

關於“問題解決”的再思考

鄭毓信

“問題解決”是美國數學教育界在八十年代的主要口號，即是認為應當以“問題解決”作為學校數學教育的中心，這一思想在八十年代後期興起的美國新的數學教育改革運動中又得到了進一步的確認，從而就在更大規模上得到了實踐。這種教育實踐即就構成了本文的直接基礎；另外，本文在總體上則又可以說是對於“問題解決”這一口號的一個自覺反思。

具體地說：在先前的一篇文章『問題解決』與數學教育』（載「數學傳播」，十七卷第四期，1993年12月）中筆者曾集中地對這一口號的合理性進行了分析，即認為對於“問題解決”的強調正是數學觀的現代演變和數學教育研究深入發展的直接產物，同時也集中地體現了數學教育的時代特徵。筆者現今仍然認為這一基本觀點是正確的；但是，我們又可從一些新的角度提出一些更為深入的問題，從而進一步深化我們的認識，並以直接指導有關的教學實踐活動。

一．“問題解決”與“問題提出”

數學觀的現代演變，也即由靜態的數學觀向動態的數學觀的轉變，無疑有著十分重要的教育涵義，特別是，這清楚地表明了，在數學教學中我們不應唯一地強調數學活動的最終產物，而應更為注意數學活動本身；但是，作為進一步的思考，我們在此又可提出這樣的問題：所說的數學活動是否就“等同於”“問題解決”，也即是否就是指如何綜合地、創造性地應用各種數學知識去解決那種並非單純練習題式的問題（包括實際問題和源於數學內部的問題）？

儘管後一立場在許多關於新的數學教育改革運動的指導性文件中都得到了肯定，例如，這就正如美國數學教師全國委員會（NCTM）所特設的關於學校數學課程標準的專門委員會的主席倫伯格（T. Romberg）所指出的，在「行動的議程」（An Agenda for Action, NCTM, 1980）和「學校數學課程和評估的標準」（Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, NCTM, 1989）及其它一些文件中，“問題解決突出地被看成是數學家的主要活動”（[1]，第294頁）；但是，如果就實際數學活動進行分

析，我們又可看出這一結論仍然具有一定的局限性。例如，一個明顯的問題就在於：我們應當如何去看“問題解決”(problem solving)與“問題提出”(problem posing)的關係？特別是，那些有待於解決的問題是從何而來的？

事實上，這是一個公認的觀點，即提出問題的能力應當被看成創造性才能的一個十分重要的組成成分(或主要表現)。特殊地，這又正如愛因斯坦等所指出的，“提出一個問題比解決一個問題更為重要，因為解決問題也許是一個數學上或實驗上的技能而已，而提出新的問題、新的可能性，從新的角度去看舊的問題，卻需要創造性的想像力，而且標誌著科學的真正進步。”(The Evolution of Physics, 1938, New York: Simon and Schuster, 第92頁。)

另外，從數學教育的角度看，這顯然也應被看成傳統的“傳授-接受”式教學思想的一個具體表現，即學生總是被要求去解決由其它人(教師、教材編寫者、出考題者等)所提出的問題——特別是，在筆者看來，這事實上也就是“問題解決”這一口號何以常常與“應試教育”表現出一定的相容性、甚至為後者所利用的一個重要原因。

鑒於以上的原因，“問題提出”近年來在數學教育界中獲得了越來越多的重視就是十分自然的了(對此例如可見雪爾弗[E. Silver]的綜述性文章[2])。從“問題解決”的角度看，我們在此並應特別調以下的事實：在“問題解決”與“問題提出”之間事實上並存在著相互制約、互相依賴的辯證關係。例

如，正如波利亞所提出的，在解決問題的過程中，我們常常需要引進輔助問題：“如果你不能解決所提出的問題，可先解決一個與此有關的問題。你能不能想出一個更容易著手的有關問題？一個更普遍的問題？一個更特殊的問題？一個類比的問題？”(《怎樣解題》，科學出版社，1982年，第XIV頁)——顯然，這事實上就屬於“問題提出”的範圍。也正因為此，在現今的研究中，人們常常就對“問題解決”作廣義的理解，即把“問題提出”也包括在“問題解決”這一口號的具體內涵之中。

二. “問題解決”與“數學地思維”

如果說上面的討論主要涉及到了實際數學活動的出發點，那麼，作為進一步的思考，我們在此顯然又應考慮這樣的問題：“問題解決”——在此是指具體解答，包括肯定性解答(即如求得了所要求的未知量)和否定性解答(即如證明了原來的問題是不可能得到解決的)的獲得——能否被看成相應的數學活動的結束？或者說，這是否應當被看成數學活動的主要目標？

顯然，如果從小範圍進行分析，特別是僅僅著眼於數學知識的實際應用，那麼，對於上述的問題也許可以作出肯定的答覆；但是，如果我們著眼於更大的範圍，特別是考慮到數學的理論研究，在此無疑就應作出否定性的答覆，因為，這正是數學家(或者說，數學思維)的一個重要特點，即數學家總是不滿足於某些具體結果或結論的獲得，並總是希望能

獲得更為深入的理解，而這不僅直接導致了對於嚴格的邏輯證明的尋求，而且也促使數學家積極地去從事進一步的研究，即如在這些看上去並無聯繫的事實背後是否隱藏著某種普遍的理論？這些事實能否被納入某個統一的數學結構？等等；他們也總是希望能達到更大的簡單性和精緻性，即如是否存在有更為簡單的證明？能否對相應的表述方式（包括符號等）作出適當的改進？等等。

也就是從上述的立場出發，一些數學家對現行的數學教育中所出現的一些偏向提出了尖銳的批評。例如，為了使數學對大多數學生來說成為更有吸引力和力所能及的，“開放性問題”在現代的數學教育中得到了廣泛的應用，因為，普遍認為，與具有唯一正確解答、甚至唯一正確解題方法的“傳統問題”相比，開放性問題更適於使所有的學生參與到解題活動之中：他們可以依據各自的水平去進行求解。但是，在實踐中卻又經常可以看到這樣的現象，即學生們（甚至包括教師）只是滿足於用某種方法（包括觀察、實驗和猜測）求得了問題的解答，而不再進行進一步的思考和研究，甚至未能對所獲得結果的正確性（包括完整性）作出必要的檢驗或證明。從而，“在現實中，開放性問題在某些場合正在成為不求甚解和不加檢驗的猜測的同義詞”；而這當然引起了數學家們的不安：“儘管這一討論僅限於開放性問題，但對於新改革的某些方面的大致了解已經使數學家對數學教育的前進方向產生了疑慮”（H. Wu）；“我所擔心的是：通過使數學變得越來越易於接受，最終所得出的將並非是數學，而是什麼別的東西。”（A. Cuoco）（詳可見另文 [8]）

當然，我們並不能因為在實踐中出現了一些偏差就對的改革運動持絕對否定的態度；但是，在筆者看來，這又的確從另一側面表明了“問題解決”這一口號的局限性。這就是指，與單純地強調“問題解決”相比，我們應當更為明確地提出這樣的主張：“求解解答並繼續前進”（[3]，第45頁）；另外，從更深入的層次看，這也就是指，與“問題解決”這一口號相比，“數學地思維”應當說是更為恰當的，也即我們應當把幫助學生學會數學地思維看成數學教育的主要目標。

進而，作為“數學思維”的內涵的具體分析，我們則又應當強調指出，這不僅是指各種具體的解題策略（包括元認知的調節能力），而且也包括了更為廣泛的內容。事實上，正如上面所已提及的，這正是數學思維的一個重要特點，即數學家們總是不滿足於已有的工作，並總是希望通過新的研究去發展和深化認識，即如達到新的更大的普遍性、更大的嚴格性、更大的簡單性等——由於後者與解題策略相比顯然屬於一個更高的層次，即主要體現了數學的研究精神，從而，在筆者看來，對於所說“數學思維”，我們就可區分出兩個不同的層次（詳可參見另文 [7]）：

第一層次，解題策略（包括元認知的調節）；

第二層次，數學的研究精神。
（特殊地，我們又可看出，所說的“數學的研究精神”並是與“問題提出”密切相關的，而後者並非是指如何在解題過程中去引進適當的“輔助問題”，而是指如何去確定進一步的研究方向。）

最後，從教育的角度看，筆者認為，強調“數學地思維”也就更好地體現了這樣一個基本的思想，即數學不應被看成單純的工具，而且也對思維訓練有著十分重要的意義，而後者則又直接關係到了數學的文化價值，即直接關係到了人類理性精神的發展。這也就如克萊因 (M. Kline) 所指出的：“在最廣泛的意義上說，數學是一種精神，一種理性的精神。正是這種精神，使得人類的思維得以運用到最完善的程度，亦正是這種精神，試圖決定性地影響人類的物質、道德和社會生活；試圖回答有關人類自身存在提出的問題；努力去理解和控制自然；盡力去探求和確立已經獲得知識的深刻的和最完美的內涵。”(Mathematics in Western Culture, George allen and Uuwin Ltd. 1954, 前言。)

三. “問題解決”與數學教學

以下我們再來對數學教學方面的有關問題作一分析。

這方面首先應提及的一個事實是：就“問題解決”的專門教學而言，現今已經表現出了一定的重點轉移。例如，作為美國“問題解決”的主要代表人物之一，舍費爾德 (A. Schoenfeld) 在談及自己所開設的“問題解決”課程時就曾指出，其早期的課程主要集中於數學啟發法；然而，“與啟發法相比，現今的課程更加關注於一些基本的思想，即如數學推理和證明的重要性，及持續的數學探索 (這時問題就不只是有待於解決的任務，而主要被用作更為深入的研究的出發點)。”這也

就是說，後者的主要目的就是為了幫助學生獲得“什麼是作數學”的直接體驗。([3], 第43-44頁。)顯然，這一變化與以上的分析是完全一致的。

其次，應當強調的是，與“問題解決”的專門課程相比，以下的問題顯然是更為重要的，即我們應當如何以“問題解決”(或者說，“數學地思維”)為中心去組織整個的數學教學？

顯然，上述問題的一種可能解答就是：“問題解決”不僅涉及到了數學教育的基本目標，而且也直接決定了數學教學的基本形式：全部學校數學課程都應採取“問題解決”的形式。一般地說，這事實上也就是美國新的數學教育改革運動的一個重要內容，在這一方面並已取得了一些積極的成果。但是，在採取上述作法的同時，在此顯然又存在這樣的問題：我們應當如何去處理好“問題解決”與數學基本知識和基本技能的教學之間的關係。例如，正是出於這樣的考慮，倫伯格提出了關於課程設計的五條原則：第一，應當清楚地指明我們所希望學生掌握的若干個概念領域 (conceptual domain)；第二，這些領域應被分解成若干個課程單元，每個單元各有一個主題，並用兩至三個星期來學習；第三，對學生來說，這些概念領域應當由一定的“問題情境” (problem situation) 自然而然地引出；第四，各單元中的活動安排應當與學生的思維活動相適應；第五，課程單元應當根據學生的知識情況及教學環境不斷地加以調整。([1], 第300-302頁。)更為一般地說，這事實上也就是九十年代數學教育界的

一個共識，即認為“數學教育應當‘過程’與‘結果’並重” ([5])——由於這即可以被看成經由對這十幾年“問題解決”的教學實踐進行自覺反思所得出的一個結論，因此，在筆者看來，這也就在一定程度上反映了上述的作法在實踐中存在有一定的偏廢或不足之處。

事實上，在筆者看來，我們在此應當對“基本的教育思想”和“數學教學的基本形式”作出明確的區分。這也就是說，強調提高學生解決問題的能力並不意味著數學課程必須唯一地採取“問題解決”的形式。另外，如果我們把著眼點由狹義的“問題解決”轉移到“數學地思維”，那麼，筆者認為，另一種教學形式就是更為可取的。

具體地說，筆者在此所強調的是這樣一個事實，即數學的思維方法並不是什麼高度抽象、不可捉摸的東西，而是滲透於各種具體的數學活動之中，後者既包括問題解決，也包括各種基本的數學知識和技能的教學，從而，儘管在某些特定的條件下確有必要進行“問題解決”(或者說，數學思維方法)的專門教學，即如相對集中地通過典型例子進行啟發法的教學；但是，與這種相對集中的專門教學相比，如何將數學思維方法的教學與具體數學知識內容的教學密切地結合起來，也即以思維方法的分析來帶動、促進具體的數學知識內容的教學則是更為重要的。因為，第一，只有將數學思維方法的分析滲透於具體數學知識內容的教學之中，我們才能使學生真正看到思維方法的力量，並使之真正成為可以理解的、可以學到手的、可以加以推廣應用的；反之，“數學思維方法”也才不會變成一

門紙上談兵、借題發揮的空洞“學問”。第二，又只有通過深入地揭示隱藏在具體數學知識背後的思維方法，我們才能真正做到把數學課“講活”、“講懂”、“講深”——所謂“講活”，即是指教師應通過自己的教學活動向學生展現“活生生的”數學研究工作，而不是死的數學知識；所謂“講懂”，則是指教師應當幫助學生真正理解有關的教學內容，而不是囫圇吞棗，死記硬背；所謂“講深”，是指教師在數學教學中不僅應使學生掌握具體的數學知識，而且也應幫助學生領會內在的思維方法。

(從而，即使單純從教學方法的角度看，以思維方法的分析來帶動、促進具體數學知識內容的教學也應被看成改進數學教學的一個有效手段。特殊地，在筆者看來，這也就清楚地表明了，那種關於強調數學思維方法是否會影響數學知識和技能的教學的擔心是不必要的。應當強調的是，這一結論並已由中國關於用數學方法論指導數學教學的實踐得到了證實。對此例如可見 [9],[11].)

四. “被動的接受”與“主動的建構”

最後，應當強調的是，以上所論述的第二種教學形式並不意味著重新回到“傳授-接受”的傳統模式。例如，數學基本知識的學習在很多情況下也可採取“問題解決”的形式，從而讓學生在其中發揮積極的作用。然而，這又的確是筆者的一個基本觀點，即認為“數學地思維”在大多數情況下並不能通過單純的解題活動“自發地”形成。事實上，在筆者看

來，這正是中國古代數學發展所給予我們的一個重要教益；另外，從認識論的角度看，這也應當被看成“建構主義”（更為準確地說，應是“社會建構主義”）的數學學習觀的一個重要結論，即數學學習是主體在一定社會環境之下的建構活動，而教師的示範作用則就應當被看成“良好的學習環境”的一個重要組成成分。

為了清楚地說明問題，在此可以舉出以數學思維方法促進、帶動具體數學知識內容教學的一個實際例子（它取自筆者從事微積分教學的親身實踐），特別是，教師在其中即發揮了重要示範作用：

當時的教學內容是基本初等函數的導數，在弄清了線性函數、冪函數、正弦函數、餘弦函數和對數函數的導數以後，餘下的問題就是如何去求得指數函數 $y = a^x (a > 0)$ 的導數。

教材上對此是這樣處理的：

$$\begin{aligned}\Delta y &= a^{x+\Delta x} - a^x = a^x (a^{\Delta x} - 1), \\ \Delta y / \Delta x &= a^x [(a^{\Delta x} - 1) / \Delta x], \\ y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta y / \Delta x) \\ &= a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [(a^{\Delta x} - 1) / \Delta x].\end{aligned}$$

現令 $a^{\Delta x} - 1 = t$ ，則 $\Delta x = \log_a(1 + t)$ ，又當 $\Delta x \rightarrow 0$ 時 $t \rightarrow 0$ ，於是

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [(a^{\Delta x} - 1) / \Delta x] = \lim_{t \rightarrow 0} [t / \log_a(1 + t)] = 1 / \lim_{t \rightarrow 0} \log_a(1 + t)^{1/t} = 1 / \log_a e = \ln a.$$

所以 $y' = a^x \ln a$ 。

對以上過程進行分析，容易看來，其中的關鍵一步即在於引進了 $t = a^{\Delta x} - 1$ ；但這

一步是怎樣想出來的呢？我們又怎樣才能使其對於學生來說是“可以理解、可以學到手的呢？”

在實際教學中筆者是這樣做的：在得出了

$$\begin{aligned}y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta y / \Delta x) \\ &= a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [(a^{\Delta x} - 1) / \Delta x]\end{aligned}$$

的表達式後，教師似乎“忘記了”應當如何去引進 t 這樣一個新的變量；這樣，面前的問題就成了一個真正的挑戰！而且，教師最初的兩次嘗試都失敗了——從而，這就引起了學生們的極大興趣：全班學生都提起了精神看教師是如何處理這一難題的。

這時，教師放棄了盲目追隨教材的作法，而開始了“新”的思考：「讓我們來看一下什麼是已經解決了的？特別是，什麼與目前所面臨的問題是密切相關的？」顯然，這時容易想到以下的事實：對數函數的導數 $(\log_a x)' = (1/x) \cdot \log_a e$ ，因為，指數函數即可看成對數函數的反函數。

正是通過這樣的分析，教師提出了這樣的想法：「我們是否暫時‘放棄’眼前的問題，而從更為一般的角度去考慮以下的問題：‘已知一個函數的導數，如何去求得它的反函數的導數？’」

顯然，從純形式的角度看，以下的問題是容易解決的，即有

反函數的導數等於直接函數的導數的倒數。

進而，將上述的一般性結論應用於指數函數這一“特例”，就立即獲得了以下的結果：

$$\begin{aligned}(a^x)' &= 1/(\log_a y)' = 1/[(\log_a e)/y] \\ &= a^x \ln a.\end{aligned}$$

這樣，原來的問題就獲得了解決。

在筆者看來，儘管以上的作法脫離了教材，甚至也違背了教材的“邏輯順序”，但卻使學生看到了真正的數學活動，特別是，以上的解題活動對於學生深刻領會“一般化方法”是十分有益的：這就正如希爾伯特所指出的，“在解決一個數學問題時，如果我們沒有獲得成功，原因常常在於我們沒有認識到更一般的觀點，即眼下要解決的問題不過是一連串有關問題中的一個環節。”（“數學問題”，載「數學史譯文集」，上海科學技術出版社，1981年，第63頁。）另外，筆者認為，由以上的事例我們也就可以看出，美國著名教育心理學家奧蘇貝爾（D. Ausubel）關於“講授式教學”與“意義學習”的分析是很有道理的，即決定“意義學習”（也即能否使學習活動對於學生來說成爲真正有意義的）的主要因素並不在於我們所採取的是什麼樣的教學形式；特別是，以教師的講授爲基礎的學習（奧蘇貝爾稱爲“接受學習”）未必一定是“無意義的”（按奧蘇貝爾的話說，就是“機械的”），反之，發現法也未必一定是“有意義的”（詳可見「奧蘇貝爾的教學論思想」，載「當代國外教學論流派」，福建教育出版社，1990年，第205-235頁）。事實上，由以上的分析我們已經知道，“意義學習”就意味著主動的建構，而教師的講授（以及有待於解決的“問題”）則

就應當被看成是爲學生的主動學習提供了必要的外部條件。

最後，還應提及的是，除去有意識的工作以外，我們在此並應看到教師的“示範作用”所產生的“無形”影響，特別是，教師的日常言行（這正是其數學觀、教學思想等的具體體現）對學生可能產生潛移默化的影響。顯然，這也就更爲清楚地表明了數學學習作爲一種建構活動的社會性質。

參考文獻

1. Romberg, T., 1994, Classroom Instruction that Fosters Mathematical Thinking and Problem Solving: Connections between Theory and Practice, in [3].
2. Silver, E., 1993, On Mathematical Problem Posing, Proceedings of the 17th International Conference of PME, Vol. I, pp.66-85.
3. Schoenfeld, A. (ed) 1994, Mathematical Thinking and Problem Solving, Lawrence Erlbaum Associates.
4. Brown, S. and Walter, M., 1983, The Art of Problem Posing, PA: Franklin Institute Press.
5. 黃毅英，數學教育目的之轉移，數學傳播，1993年第三期。
6. 鄭毓信，‘問題解決’與數學教育，數學傳播，1993年第四期。
7. 鄭毓信，數學思想、數學思想方法與數學方法論，科學、技術與辯證法，1993年第五期。
8. 鄭毓信，關於‘大眾數學’的反思，數學教育學報，1994年第二期。
9. 鄭毓信，數學方法論指導文科高等數學教學，江蘇省普通高校優秀教學質量獎成果，1992年。
10. 鄭毓信，數學教育哲學，四川教育出版社，1995年。

70 數學傳播 20卷4期 民85年12月

11. 無錫市教科所 (徐瀝泉執筆), 貫徹數學方法論的教育方式, 全面提高學生素質 (實驗報告), 1993年。

—本文作者任教於南京大學哲學系—