以在大學當數學教授了，嘻嘻！那時大學數學教授太差勁了。

民國七十二、三年間建中考選數學資優學生，在一月裡快放寒假時舉行，三個年級一份試題，按成績高低排序高三挑出成績最好的前五十名，一、二與三年級總人數是一百名，其中高二有四十二名高一有八名；猛一看令人駭異，高二和高三那麼接近，高一和高二差那麼多，再一想高二已經學過解析幾何了，一學了解析幾何喜歡數學的學生就有能力自修，並不太需要數學老師了。數學老師想必感受強烈！解析幾何是多麼的強勁。同樣小學生一學了注音符號，就可以自己看故

事書了。田光復在「數播 60」說過「泰勒展式—分析學“HEART”所在」, 真的是一語道破分析學的重點, 我十分喜歡這篇文章, 不過我總覺得意猶未盡, 好像解大便沒有解完, 希望作者再度為文多加詮釋。小學教育的中心“HEART”是注音符號與九九乘法表, 對教育有理念的人士想必都能同意。

國父說「余之謀中國革命, 其所持主義有因襲吾國固有之思想者, 有規撫歐洲之學

說事蹟者, 有吾所獨見而創獲者」, 原來國父思想之來原有三, 筆者此文三種來原其有二, 就是沒有「吾所獨見而創獲者」, 我把它寫下來願與數播讀者共享。紅樓夢談人生有「好了歌」

世人都曉神仙好, 只有金錢忘不了, 終朝只恨聚無多, 及到多時眼閉了... 咱們談數學也應該有階段歌, 希望讀者欣賞。(84.3.19完稿)

四階段數學歌

小學數學是常識	加減乘除九九表	初中數學最基礎	演證代數與幾何
高中數學知多少	代數解幾加三角	大學數學多又繁	擇其善者而用了
春花秋月何時了	數學愈來愈多了	哇哇墜地學數學	進了棺材學不了
子曰一言以蔽之	勤習微積與線代	念不完的怎麼辦	數學系唸就好了

—本文作者任教於建國中學—