也談二次曲線

康明昌

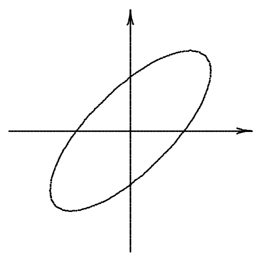
一. 前言

考慮實係數二元二次方程式

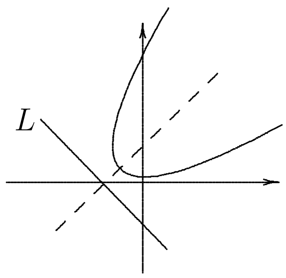
$$f(x,y)=Ax^2+Bxy+cy^2+Dx+Ey+F=0$$

是實係數二元二次方程式。當 $f(x,y)=0$ 的 xy 項係數如果不爲零時, 其圖形不是很容易瞭解的; 這時, 需要經過移軸和轉軸的變換, 才能把這個二次方程式化爲標準式。

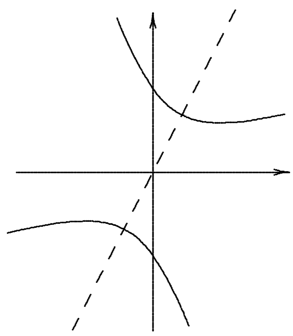
如果我們的目的並不是相當精確的描繪二次方程式的圖形, 而只是想判斷這個圖形究竟是雙曲線還是橢圓, 或者是其他圖形, 除了移軸和轉軸的方法, 我們還可利用常見的不變量的判定法。另一個方法是利用以下的一個簡單的事實: 不管我們如何轉軸和移軸, 橢圓的圖形永遠落在有限的區域 (也就是, 存在正數 a 與 b 使得 $f(x,y)=0$ 圖形上的任意點 (x_0,y_0) 恆滿足 $|x_0|\le a$ 且 $|y_0|\le b|$); 同樣的, 抛物線與雙曲線的圖形都不會落在有限區域, 但是抛物線會落在某個半平面上, 而雙曲線永遠不會落在某個半平面上 (如圖 1):



橢圓落在有限區域上。



抛物線落在直線 L 所決定的半平面。



雙曲線是眞正沒有界限的曲線。

圖 1

利用這個事實, 吳建生先生在“二次曲線新解”(本刊同卷) 提出一種判定二次方程式圖形的方法。

本文的目的是提出另外一種方法來判定二次方程式的圖形。

二. 主要結果

在討論實係數二次方程式

$$f(x,y)=Ax^2+Bxy+cy^2+Dx+Ey+F=0, \tag{1}$$

我們不妨假設它的圖型不是空集合 (註1)。

在作了以上的假設之後, 大家都知道 $f(x,y)=0$ 的圖形不是退化曲線 (也就是, 它是圓、橢圓、拋物線或雙曲線) 的充分必要條件是

$$\Delta := \begin{vmatrix} 2A & B & d \\ B & 2C & E \\ D & E & 2F \end{vmatrix} \neq 0\text{。(註2)}$$

因此, 我們從現在開始就假設 $f(x,y)=0$ 的圖形是圓、橢圓、拋物線、雙曲線之中的一種。

先回憶一下轉軸的公式。如果我們把坐標軸旋轉 θ 角度, 則同一個點 P 的舊坐標 (x,y) 與新坐標 (x',y') 有什麼關係呢?

請看圖2,

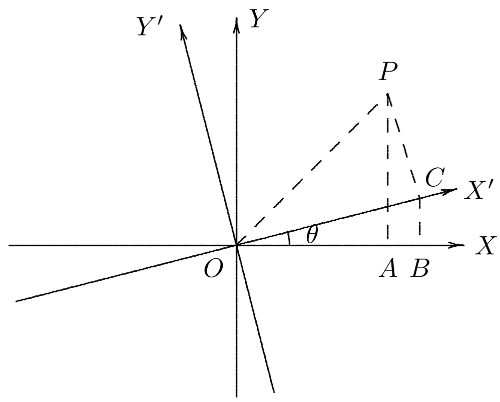


圖 2

設$PC\perp X'$軸, $PA\perp X$軸, $CB\perp X$軸。則 $\angle CPA=\angle AOC=\theta$, 且 $x=\overline{OA}$, $x'=\overline{OC}$, $y'=\overline{PC}$。

很容易可導出 $x=\overline{OA}=\overline{OB}-\overline{AB}=x'\cos\theta-y'\sin\theta$。同理可證明

$$y=x'\sin\theta-y'\cos\theta\text{。}$$

簡單的說, 我們把變數 x 與 y 變成 x' 與 y' 的關係是

$$\begin{cases} x=ax'+by' \\ y=cx'+dy' \end{cases} \tag{2}$$

其中 a, b, c, d 是滿足以下關係的實數:

$$\begin{cases} a^2+c^2=b^2+d^2=a^2+b^2 \\ \qquad =c^2+d^2=1, \\ ab+cd=ac+bd=0\text{。} \end{cases}$$

當我們把 (2) 式代入 (1) 式, 得

$$\begin{aligned} g(x',y') &= f(ax'+by',cx'+dy') \\ &= A'x'^2+B'x'y'+C'y'^2 \\ &\quad +D'x'+E'y'+F'\text{。} \end{aligned}$$

很容易可以檢查出來,

$$A=C \text{ 且 } B=0$$
$$\Leftrightarrow A'=C' \text{ 且 } B'=0。$$

因此, 如果 $f(x,y)=0$ 的圖形是個圓, 即使我們沒有作轉軸的變數變換, 我們仍然可以一眼看出它究竟是不是個圓。換另一種說法, 也就是, 在任何坐標系統下, 圓仍然是個圓。這就是以下的定理1,

定理1: 如果二次方程式 $f(x,y)=0$ 的圖形不是空集合, 也不是退化曲線, 則它的圖形是圓的充分必要條件是 $A=C$ 且 $B=0$。

定理2: 如果二次方程式 $f(x,y)=0$ 的圖形不是空集合, 也不是退化曲線, 則

(i) 當 $Ax^2+Bxy+cy^2$ 可分解成兩個相異的一次因式乘積時, $f(x,y)=0$ 的圖形是雙曲線;

(ii) 當 $Ax^2+Bxy+cy^2=\gamma(\alpha x+\beta y)^2$ 時 (α、β、γ 都是實數), $f(x,y)=0$ 的圖形是拋物線;

(iii) 當 $Ax^2+Bxy+cy^2$ 不可分解時, $f(x,y)=0$ 的圖形是橢圓。(我們把圓看成橢圓的一種。)

證明: 令 $\varphi(x,y):=Ax^2+Bxy+Cy^2$, $\psi(x',y'):=\varphi(ax'+by',cx'+dy')$。很容易可以檢查,

> $\varphi(x,y)$ 可分解 $\Leftrightarrow \psi(x',y')$ 可分解,
>
> $\varphi(x,y)$ 可分解成相異之一次因式乘積 $\Leftrightarrow$ $\psi(x',y')$ 可分解成相異之一次因式乘積 。

因此, 當 $g(x',y'):=f(ax'+by',cx'+dy')$ 變成標準型 $g(x',y')=A'x'^2+C'y'^2+D'c+E'y+F'$ 時, 因爲 $g(x',y')=0$ 只可能是雙曲線、拋物線與橢圓中的一種 (根據 $f(x,y)=0$ 的假設), 可知:

(i) 當 $g(x',y')=0$ 是雙曲線時, $A'C'<0$, 故 $\psi(x',y')=A'x'^2+C'y'^2$ 可分解成兩個相異的一次因式的乘積;

(ii) 當 $g(x',y')=0$ 是拋物線時, $A'=0$ 或 $C'=0$, 故 $\psi(x',y')=A'x'^2$ 或 $C'y'^2$;

(iii) 當 $g(x',y')=0$ 是橢圓時, $A'C'>0$, 故 $\psi(x',y')=A'x'^2+C'y^2$ 不可分解。

證明完畢。

例題1: $f(x,y)=x^2+xy+y^2+x+y=0$。

因爲 $f(0,0)=f(0,-1)=0$, 故 $f(x,y)=0$ 的圖形不是空集合。

因爲

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-2\neq 0,$$

故 $f(x,y)=0$ 不是退化曲線。

利用定理2, 因爲 x^2+xy+y^2 不可分解 ($\Leftrightarrow u^2+u+1=0$ 沒有實根), 故 $f(x,y)=0$ 的圖形是橢圓。利用定理1, 這個橢圓不是圓。

例題2: $f(x,y)=x^2+xy-2y^2+x+y=0$。

很容易檢查 $f(x,y)=0$ 的圖形不是空集合, 也不是退化曲線。

利用定理2, 因爲

$$x^2+xy-2y^2=(x-y)(x+2y)$$

($\Leftrightarrow u^2+u-2=0$ 的二根是 1 或 -2), 故 $f(x,y)=0$ 代表雙曲線。

例題3: $f(x,y)=x^2-4xy+4y^2-y-1=0$。

$f(x,y)=0$ 的圖形不是空集合, 也不是退化曲線。因爲 $x^2-4xy+4y^2=(x-2y)^2$, 故 $f(x,y)=0$ 代表一個拋物線。

三. 討論

定理2的基本精神, 如果從射影機幾何的觀點來看, 就變得非常直觀。在本節的說明中, 我們假設讀者知道射影平面的定義。

我們把歐氏平面的點 $P(x,y)$ 放在實射影平面。設射影平面上的齊次坐標爲 $(x:y:z)$, 歐氏平面上點 (x,y) 的齊次坐標爲 $(x:y:1)$。$z=0$ 就是所謂的無窮遠線 (the line at infinity)。

歐氏平面上的二次曲線 $f(x,y)=Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 在實射影平面的閉包 (Zariski closure) 是二次射影曲線 $F(x,y,z)=Ax^2+Bxy+Cy^2+Dxz+Eyz+Fxy=0$。定理2可敘述如下:

定理 2$'$: 設 A, B, C, D, E, F 都是實數且 $f(x,y)=0$ 的圖形含有一個實數點, 並且 $f(x,y)=0$ 不是退化曲線, 則

(i) 當 $F(x,y,z)=0$ 與 $z=0$ 如果有兩個相異實交點, 則 $f(x,y)=0$ 代表雙曲線;

(ii) 當 $F(x,y,z)=0$ 與 $z=0$ 如果有一個重數爲 2 的實交點, 則 $f(x,y)=0$ 代表拋物線;

(iii) 當 $F(x,y,z)=0$ 與 $z=0$ 沒有實交點, 則 $f(x,y,z)=0$ 代表橢圓。

註釋:

註1: $f(x,y)=0$ 的圖形是空集合的充分必要條件是 $f(x,y,z)$ 或 $-f(x,y,z)$ 可寫成 $L_1^2+L_2^2+L_3^2$, 其中 $L_i:=a_ix+b_iy+c_i$ (a_i, b_i, c_i 是實數) 且直線 $L_1=L_2=L_3=0$ 沒有交點。

註2: 利用配方法, $f(x,y)$ 可寫成

$$\alpha_1L_1^2+\alpha_2L_2^2+\alpha_3L_3^2$$

其中 $L_i=a_ix+b_iy+c_i$ (a_i, b_i, c_i, α_i 都是實數)。由此可證明 $f(x,y)$ 可分解成兩個複係數的一次因式的乘積的充分必要條件是 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3=0$, 因此可導出 $\Delta=0$

—本文作者任教於台大數學系—