二次曲線新解

吳建生

一. 研究動機與目的:

高中基礎數學第三冊第四章表明二元二次方程式的圖形統稱為二次曲線, 而它總共可分為九種如下:

$$\begin{cases} \text{非退化: 圓、橢圓、拋物線、雙曲線} \\ \text{退　化: 平行兩直線、相交兩直線、} \\ \qquad\qquad \text{一直線、一點、}\varnothing \end{cases}$$

課文內容所討論的二元二次方程式通常不帶 xy 項, 少部分帶 xy 項者都是退化的二次曲線, 敍述並不詳盡, 激發我們對帶有 xy 項的二元二次方程式之研究興趣。事實上帶 xy 項的二次曲線方程式必須牽涉不變量, 固有值、座標軸旋轉等, 這些內容目前並不屬於課本的學習範圍。因此, 我們運用曾學過的基本觀念和方法, 歸納整理出另一套任意二元二次方程式圖形的判別法, 使之更為完備、實用。

二. 研究過程與方法:

(一) 先介紹課外參考資料的判別方法:

在 $f(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$,

令 $\Delta = \begin{vmatrix} 2A & B & D \\ B & 2C & E \\ D & E & 2F \end{vmatrix}$, $\delta = B^2 - 4AC$。

	$\delta > 0$	$\delta = 0$	$\delta < 0$
$\Delta \neq 0$	雙曲線	拋物線	$A\Delta < 0$ 時為橢圓或圓 $A\Delta > 0$ 時為 $\varnothing$
$\Delta = 0$	兩相交直線	兩平行線、一直線、或$\varnothing$	一點

(二) 我們的思考流程:

令二元二次方程式

$$f(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F \quad (A^2+B^2+C^2 \neq 0)$$

$$= Ax^2 + (By + D)x + (Cy^2 + Ey + F) = 0$$

I. 若 $A \neq 0$ 則 $X = \frac{-(By+D)\pm\sqrt{W}}{2A}$, 其中

$$W = (By+D)^2 - 4A(Cy^2+Ey+F)$$

$= A'y^2 + B'y + C'$

爲確保 x 有實數解, 則 $W \geq 0 \Rightarrow A'y^2 + B'y + C' \geq 0$。若 x 無實數解, 則 $W < 0 \Rightarrow A'y^2 + B'y + C' < 0$。

其分析之流程:

$$\begin{cases} A'=0 \begin{cases} B'=0 \begin{cases} C'>0 \\ C'=0 \\ C'<0 \end{cases} \\ B'\neq 0 \end{cases} \\ A'>0 \begin{cases} W=(ay+b)^2 \\ W=(ay+b)^2+k \begin{cases} k>0 \\ k<0 \end{cases} \end{cases} \\ A'<0 \begin{cases} W=-(ay+b)^2 \\ W=-(ay+b)^2+k \begin{cases} k>0 \\ k<0 \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

II. 若 $C \neq 0$, 方法與 I 類似, 所差別的是 $A'y^2+B'y+C' \geq 0$ 要換成 $A'x^2+B'x+C' \geq 0$。

PS:1. 因兩者類似, 往後只討論 I 的情況, 而 II 的情況同理可推。

2. 若 $A \neq 0$, $C \neq 0$, 則 I 與 II 兩者可擇其一。

III. 若 $A=C=0$, 則 $B \neq 0$,

故 $f(x,y)=Bxy+Dx+Ey+F=0$。

(三) 詳細說明

I. $A \neq 0$

就 $W=A'y^2+B'y+C' \geq 0$ 做討論:

1. $A' = 0$

[1] $B' = 0$

(1) $C' > 0$

$\Rightarrow x = \frac{-(By+D)\pm\sqrt{C'}}{2A}$

$\Rightarrow 2Ax + By + D \pm \sqrt{C'} = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2Ax+By+D+\sqrt{C'} = 0 \\ 2Ax+By+D-\sqrt{C'} = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ 斜率皆爲 $-\frac{2A}{B}$

$\therefore$ 表平行兩直線。

(2) $C' = 0$

$\Rightarrow x = \frac{-(By+D)\pm 0}{2A}$

$\Rightarrow 2Ax + By + D \pm 0 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2Ax+By+D=0 \\ 2Ax+By+D=0 \end{cases}$$

$\therefore$ 表斜率爲 $-\frac{2A}{B}$ 的一直線

(3) $C' < 0$

$\Rightarrow W < 0 \Rightarrow x$ 無實數解 $\therefore$ 表 $\varnothing$。

[2] $B' = 0$

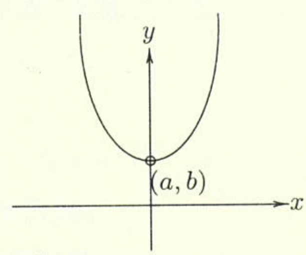
$\Rightarrow x = \frac{-(By+D)\pm\sqrt{B'y+C'}}{2A}$

$\because W \geq 0 \Rightarrow B'y + C' \geq 0$

$\Rightarrow y \geq -\frac{C'}{B'}$

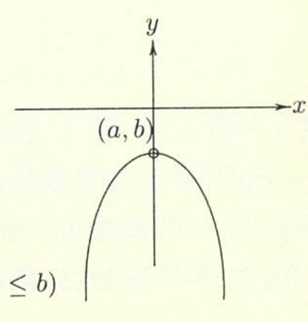
$\therefore$ 當 y 的範圍爲射線時, x 有實數解, 由圖例及其方程式 $(x-a)^2 = 4C(y-b)$ 可知, 符合此一條件者爲拋物線 (其他八種都不可能)

$C > 0$



$(y \geq b)$

$C < 0$



$(y \leq b)$

2. $A' > 0$

[1] $W = (ay+b)^2 \quad (a^2 = A')$

$\Rightarrow x = \frac{-(By+D)\pm\sqrt{(ay+b)^2}}{2A}$

$\Rightarrow 2Ax + By + D \pm (ay+b) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2Ax+(B+a)y+(D+b)=0 \\ \quad \Rightarrow \text{斜率}= \frac{-2A}{B+a} \\ 2Ax+(B-a)y+(D-b)=0 \\ \quad \Rightarrow \text{斜率}= \frac{-2A}{B-a} \end{cases}$$

$\therefore$ 表相交兩直線

[2] $W = (ay+b)^2 + k$

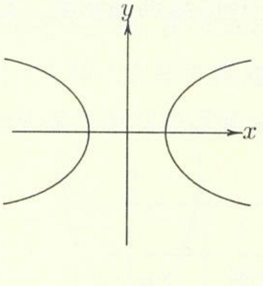
(1) $k > 0$

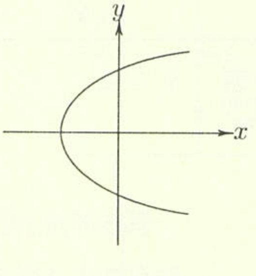
$\Rightarrow$ 恆 $W = (ay+b)^2 + k \geq 0$

$\Rightarrow y \in R$

當 $y \in R$ 時, x 有實數解, 由圖例及其方程式, 可知符合此一條件者只有拋物線和雙曲線

圖例:





方程式 : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 方程式: $y^2 = 4C(x-h)C > 0$, 但就拋物線定義, 設一定點 $F(a,b)$, 一定直線 $L: cx+dy+e = 0 (d \neq 0)$, 且 F 不在 L 上, 則包含 L 和 F 的平面上, 至 F 和 L 等距離的所有點所成的軌跡爲拋物線。依定義設方程式爲:

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = \frac{|cx+dy+e|}{\sqrt{c^2+d^2}}$$

$$\Rightarrow (c^2+d^2)(x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2)$$
$$= (cx+dy+e)^2$$
$$\Rightarrow d^2x^2 + (-2cd)xy + c^2y^2$$
$$+(-2ac^2 - 2ad^2 - 2ce)x$$
$$+(-2bc^2 - 2bd^2 - 2de)y$$
$$+(c^2+d^2)(a^2+b^2) - e^2$$
$$\Rightarrow d^2x^2 - (2cdy + 2ac^2 + 2ad^2 + 2ce)x$$
$$+[c^2y^2 - (2bc^2 + 2bd^2 + 2de)y$$
$$+(c^2+d^2)(a^2+b^2) - e^2]$$

判別式D

$$= (2cdy + 2ac^2 + 2ad^2 + 2ce)^2$$
$$-4d^2[c^2y^2 - (2bc^2 + 2bd^2 + 2de^2)y$$
$$+(c^2+d^2)(a^2+b^2) - e^2]$$

故得 y^2 之係數 $A' = 4c^2d^2 - 4c^2d^2 = 0$, 因此 $A' > 0, W = (ay+b)^2 + k (k > 0)$ 表雙曲線。

(2) $k < 0$

$\Rightarrow W = (ay+b)^2 + k \geq 0$

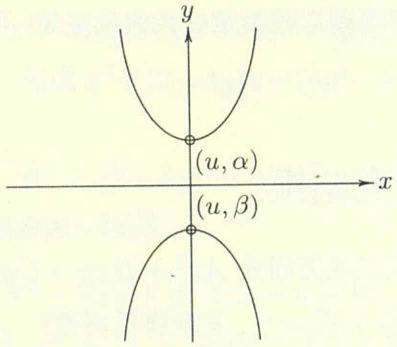
$\Rightarrow (ay+b)^2 - (-k) \geq 0$

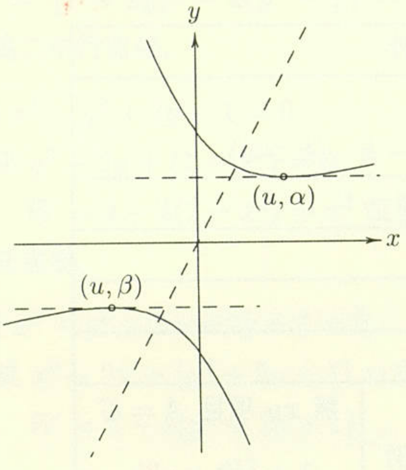
$\Rightarrow (ay+b+\sqrt{-k})(ay+b-\sqrt{-k}) \geq 0$

$\Rightarrow y \geq \frac{b+\sqrt{-k}}{a}$ or $y \leq \frac{b-\sqrt{-k}}{a}$

$\therefore$ 當 $y \geq \alpha$ 或 $y \leq \beta (\alpha > \beta)$ 時, x 有實數解。由圖例可知, 符合此一條件者只有雙曲線。

圖例:





3. $A' < 0$

[1] $W = -(ay+b)^2 \quad (-a^2 = A')$

$\because W \geq 0 \Rightarrow W = -(ay+b)^2 = 0$

$$\begin{cases} y = -\frac{b}{a} \\ x = \frac{Bb-Da}{2Aa} \end{cases}$$

$\therefore$ 表一點 $(\frac{Bb-Da}{2Aa}, -\frac{b}{a})$

[2] $W = -(ay+b)^2 + k$

(1) $k > 0$

$\Rightarrow W = -(ay+b)^2 + k \geq 0$

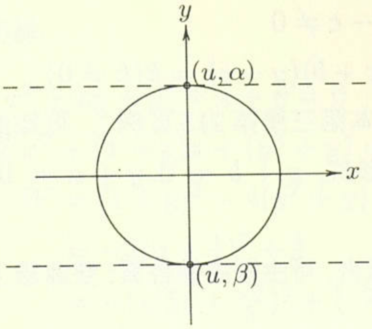
$\Rightarrow (ay+b)^2 - k \leq 0$

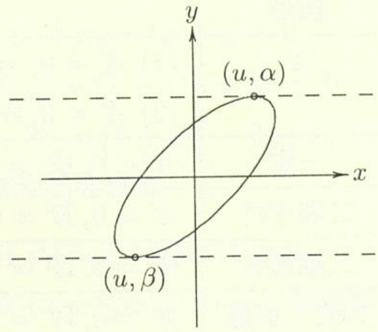
$\Rightarrow (ay+b+\sqrt{k})(ay+b-\sqrt{k}) \leq 0$

$\Rightarrow \frac{b-\sqrt{k}}{a} \leq y \leq \frac{b+\sqrt{k}}{a}$

$\therefore$ 當 $\beta \leq y \leq \alpha(\alpha > \beta)$ 時, x 有實數解, 由圖例知符合此條件者只有圓和橢圓。

圖例:





至於圓和橢圓如何區分? 這在課本第三冊中已學過, 可回頭由方程式 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ 判別若無 xy 項且 $A = C$則爲圓, 若有 xy 項或 $A \neq C$ 則爲橢圓。

(2)$k < 0$

$\Rightarrow W = -(ay+b)^2 - k < 0$

$\Rightarrow x$ 無實數解

$\therefore$ 表 $\varnothing$ (無軌跡)

II.$C \neq 0$, 同理可推。

III. $A = C = 0$

$Bxy + Dx + Ey + F = 0$

爲說明之便, 令爲 $xy + by + c = 0$

$\Rightarrow (x+b)(y+a) = ab - c$

1.$ab - c = 0$

$\Rightarrow (x+b)(y+a) = 0$

$\Rightarrow$ 表相交兩直線

$2.ab-c\neq 0$

$\Rightarrow (x+b)(y+a)=k(k\neq 0)$

由課本第三冊第213頁例7, 可知此爲雙曲線之形式, $x+b=0, y+a=0$ 爲其漸近線。

ps: 若要嚴密, 可由雙曲線性質: 雙曲線上任一點至其兩漸近線距離之乘積爲定値, 可證明。

三. 研究結果:

二元二次方程式 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, 其軌跡爲何種?

<table>
<tr><th>圖形</th><th colspan="2">條　　件</th></tr>
<tr><td>$\varnothing$</td><td colspan="2">(1) $A'=0,\ B'=0,\ C'<0$
(2) $A'<0, W=-(ay+b)^2-k \quad (k>0)$</td></tr>
<tr><td>一點</td><td colspan="2">$A'<0, W=-(ay+b)^2$</td></tr>
<tr><td>二線平行</td><td colspan="2">$A'=0, B'=0, C'>0$</td></tr>
<tr><td>二線重合</td><td colspan="2">$A'=0, B'=0, C'=0$</td></tr>
<tr><td>相交二直線</td><td colspan="2">$A'>0, W=(ay+b)^2$</td></tr>
<tr><td>圓</td><td rowspan="2">$A'<0$
$W=-(ay+b)^2+k \quad (k>0)$</td><td>無 xy 項且 $A=C$</td></tr>
<tr><td>橢圓</td><td>有 xy 項或 $A\neq C$</td></tr>
<tr><td>抛物線</td><td colspan="2">$A'=0, B'\neq 0, W=B'y+C'$</td></tr>
<tr><td>雙曲線</td><td colspan="2">$A'>0, W=(ay+b)^2+k$</td></tr>
</table>

I. 若 $A\neq 0$, 則 $x=\frac{-(By+D)\pm\sqrt{W}}{2A}$,

$W=A'y^2+B'y+C'$ 其歸類如上表。

II. 若 $C\neq 0$, 同理可推。PS: 即把 x 與 y 的角色對調。

III. 若 $A=C=0$, 則 $B\neq 0$。

可化成 $(x+b)(y+a)=ab-c$

圖形	條　件
相交兩直線	$ab-c=0$
雙曲線	$ab-c\neq 0$

四. 舉例說明:

(1) $2x^2+2xy+y^2+2x+2y+2=0$

化成 $2x^2+(2y+2)x+(y^2+2y+2)=0$

$$W=(2y+2)^2-8(y^2+2y+2)$$
$$=-4(y+1)^2-8$$

故圖形爲 $\varnothing$ 即無軌跡。

(2) $x^2+2xy+2y^2-2x-2y+1=0$

化成 $2y^2+(2x-2)y+(x^2-2x+1)=0$

$$W=(2x+2)^2-8(x^2-2x+1)$$
$$=-4(x-1)^2$$ 故圖形爲一點。

(3) $x^2-4xy+4y^2+2x-4y+1=0$

化成 $x^2+(2-4y)x+(4y^2-4y+1)=0$

$W=(2-4y)^2-4(4y^2-4y+1)=0$ 故圖形爲一直線。

(4) $x^2-2xy+y^2+x-y=0$

化成 $x^2+(1-2y)x+(y^2-y)=0$ $W=(1-2y)^2-4(y^2-y)=1$ 故圖形爲二平行直線。

(5) $x^2-y^2+2y-1=0$

化成 $y^2-2y+(1-x^2)=0$

$W=4-4(1-x^2)=x^2$ 故圖形爲兩相交直線。

(6) $x^2-y^2-2x+2y+1=0$

化成 $x^2-2x+(y^2+2y+1)=0$

$$W=4-4(y^2+2y+1)$$
$$=-(2y+2)^2+4$$

又 $A=C$ 且無 xy 項, 故圖形爲圓。

(7) $x^2+2x+y+1=0$

化成 $x^2+2x+(y+1)=0$

$W=4-4(y+1)=-4y$ 故圖形爲拋物線。

(8) $x^2+xy+y^2+x+y=0$

化成 $x^2+(1+y)x+(y^2+y)=0$

$$W=(1+y)^2-4(y^2+y)$$
$$=-3(y+\tfrac{1}{3})^2+\tfrac{4}{3}$$
$$=-(\sqrt{3}y+\tfrac{\sqrt{3}}{3})^2+\tfrac{4}{3}$$ 又有 xy 項, 故圖形爲橢圓。

(9) $y^2+xy+2x+y=0$

化成 $y^2+(1+x)y+2x=0$

$W=(1+x)^2-8x=(x-3)^2-8x$ 故圖形爲雙曲線。

(10) $xy+x+2y+1=0$

化成 $(x+2)(y+1)=1$ 故圖形爲雙曲線。

(11) $2xy-4x+y-2=0$

化成 $(2x+1)(y-2)=0$ 故圖形爲兩相交直線

—本文作者任教於高雄女中—