自然數次方和之間的關係

曾祥華

在高中二年級下學期上專題研究課程時, 沈昭亮教授曾介紹了如何求級數 $1^k+2^k+\ldots+n^k$ 之和的一個分析方面的方法, 沈教授並提出了下面的問題:「我們知道一次方和與三次方和之間有下面的關係:

$$(1+2+\ldots+n)^2=1^3+2^3+\ldots+n^3$$

> 那麼, 其它的次方和之間是否也有類似的關係? 亦即, 是否還有其它正整數 m、n、k 使下面的關係式:
>
> $$C\sum_{i=1}^{P} i^m=(\sum_{i=1}^{P} i^n)^k \qquad (*)$$
>
> 對所有正整數 P 均成立? 其中 C 爲一常數。」

本文將對此問題給出解答。

首先, 我們要介紹 Bernoulli 多項式 $B_k(x)$, 它由下式定義:

> $B_k(x)$ 是一個 K 次多項式, $\int_x^{x+1} B_K(t)dt=x^K$。

由 $B_K(x)$ 的定義得知

$$\int_1^{n+1} B_k(t)dt=1^k+2^k+\ldots+n^k。$$

有關Bernoulli 多項式的其它相關性質詳見參考資料。

利用上面的性質, 加上多項式恆等定理, 我們可將關係式 $(*)$ 改寫成下面形式:

$$C\int_1^x B_m(t)dt=(\int_1^x B_n(t)dt)^k \qquad (1)$$

上式對所有的實數 x 皆成立。

再由

$$\int_a^x B_n(t)dt=\frac{1}{n+1}(B_{n+1}(x)-B_{n+1}(a))$$

得

$$\frac{C}{m+1}(B_{m+1}(x)-B_{m+1}) =\frac{1}{(n+1)^k}(B_{n+1}(x)-B_{n+1})^k \quad (2)$$

其中 $B_j=B_j(0)$ 爲 Bernoulli 數, 且 $B_j(0)=B_j(1), j\geq 2$, 因 $B_j(x)$ 的領導係數爲1, 所以由 (1) 可得

$$C=\frac{m+1}{(n+1)^k}$$

因此可進一步改寫 (2) 式如下:

$$B_{m+1}(x)-B_{m+1}=(B_{n+1}(x)-B_{n+1})^k \quad (3)$$

因 $B_{2t+1}=0, B_{2t}\neq 0, t\in\mathbf{N}$, 且有下面性質:

$$B_j(x)=\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}B_ix^{j-i}$$

故有下面的預備定理:

預備定理: $B_{2t+1}(x)-B_{2t+1}=0$ 有一根爲 0, 其重覆度爲 1;

$B_{2t+2}(x)-B_{2t+2}=0$ 有一根爲 0, 其重覆度爲 2, 其中 $t\in\mathbf{N}$

證明: 0顯然爲兩式之根。$B_{2t+1}(x)-B_{2t+1}$ 的一次項係數爲 $\binom{2t+1}{2t}B_{2t}\neq 0$, 所以其重覆度爲 1, 同理, $B_{2t+2}(x)-B_{2t+2}$ 的一次項係數爲 $\binom{2t+2}{2t+1}B_{2t+1}$, 因 $B_{2t+1}=0$, 故 0 的重覆度爲 2。

注意到, $B_2(0)-B_2=0$, 而對多項式 $B_2(x)-B_2$ 而言, 0的重覆度爲 1。

在 (3) 式中, 由兩邊的次數可得下式:

$$m+1=k(n+1) \tag{4}$$

因 $k=1$ 無意義, 故可設 $k\geq 2$, 且兩邊對 0 的重覆度相等, 無論 $B_{n+1}(x)-B_{n+1}=0$ 對 0 的重覆度爲多少, k 總小於或等於 2, 所以我們有下面的定理:

定理 1: 若 (3) 式有解, 則 K 必爲 2。

利用定理 1 改寫 (4) 式得:

$$m+1=2(n+1) \tag{5}$$

上式中, 若 $n=1$, 則 $m=3$, 設有 $n>1$, $m\in\mathbf{N}$ 使 (3) 式成立, 注意到因 0 必爲 $B_{m+1}(x)-B_{m+1}$ 的 2 重根, 所以 $n+1$ 必爲奇數, 設有 $n+1=2p+1$, $p\in\mathbf{N}$, 可得:

$$\begin{cases} n=2p \\ m=4p+1 \end{cases} \quad \text{其中} p\in\mathbf{N} \tag{6}$$

將定理 1、(6) 及 Bernoulli 多項式的一般表達式代入 (3) 式, 則我們得到:

$$\sum_{i=0}^{4p+1}\binom{4p+2}{i}B_ix^{4p+2-i} =\Big(\sum_{j=0}^{2p}\binom{2p+1}{j}B_jx^{2p+1-j}\Big)^2 \tag{7}$$

比較上式 x^{4p} 的係數可得:

$$\begin{aligned}
&\binom{4p+2}{2}B_2 \\
&=2\binom{2p+1}{0}\binom{2p+1}{2}B_0B_2 \\
&\quad+\binom{2p+1}{1}^2B_1^2 \\
\Leftrightarrow\ &\frac{(4p+2)(4p+1)}{2}\cdot\frac{1}{6} \\
&=2\cdot\frac{2p(2p+1)}{2}\cdot\frac{1}{6}+(2p+1)^2\cdot\frac{1}{4} \\
\Leftrightarrow\ &4p^2+4p+1=0 \\
\Leftrightarrow\ &p=\frac{-1}{2},\frac{-1}{2}
\end{aligned}$$

此與 $p\in\mathbf{N}$ 牴觸。

從而我們得到下面的定理:

定理 2: 式 $(*)$ 除了 $(m,n,k,c)=(3,1,2,1)$ 外無其它解。

式 $(*)$ 還可推廣成下面的問題:

「是否存在正整數 $m,k_1,k_2,\ldots,k_n$ 與一正數 C 使下式成立:

$$C\cdot\sum_{i=1}^{M}i^m=\prod_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{M}i^{k_j}\Big) \tag{$*$}'$$

其中 M 爲任意正整數。」

類似定理1的討論, 我們可知 $n=2$, 因此, $(*)'$ 可改爲:

$$C\cdot\sum_{i=1}^{M} i^m=\sum_{i=1}^{M} i^{k_1}\sum_{i=1}^{M} i^{k_2} \qquad (8)$$

同樣的, 若使 (8) 式成立的 k_1、k_2、m 存在, 且 $k_j\neq 1$, $j=1,2$, 則必有下面的關係:

$$\begin{cases} k_1=2t \\ k_2=2s & \text{其中} t、s\in\mathbf{N} \\ m=2(t+s)+1 \end{cases} \qquad (9)$$

將 (8) 式改爲下面形式:

$$\begin{aligned}&\frac{C}{m+1}(B_{m+1}(x)-B_{m+1})\\ &=\frac{(B_{k_1}(x)-B_{k_1})(B_{k_2}(x)-B_{k_2})}{(k_1+1)(k_2+1)}\end{aligned} \qquad (10)$$

由上式等號兩端領導係數的相等立刻得到:

$$C=\frac{m+1}{(k_1+1)(k_2+1)} \qquad (11)$$

再將 (10) 式改爲下面形式:

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{2(t+s)+1}\binom{2(t+s+1)}{i}B_i x^{2(t+s+1)-i}\\ &=\Big[\sum_{i=0}^{2s}\binom{2s+1}{i}B_i x^{2s+1-i}\Big]\\ &\quad\Big[\sum_{j=0}^{2}t\binom{2t+1}{j}B_j x^{2t+1-j}\Big]\end{aligned} \qquad (12)$$

比較 $x^{2(t+s)}$ 的係數得:

$$\begin{aligned}&\binom{2(t+s+1)}{2}B_2\\ &=\binom{2s+1}{0}\binom{2t+1}{2}B_0B_2\\ &\quad+\binom{2s+1}{2}\binom{2t+1}{0}B_2B_0\\ &\quad+\binom{2t+1}{1}\binom{2s+1}{1}B_1^2\\ &\Leftrightarrow(2t+1)(2s+1)=0\end{aligned}$$

此與 t、$s\in\mathbf{N}$ 抵觸。

故得下面定理:

定理3: 除了 $m=3$, $n=2$, $k_1=k_2=1$ 外, $(*)'$ 無正整數解。

除了式 $(*)'$ 外, $(*)$ 亦可推廣如下: 「是否存在正數 C, 正整數 u,v, $m_1,m_2,\ldots,m_u$, $k_1,\ldots,k_u$, $n_1,\ldots,n_v$, $p_1,\ldots,p_v$ 使下式成立:

$$C\cdot\prod_{j=1}^{u}(\sum_{i=1}^{t} i^{m_j})^{kj}=\prod_{k=1}^{v}(\sum_{i=1}^{t} i^{n_k})^{p_k} \qquad (*)''$$

其中 t 爲任意正整數。」

我們尚未得出 $(*)''$ 的解。

感謝清華大學沈昭亮教授的建議與鼓勵。

參考資料

1. 王竹西、郭敦人: 特殊函數概論, 凡異出版社。
2. 沈昭亮: “數學漫談”講義, 國立清華大學數學系 (未出版)

—本文作者就讀於科學園區實驗高中—