談Stirling 公式的改良

蔡永裕

壹. 緣 起

從學生時代接觸到 Stirling 公式後, 就被它深深吸引–利用一個簡單的計算式, 三招兩式下就能求得原來必須反覆計算才能求解的數據。但除非 n 階乘的 n 眞的夠大, 大到遠遠超乎我們的實用範圍, 否則其精確度始終令人不太敢恭維! 例如相對誤差只要求萬分之一, n 竟然就要高於 800, (此時 $n!$ 的值是幾乎是 10 的 2000次方)。在現代, 個人電腦如此普及的情況下想算得 $n!$ 精確一點的數據, 難道還是這麼可望而不可及嗎? 在一次偶然的機緣中找到了其改良式, 原已準備發表, 卻因爲搬家而造成了論文資料遺失 (包含文件失蹤、磁片發霉、電腦故障等三衰齊至)。因爲筆者個性隨緣, 便也隨匆匆歲月而淡忘此事。最近失蹤已久的文件忽重現江湖, 在賢妻的督促下, 遂配合電腦重新撰寫本文, 順便爲本刊66期蔡聰明先生大作「談 Stirling 公式」做一補充。

貳. Stirling's formula

$$n! = e^{-n}n^n\sqrt{2\pi n} + h \qquad (1)$$

$$\doteq e^{-n}n^n\sqrt{2\pi n}; \qquad (2)$$

$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

註:

$$e = 2.71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 02874\ 71352\ 66249\ 77572\ 47093\ldots$$

$$\pi = 3.14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288\ 41971\ 69399\ldots$$

$$(0 < \frac{h}{n!} < \frac{1}{12n})$$

使用 (2) 式在所謂「大的 n 值」時, 會得到 $n!$ 的漸近相等值。但是 n 值究竟要大到多少, 代入式子中才會有令人滿意的結果呢? 100? 500? 1000? ..., 經過驗算後, 雖然這些數據已大到幾乎超越一般工程運算所能使用到的範圍, 卻總有幾分美中不足之憾。也就是說–

1. 「n 值如果不夠大」(例如小於 70), 則以一般工程用計算機直接將答案按出即可, 就算再大些, 使用 Microsoft 的視窗軟體工具「小算盤」等類似工具, 亦可算到 170!, 使用 Stirling 公式的誤差太大, 幾乎無使用的必要;
2. 「稍大些的 n 值」(如 $70 \sim 1000$, 或 $171 \sim 1000$), 使用 Stirling 公式的誤差勉強可以接受, 但若需要較精確的數值就必需自行撰寫程式 (務必要考慮計算機的捨位誤差), 並耗費一些「可感受到」的運算時間;
3. 「更大些的 n 值」(如大於 1000), 使用 Stirling 公式的誤差已更小, 直接套用已較無問題。但如果對數值的要求嚴苛些 (例如相對誤差是 10 的 -8 次方, 甚至 -10 次方), 不自行撰寫程式都不行, 但所需的運算時間就顯得有些可怕了。

參. Stirling 公式的改良構想

民國78年 6月, 某日面對著自然對數的底數 e 時, 靈機一動— e 是由 $n!$ 而來:

$$e = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots \tag{3}$$

e 和 $n!$ 兩者互相有密切關係。在計算 e 時要使用到足夠大的 $n!$, 爲什麼在反算 $n!$ 時, Stirling公式的 e 就要用精確值去代入呢? 爲何不配合 n 值去作一些修正呢? 也許用一個由 e 的漸近相等值 E, 就能提高 Stirling 公式的精度!

如果這個假設可行, E 值如何求得呢?

我們所先假設

$$n! \doteq E^{-n} n^n \sqrt{2\pi n} \tag{4}$$

此時 (4) 式是一個比 (2) 式更逼近的式子,

由 (4) 式知

表一. $n!$之精確值

n	$n!$ 之 精 確 值			
1	1			
2	2			
3	6			
4	(1)2.4000	00000	00000	00000
5	(2)1.2000	00000	00000	00000
6	(2)7.2000	00000	00000	00000
7	(3)5.0400	00000	00000	00000
8	(4)4.0320	00000	00000	00000
9	(5)3.6288	00000	00000	00000
10	(6)3.6288	00000	00000	00000
11	(7)3.9916	80000	00000	00000
12	(8)4.7900	16000	00000	00000
13	(9)6.2270	20800	00000	00000
14	(10)8.7178	29120	00000	00000
15	(12)1.3076	74368	00000	00000
16	(13)2.0922	78988	00000	00000
17	(14)3.5568	74280	96000	00000
18	(15)6.4023	73705	72800	00000
19	(17)1.2164	51004	08832	00000
20	(18)2.4329	02008	17664	00000
21	(19)5.1090	94217	17094	00000
22	(21)1.1240	00727	77760	76800
23	(22)2.5852	01673	88849	76640
24	(23)6.2044	84017	33239	43936
25	(25)1.5511	21004	33309	85984
26	(26)4.0329	14611	26605	63558
27	(28)1.0888	86945	04183	52161
28	(29)3.0488	83446	11713	86050
29	(30)8.8417	61993	73970	19545
30	(32)2.6525	28598	12191	05864
100	(157)9.3326	21544	39441	52682
200	(374)7.8865	78673	64790	50355
300	(614)3.0605	75122	16440	63604
400	(868)6.4034	52284	66238	95262
500	(1134)1.2201	36825	99111	00687
600	(1408)1.2655	72316	22543	07425
700	(1689)2.4220	40124	75027	21799
800	(1976)7.7105	30113	35386	00414
900	(2269)6.7526	80220	96458	41584
1000	(2567)4.0238	72600	77093	77354

表二. 精確 E 值與 $\ln E$

n	E 值				$\ln E$			
1	2.5066	28274	63100	9	0.9189	38533	20467	6
2	2.6626	70727	60078	7	0.9793	29652	02229	8
3	2.6933	18360	88386	3	0.9907	74024	77166	9
4	2.7041	89756	59509	3	0.9948	02331	97406	1
5	2.7092	47881	20767	4	0.9966	71061	76203	8
6	2.7120	02554	12123	8	0.9976	87311	86282	3
7	2.7136	65950	48671	2	0.9983	00470	00773	2
8	2.7147	46535	24112	2	0.9986	98591	84225	5
9	2.7154	87825	95273	6	0.9989	71615	31303	4
10	2.7160	18289	49752	5	0.9991	66943	65666	5
11	2.7164	10892	21282	1	0.9993	11484	04655	2
12	2.7167	09566	99279	8	0.9994	21429	99106	8
13	2.7169	42047	01586	1	0.9995	07000	44707	8
14	2.7171	26538	22987	2	0.9995	74902	13480	5
15	2.7172	75392	73487	9	0.9996	29684	42987	1
16	2.7173	97230	14727	9	0.9996	74521	50502	7
17	2.7174	98213	45642	1	0.9997	11682	59127	1
18	2.7175	82843	64824	4	0.9997	42824	79170	6
19	2.7176	54469	87901	1	0.9997	69181	03951	6
20	2.7177	15625	88010	6	0.9997	91684	01540	2
21	2.7177	68257	08273	1	0.9998	11049	79911	5
22	2.7178	13877	22573	6	0.9998	27835	54234	5
23	2.7178	53678	40086	3	0.9998	42479	99023	3
24	2.7178	88609	70967	5	0.9998	55332	44237	7
25	2.7179	19434	36195	7	0.9998	66673	77453	3
26	2.7179	46771	71300	3	0.9998	76731	91430	7
27	2.7179	71128	61467	1	0.9998	85693	38212	7
28	2.7179	92923	07552	5	0.9998	93712	00059	0
29	2.7180	12502	31309	3	0.9999	00915	53923	1
30	2.7180	30156	66737	4	0.9999	07410	83567	7
100	2.7182	59176	28036	8	0.9999	91666	69444	5
200	2.7182	76165	38252	7	0.9999	97916	66840	5
300	2.7182	79311	53352	9	0.9999	99074	07441	9
400	2.7182	80412	68793	1	0.9999	99479	16677	8
500	2.7182	80922	36538	0	0.9999	99666	66671	3
600	2.7182	81199	22727	5	0.9999	99768	51854	1
700	2.7182	81366	16629	5	0.9999	99829	93198	7
800	2.7182	81474	51614	5	0.9999	99869	79167	5
900	2.7182	81548	80044	8	0.9999	99897	11934	6
1000	2.7182	81601	93558	1	0.9999	99916	66667	1

表三. 精確 F 值

n	F 值			
1	(1)1.2336	31760	60574	9
2	(1)4.8378	47921	47062	8
3	(2)1.0838	96255	13974	0
4	(2)1.9239	39726	44941	8
5	(2)3.0039	60808	27324	5
6	(2)4.3239	72540	54607	6
7	(2)5.8839	79715	27135	3
8	(2)7.6839	84413	71925	4
9	(2)9.7239	87654	36968	8
10	(3)1.2003	98998	21986	2
11	(3)1.4523	99170	98818	9
12	(3)1.7283	99302	69785	7
13	(3)2.0283	99405	38068	4
14	(3)2.3523	99486	97786	1
15	(3)2.7003	99552	87762	5
16	(3)3.0723	99606	87099	6
17	(3)3.4683	99651	64858	2
18	(3)3.8883	99689	19798	6
19	(3)4.3323	99720	98875	4
20	(3)4.8003	99748	15001	8
21	(3)5.2923	99771	55859	9
22	(3)5.8083	99791	80778	4
23	(3)6.3483	99809	51790	9
24	(3)6.9123	99825	02531	8
25	(3)7.5003	99838	79495	5
26	(3)8.1123	99850	92987	9
27	(3)8.7483	99861	77095	9
28	(3)9.4083	99871	58102	5
29	(4)1.0092	39988	02525	5
30	(4)1.0800	39988	81740	7
100	(5)1.2000	04000	08573	9
200	(5)4.8000	04005	08813	4
300	(6)1.0800	00402	33843	2
400	(6)1.9200	00410	43678	4
500	(6)3.0000	00417	24662	6
600	(6)4.3200	00419	54011	9
700	(6)5.8800	00491	13662	1
800	(6)7.6800	00490	87222	1
900	(6)9.7200	00419	50472	1
1000	(7)1.2000	00062	18239	5

$$\begin{aligned}\log(n!) &\doteq -n\times\log E+n\log n\\ &\quad+\log\sqrt{2\pi n}\\ &=-n\times\log E+(n+0.5)\log n\\ &\quad+\log\sqrt{2\pi} \qquad (5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log E &\doteq ((n+0.5)\log n+\log\sqrt{2\pi}\\ &\quad-\log(n!))/n \qquad (6)\end{aligned}$$

$$E\doteq 10^{((n+0.5)\log n+\log\sqrt{2\pi}-\log(n!))/n} \qquad (7)$$

註:

$$\begin{aligned}\log\sqrt{2\pi}=0.&39908\ 99341\ 79057\ 52478\\ &25035\ 91507\ 69595\ 02099\\ &34102\ 92128\ldots\end{aligned}$$

運用 log 的目的是因爲「n 的 n 次方」和「$n!$」數值太大, 不借助對數無法處理, 況且表一「 $n!$ 之精確值」是以科學記號表示, 在運算過程中若有訛誤很容易發現。將表一中數字代入 (7) 式計算可求得「精確之 E 值」如表二。

既然 E 是 e 的漸近相等值 —

1. 它必隨著 n 值的變大而趨近, 很自然的, 我們可以聯想到:
「令 E 是一個以 e 的次方之 n 的函數」應可達到此目的。而「e 的次方」之大小, 採用工程型計算機或個人電腦程式之函數簡易可算。
2. 「$\ln E = e$ 的次方」, 由「精確之 E 值」可得到「精確之 e 的次方」(即 $\ln E$), 數值見表二。
3. 因爲 n 趨近於無限大時, E 值與 e 相等, 所以「e 的次方」此次方必定趨近於 1。

4. 「e 的次方」的函數必定可以「1 減掉 ((n 的函數) 之倒數)」來表示之。因爲隨著 n 的增大, 就可以滿足前面的條件。
5. 令 $F(n)$ 爲此「e 的次方」的函數,

$$E = \exp(1 - \frac{1}{F(n)}) \qquad (8)$$

若能找到這個 $F(n)$ 函數即可得到 E 值。

$$F(n) = \frac{1}{1 - \ln E} \qquad (9)$$

利用表二與 (9) 式, 可得到 F 值, 如表三。如以數值迴歸之方法, 配合現有「答案」, 反求 $F(n)$ 並不困難。

肆. F 值的迴歸

1. 以 n 的一次式線性迴歸, 得

$$\begin{aligned} F = &-318191.7395697517 \\ &+9897.928907936050n \quad (10) \end{aligned}$$

相關係數 $R_a^2 = 93.50455516468915\%$
相關係數 R_a^2 不夠趨近 1, 不理想!

2. 以 n 的一次式和二次式線性迴歸, 得

$$\begin{aligned} F = &0.397466374596547 \\ &-0.000073247773528n \\ &+12.0000002309n^2 \qquad (11) \end{aligned}$$

相關係數 $R_a^2 = 100.0000000000001\%$
相關係數 R_a^2 趨近 1 (略大於100%是由於計算機誤差所造成), 式子可用。

3. (11) 式與 (10) 式相比較, 不過是增加 n 的二次式, 就讓「相關係數R_a^2」顯著提高, 也許是因爲二次式的相關性比一次式強很多, 所以考慮僅以 n 的二次式來線性迴歸, 或許既能實用且較 (11) 式簡潔。

$$\begin{aligned} F = &0.394555101297897 \\ &+12.000000147908039n^2 (12) \end{aligned}$$

相關係數 $R_a^2 = 100.0000000000000\%$
相關係數 R_a^2 等於 1 (實際上是計算機和程式的不夠精確!), 很幸運的, 我們終於尋獲所要找的函數。

4. 將 (12) 式, 修正爲 (13) 式後, 簡潔、好記, 並且精確度尚能令人滿意!

$$F = 0.4 + 12n^2 \qquad (13)$$

5. 比較 (12) 式與 (13) 式計算所得 F 值, 詳表四。

伍. 計算式的改寫

由 (8) 式 與 (13) 式, 得

$$\begin{aligned} E &= \exp(1 - \frac{1}{F(n)}) \\ &= \exp(1 - \frac{1}{0.4 + 12n^2}) \qquad (14) \end{aligned}$$

以 E 值去代替 e, 代回 (4) 式, 發現— 增加的計算時間微乎其微, 過程不困難, 但精確度卻有十分顯著的提升。隨即將 (4) 式改良爲 (15) 式

$$n! \doteq \frac{n^n \sqrt{2\pi n}}{(\exp(1 - \frac{1}{0.4+12n^2}))^n} \qquad (15)$$

表四. 計算之 F 值

n	(12) 式之 F 值				(13) 式之 F 值			
1	(1)1.2394	55524	92059	4	(1)1.2400	00000	00000	0
2	(1)4.8394	55569	29300	6	(1)4.8400	00000	00000	0
3	(2)1.0839	45564	32470	3	(2)1.0840	00000	00000	0
4	(2)1.9239	45574	67826	5	(2)1.9240	00000	00000	0
5	(2)3.0039	45587	98998	9	(2)3.0040	00000	00000	0
6	(2)4.3239	45604	25987	3	(2)4.3240	00000	00000	0
7	(2)5.8839	45623	48791	9	(2)5.8840	00000	00000	0
8	(2)7.6839	45645	67412	4	(2)7.6840	00000	00000	0
9	(2)9.7239	45670	81849	1	(2)9.7240	00000	00000	0
10	(3)1.2003	94569	89210	2	(3)1.2004	00000	00000	0
11	(3)1.4523	94572	99817	1	(3)1.4524	00000	00000	0
12	(3)1.7283	94576	40005	6	(3)1.7284	00000	00000	0
13	(3)2.0283	94580	09775	6	(3)2.0284	00000	00000	0
14	(3)2.3523	94584	09127	4	(3)2.3524	00000	00000	0
15	(3)2.7003	94588	38060	7	(3)2.7004	00000	00000	0
16	(3)3.0723	94592	96575	6	(3)3.0724	00000	00000	0
17	(3)3.4683	94597	84672	1	(3)3.4684	00000	00000	0
18	(3)3.8883	94603	02350	3	(3)3.8884	00000	00000	0
19	(3)4.3323	94608	49610	0	(3)4.3324	00000	00000	0
20	(3)4.8003	94614	26451	4	(3)4.8004	00000	00000	0
21	(3)5.2923	94620	32874	3	(3)5.2924	00000	00000	0
22	(3)5.8083	94626	68878	9	(3)5.8084	00000	00000	0
23	(3)6.3483	94633	34465	1	(3)6.3484	00000	00000	0
24	(3)6.9123	94640	29632	8	(3)6.9124	00000	00000	0
25	(3)7.5003	94647	54382	2	(3)7.5004	00000	00000	0
26	(3)8.1123	94655	08713	2	(3)8.1124	00000	00000	0
27	(3)8.7483	94662	92625	9	(3)8.7484	00000	00000	0
28	(3)9.4083	94671	06120	2	(3)9.4084	00000	00000	0
29	(4)1.0092	39467	94919	6	(4)1.0092	40000	00000	0
30	(4)1.0800	39468	82185	3	(4)1.0800	40000	00000	0
100	(5)1.2000	03960	34181	7	(5)1.2000	04000	00000	0
200	(5)4.8000	04004	71422	9	(5)4.8000	04000	00000	0
300	(6)1.0800	00407	86682	5	(6)1.0800	00400	00000	0
400	(6)1.9200	00418	22038	8	(6)1.9200	00400	00000	0
500	(6)3.0000	00431	53211	1	(6)3.0000	00400	00000	0
600	(6)4.3200	00447	80199	5	(6)4.3200	00400	00000	0
700	(6)5.8800	00467	03004	1	(6)5.8800	00400	00000	0
800	(6)7.6800	00489	21624	7	(6)7.6800	00400	00000	0
900	(6)9.7200	00514	36061	4	(6)9.7200	00400	00000	0
1000	(7)1.2000	00054	24631	4	(7)1.2000	00040	00000	0

表五. $n!$ 之計算

n	Stirling 式				Stirling 之改良式			
1	0.9221	37008	89578	9	0.9995	83781	13810	8
2	1.9190	04351	48898	3	1.9999	63236	52624	7
3	5.8362	09591	34586	4	5.9999	84106	42766	7
4	(1)2.3506	17513	28933	0	(1)2.3999	98436	84752	2
5	(2)1.1801	91679	57590	0	(2)1.1999	99739	41378	7
6	(2)7.1007	81846	42185	0	(2)7.1999	99365	53589	5
7	(3)4.9803	95831	61246	3	(3)5.0399	99793	29351	1
8	(4)3.9902	39545	26567	0	(4)4.0319	99914	85103	0
9	(5)3.5953	68728	41948	1	(5)3.6287	99957	35872	6
10	(6)3.5986	95618	74103	7	(6)3.6287	99974	77189	5
11	(7)3.9615	62505	05774	9	(7)3.9916	79982	74403	3
12	(8)4.7568	74864	72776	7	(8)4.7900	15986	58301	7
13	(9)6.1872	39475	19271	5	(9)6.2270	20788	30071	1
14	(10)8.6661	00174	05986	3	(10)8.7178	29108	68486	6
15	(12)1.3004	30722	19946	4	(12)1.3076	74366	79725	2
16	(13)2.0814	11441	52231	6	(13)2.0922	78987	40573	0
17	(14)3.5394	83286	66100	4	(14)3.5568	74279	20889	2
18	(15)6.3728	04626	19431	2	(15)6.4023	73703	35879	5
19	(17)1.2111	27865	92293	7	(17)1.2164	51003	74471	2
20	(18)2.4227	86846	76114	0	(18)2.4329	02007	64476	1
21	(19)5.0888	61732	55095	5	(19)5.1090	94216	29561	5
22	(21)1.1197	51494	62823	7	(21)1.1240	00727	62497	8
23	(22)2.5758	52537	05292	9	(22)2.5852	01673	60736	7
24	(23)6.1829	79270	22795	4	(23)6.2044	84016	78690	9
25	(25)1.5459	59483	46911	8	(25)1.5511	21004	22190	2
26	(26)4.0200	09930	60952	6	(26)4.0329	14611	02837	9
27	(28)1.0855	31517	03195	7	(28)1.0888	86944	98870	0
28	(29)3.0398	23262	43342	7	(29)3.0488	83445	99307	8
29	(30)8.8163	92105	37750	7	(30)8.8417	61993	43781	8
30	(32)2.6451	70959	22965	7	(32)2.6525	28598	04545	0
100	(157)9.3248	47625	26955	3	(157)9.3326	21544	39367	2
200	(374)7.8832	93286	44157	1	(374)7.8865	78673	64752	1
300	(614)3.0597	25080	78967	2	(614)3.0605	75122	16418	6
400	(868)6.4021	18371	33524	0	(868)6.4034	52284	66293	6
500	(1134)1.2199	33486	82611	0	(1134)1.2201	36825	99102	2
600	(1408)1.2653	96554	51468	0	(1408)1.2655	72316	22528	9
700	(1689)2.4217	51803	82196	2	(1689)2.4220	40124	75071	2
800	(1976)7.7097	26975	00648	9	(1976)7.7105	30113	35283	9
900	(2269)6.7520	55001	76879	3	(2269)6.7526	80220	96212	0
1000	(2567)4.0235	37292	03474	7	(2567)4.0238	72600	76974	3
10000	(35659)2.8462	35962	18333	0	(35659)2.8462	59680	90759	0
100000	(456573)2.8242	27054	56058	0	(456573)2.8242	29407	85623	8
1000000	(5565708)8.2639	30995	12457	2	(5565708)8.2639	31686	26631	9
10000000	(65657059)1.2024	23380	75934	5	(65657059)1.2024	23401	38763	5
100000000	(756570556)1.6172	03942	80194	8	(756570556)1.6172	03942	80194	8

陸. $n!$ 之計算與比較

改寫 (2) 式爲 (16) 式 (Stirling 公式的對數形式)

$$\log(n!) \doteq \log\sqrt{2\pi} + (n+0.5)\log n - n \times \log e \qquad (16)$$

改寫 (15) 式爲 (17) 式 (改良式之對數形式)

$$\log(n!) \doteq \log\sqrt{2\pi} + (n+0.5)\log n - n \times \log(\exp(1 - \frac{1}{0.4+12n^2}) \qquad (17)$$

註:

$$\log e = 0.43429\ 44819\ 03251\ 82765\ 11289\ 18916\ 60508\ 22943\ 97005\ 80367\cdots$$

利用個人電腦 (AcerPower 560h, Intel Pentium-60 CPU), 分別計算以上 (16), (17) 兩式, 求得 $n!$ 之計算結果如表五。有興趣的朋友可再連同表一「$n!$ 之精 確值」做一比較。

相對誤差比較, 如表六。以改良式推估 2!的相對誤差 $(-1.83817E-05)$ 即小於原 Stirling 公式推估 1000!的相對誤差 $(-8.33299E-05)$, 兩式逼近眞實值之速度不可同日而語。如果當 $n \leq 3$ 時, 以心算即可算得 $n!$ (如 $3! = 3 \times 2 \times 1$), 不必借助任何近似之計算式; 當 $n \geq 4$, 使用本文所提之改良式求解 $n!$, 就能將相對誤差降到百萬分之一以下; 當 $n \geq 10$ 時, 甚至已將相對誤差降到億分之一以下, 可見其實用性甚高。

表六. 計算 $n!$ 時, Stirling 公式與其改良式分別之相對誤差

n	Stirling 公式	改良式
1	-7.78630E-02	-4.16219E-04
2	-4.04978E-02	-1.83817E-05
3	-2.72984E-02	-2.64893E-06
4	-2.05760E-02	-6.51314E-07
5	-1.65069E-02	-2.17155E-07
6	-1.37803E-02	-8.81200E-08
7	-1.18262E-02	-4.10132E-08
8	-1.03573E-02	-2.11183E-08
9	-9.21276E-03	-1.17508E-08
10	-8.29596E-03	-6.95219E-09
11	-7.54507E-03	-4.32298E-09
12	-6.91879E-03	-2.80103E-09
13	-6.38850E-03	-1.87879E-09
14	-5.93370E-03	-1.29793E-09
15	-5.53933E-03	-9.19761E-10
16	-5.19412E-03	-6.66388E-10
17	-4.88940E-03	-4.92317E-10
18	-4.61846E-03	-3.70051E-10
19	-4.37596E-03	-2.82468E-10
20	-4.15765E-03	-2.18619E-10
21	-3.96009E-03	-1.71327E-10
22	-3.78045E-03	-1.35791E-10
23	-3.61641E-03	-1.08746E-10
24	-3.46600E-03	-8.79178E-11
25	-3.32761E-03	-7.16885E-11
26	-3.19984E-03	-5.89342E-11
27	-3.08152E-03	-4.87976E-11
28	-2.97164E-03	-4.06906E-11
29	-2.86932E-03	-3.41431E-11
30	-2.77382E-03	-2.88256E-11
100	-8.32983E-04	-7.975 E-14
200	-4.16580E-04	-4.876 E-14
300	-2.77739E-04	-7.211 E-14
400	-2.08312E-04	8.530 E-14
500	-1.66653E-04	-7.188 E-14
600	-1.38879E-04	-1.126 E-13
700	-1.19041E-04	1.817 E-13
800	-1.04161E-04	-1.325 E-13
900	-9.25883E-05	-3.649 E-13
1000	-8.33299E-05	-2.971 E-13

柒. 結論

1. 要改良 Stirling 公式可由修正「自然對數的底數 e」著手。
2. 比較兩者之相對誤差, 改良式遠小於 Stirling 公式, 所以改良式非常適合取代原來的 Stirling 公式。

   Stirling 公式的改良式

   $$n! \doteq \frac{n^n\sqrt{2\pi n}}{(\exp(1-\frac{1}{0.4+12n^2}))^n}$$

3. 誤差範圍因為筆者並非數學科班出身,「非不爲也, 實不能也!」寄望本文讀者能予以求得, 以彌補本文之缺陋!

捌. 參考文獻

1. 岩波數學辭典第3版。
2. McGRAW-Hill, Dictionary of Physics and Mathematics.
3. Mathematical Tables for Scientists and Engineers.
4. CRC Standard Mathematical Tables (v.28th).
5. Handbook of Mathematical Fuctions (1967).
6. 蔡聰明, 談 Stirling 公式, 數學傳播季刊 66 期 p.24-31。

—本文作者任職於亞洲聚合公司儀電課—