評核、擬題與數學教育

黃毅英

引言

過份著重考試能帶來不良後果，然每件工作的成效都應當作出評定。學生學習至某個階段，測看其學業成績也可以說是理所當然的。

傳統上，考核是測看考生在範圍內的學習成效，且肩負著把眾多學生分出高下的作用，藉此決定那些學生可進入下一學習階段。所以,「區分度」與「覆蓋性」是最重要的。要把學生有效區分, 把差距拉得越遠越好。有些考核利用不同的深度 (如甲部必答題較淺易, 乙部選答題較深之類) 去區分能力較差, 又同時分辨能力較佳的學生。所以若題中有一佔分較多的部份, 想到了便全取分數, 想不到便一分也不能得乃擬題之大忌。

表一. 測驗藍圖

知識範圍 能力表現		分數之意義及表達	小數之意義及表達	各數型之互化	分數與小數之排例	分數與混合數之運算	小數運算	百份率與百份數之問題	有限及循環小數之問題	實數及其性質
知識										
程序與策略運用	工具利用									
	進行常序									
	策略運用									
解題	形成與釐清問題									
	解決									
	預測									
	驗證									
抽象與理論化	發展符號與字彙									
	發展算法									
	推廣									
	猜想									
	辨明與證明									
	公理化									

一般在擬題前, 爲確保覆蓋性, 會先製訂測驗藍圖 (見鍾,1995): 橫向是各個測驗的範圍 (表一所示爲分數與小數), 縱向是能力的表現, 表一便借助了現正進行的第三次國際數學科調查的能力劃分 (International Co-ordinating Centre,TIMSS, 1991)。利用此法, 對於任一課題, 不難保證學習內容及能力的覆蓋性。

以下, 我們由一些擬題技巧出發, 並舉以香港中學會考及高級程度各數學科試題的實例, 逐步談到評核方式的新趨勢。

從簡單命題到結構性題目

以前數學命題比較簡單, 且看一九六一年香港高級程度考試純粹數學卷一第三題 (簡稱作61ALPMI-3)

若 $\binom{n}{k}$ 爲 $(1+x)^n$ 展開中 x^k 之係數, 證明

(i) $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\frac{(2n)!}{n!n!}$,

(ii) $\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}\leq\frac{1}{k!}$,

(iii) $(1+\frac{1}{n})^n<3$。

這類題目不只能考驗運用某類技巧的能力, 且要求考生從紜紜工具中選出適用的來。然其缺點是, 當考生臨場未能找出適當之工具時, 他就百籌莫展, 一句也寫不出來。而此題的不能得分就不能反映他的實力。所以, 自七十年代開始, 香港公開考試題目便漸漸流行具結構性的題目。

以一九八四年 Crux Mathematicorum 第965 道徵答題爲例:

設 $A_1A_2A_3$ 爲一非退化三角形 (即有非零面積), 其邊爲 $A_2A_3=a_1$, $A_3A_1=a_2$,

$A_1A_2 = a_3$, 並設 $PA_i = x_i (i = 1, 2, 3)$, 其中 P 爲空間上任一點。證明

$$\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} \geq \sqrt{3} \qquad (1)$$

並決定等式何時發生。

一般考生未必留意到這道幾何題若用複數多項式的性質會較快捷, 以下便爲筆者向該雜誌提供之解 (等式部份從略);

設 Q 爲 P 於三角所在平面之正交投影, 並設 $QA_i = y_i$, $i = 1, 2, 3$。所欲得之結果 (1) 可由

$$\frac{x_1}{a_1}+\frac{x_2}{a_2}+\frac{x_3}{a_3} \geq \frac{y_1}{a_1}+\frac{y_2}{a_2}+\frac{y_3}{a_3} \qquad (2)$$

及

$$\frac{y_1}{a_1}+\frac{y_2}{a_2}+\frac{y_3}{a_3} \geq \sqrt{3}, \qquad (3)$$

得出。由於 $x \geq y$, $i = 1, 2, 3$, (2) 即成立。要得出 (3), 設 Z, Z_1, Z_2, Z_3 爲依次表 Q, A_1, A_2, A_3 之複數, 並設

$$f(z) = \frac{(z-z_2)(z-z_3)}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)} + \frac{(z-z_3)(z-z_1)}{(z_2-z_3)(z_2-z_1)} + \frac{(z-z_1)(z-z_2)}{(z_3-z_1)(z_3-z_2)}。 \qquad (4)$$

由於二次方程 $f(z) = 1$ 有三不同之根 z_1, z_2, z_3, 故 $f(z) \equiv 1$。(4) 中右邊三項之絕對值依次爲 y_2y_3/a_1a_2, y_3y_1/a_3a_1 及 y_1y_2/a_1a_2, 故

$$\frac{y_2y_3}{a_2a_3}+\frac{y_3y_1}{a_3a_1}+\frac{y_1y_2}{a_1a_2} \geq |f(z)| = 1。 \qquad (5)$$

今有

$$\left(\frac{y_1}{a_1}+\frac{y_2}{a_2}+\frac{y_3}{a_3}\right)^2 \geq 3\left(\frac{y_2y_3}{a_2a_3}+\frac{y_3y_1}{a_3a_1}\frac{y_1y_2}{a_1a_2}\right), \quad (6)$$

而 (3) 可由 (5)、(6) 得出。

但我們卻可慢慢分析, 將之變成一道結構性的題目 (以下略爲簡化, 設 P 位於 $A_1A_2A_3$ 之平面上)。

I. (a) 若 $z_1, z_2, \ldots, z_n$ 爲多項式 $p(x)$ 的各各不同之根, 其中 $deg(p) < n$, 證明 $p(x) \equiv 0$。

(b) 證明對於 z_1, z_2, z_3 爲各各不同之複數,

$$\frac{(z-z_1)(z-z_2)}{(z_3-z_1)(z_3-z_2)} + \frac{(z-z_2)(z-z_3)}{(z_1-z_2)(z_1-z_2)} + \frac{(z-z_3)(z-z_1)}{(z_2-z_3)(z_2-z_1)} \equiv 0。$$

(c) 設 P 爲位於 $\Delta A_1A_2A_3$ 平面上的一點, 並設 $A_2A_3 = a_1$, $A_1A_3 = a_2$, $A_1A_2 = a_3$ 及 $PA_i = x_i$ $(i = 1, 2, 3)$。

(i) 證明

$$\frac{x_1x_2}{a_1a_2}+\frac{x_2x_3}{a_2a_3}+\frac{x_1x_3}{a_1a_3} \geq 1,$$

(ii) 從而證明

$$\frac{x_1}{a_1}+\frac{x_2}{a_2}+\frac{x_3}{a_3} \geq \sqrt{3}。$$

(等式部份略去)。於是, 考生便可一步步得出期望之結果。這種自七十年代通行至今試題的特色是: 證明後面步驟 (如 (c)) 時, 每每要利用較前步驟 (如 (a)、(b)) 的結果。

故此, 能力較遜的考生, 若只能做妥 (a)、(b) 部, 亦可得出部份分數, 於是合乎拉開分數分佈的準則。反過來, 理論上, 考生在不懂 (a)、(b) 部份的情況, 也可照用之證明 (c), 而得 (c) 部之分。

從上可見, 這類題目的製訂, 每每是從解答中抽出一些關鍵性的性質, 要求學生先證, 再將此等結果整合而得最後結果。可以說次序是「倒過來」的。以上爲例, 解題者不會

一見題目便曉得先證 (a)、(b) 部。(a)、(b) 部是在解題過程中較後出現的, 在擬題時才搬上前面。

結構性題目之來源

著名的數學結果便成了結構性題目的來源。將有名的數學結果, 如算術幾何平均不等式 (Wong, 1992) 之證明分析, 便可得出尙佳的試題。以下便是兩例。

用以下方法可求出二項循環數列 $a_{n+1} = pa_n + qa_{n+1}$ 的公式。對於任意數 x,

$$\begin{aligned} & a_{n+1} - xa_n \\ \equiv\, & (p-x)a_n + qa_{n-1} \\ \equiv\, & (p-x)(a_n - xa_{n-1}) - (x^2+px-q)a_{n-1} \end{aligned}$$

設 α 與 β 爲之二根, 並有 $\alpha \neq \beta$ (若 $\alpha = \beta$, 此法失效), 有

$$\begin{aligned} a_{n+1} - \alpha a_n &= (p-\alpha)(a_n - \alpha a_{n-1}) \\ &= \beta(a_n - \alpha a_{n-1}) \end{aligned}$$

同理,

$$\begin{aligned} a_{n+1} - \alpha a_n &= \beta(a_n - \alpha a_{n-1}) \\ a_n - \alpha a_{n-1} &= \beta(a_{n-1} - \alpha a_{n-2}) \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ \times) \quad a_2 - \alpha a_1 &= \beta(a_1 - \alpha a_0) \\ \hline a_{n+1} - \alpha a_n &= \beta^n(a_1 - \alpha a_0) \end{aligned} \tag{7}$$

將 α, β 互換, 有

$$a_{n+1} - \beta a_n = \alpha^n(a_1 - \beta a_0) \tag{8}$$

解 (7), (8) 之聯立線性方程, 得

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\alpha^n(a_1 - \beta a_0) - \beta^n(a_1 - \alpha a_0)}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{(\alpha^n - \beta^n)a_1 - \alpha\beta(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}a_0)}{\alpha - \beta}。 \end{aligned}$$

以上方法, 主要是將 $a_{n+1} - \alpha a_n$ 用 $a_n - \alpha a_{n-1}$ 表示。換言之, 由 a_n 本身的一個二項循環數列, 轉到 $a_{n+1} - \alpha a_n$ 的一個一項循環數列。於是便有一九八零年香港高級程度考試純粹數學卷一的第四題:

II.(a) 若數列

$$y_1, y_2, y_3, \ldots$$

的項滿足

$$y_k = Ay_{k-1} + B \quad (k \geq 2)$$

之關係, 其中 A, B 爲與 k 無關之常數而 $A \neq 1$。作出以 y_1, A, B 及 k 表 $y_k (k \geq 2)$ 之式的猜想, 並證明之。

(b) 數列

$$x_0, x_1, x_2, \ldots$$

之項滿足

$$x_k = (a+b)x_{k-1} - abx_{k-2} \quad (k \geq 2)$$

其中 a, b 爲與 k 無關的常數而 $a \neq b$。

(i) 以 $(x_1 - ax_0), b$ 及 k 表 $x_k - ax_{k-1} (k \geq 2)$。

(ii) 利用 (a) 部, 以 x_0, x_1, a, b 及 k 表 $x_k (k \geq 2)$。

(c) 若數列

$$x_0, x_1, x_2, \ldots$$

的項滿足關係

$$x_k = \frac{1}{3}x_{k-1} + \frac{2}{3}x_{k-2} \ (k \geq 2)$$

以 x_0 及 x_1 表 $\lim_{k\to\infty} x_k$。

如上所述, 擬題者把 (a) 部之引理抽出, 又把 $x^2+px-q=0$ 之方程變成具有 a,b 二根之 $x^2+(a+b)x-ab=0$, 避免了 α 與 β 用隱含方式定義, 題目調較至較淺易的程度。

同卷第五題 (80ALPMI-5) 亦類似, 此爲三次方程之代數解。

III.(a)(i) 設 $\omega^3=1$ 及 $\omega\neq 1$。證明

$$x^3-3uvx-(u^3+v^3)$$

可分解成

$$(x-u-v)(x-\omega u-\omega^2 v)(x-\omega^2 u-\omega v)。$$

(ii) 求聯立方程

$$\begin{aligned} u^3+v^3&=6\\ uv&=2 \end{aligned}$$

之解, 以之, 求

$$x^3-6x-6=0$$

之解。

(b) 給出

$$x^3+px+q=0 \qquad (*)$$

(i) 證明, 若 $(*)$ 有重根, 則有

$$27q^2+4p^3=0$$

(ii) 利用 (a)(ii) 之方法, 求證, 若

$$27q^2+4p^3=0,$$

則 $(*)$ 有重根。

調較題目之深度

這種「引理—主要結果—應用於特例」一時變成流行的擬題模式。上面第 II 題的 (a)、(b)、(c) 三部便體現了這個典型。然而, 不少有名數學結果的證明未必在短短的一道試題可以完成。故除了丟去 (c) 外, 還得想其他辦法, 把題目調較至適當之深度。

數學中題中符號出現的多寡及結果之廣義程度每能決定數題的深淺。上面 III(a) 中, 便只集中 $x^3-6x-6=0$ 的特定方程式, 雖然其方法可用作解決形如 $x^3+px+q=0$ 方程及推廣至一般的三次方程者。這有效地避免題目有過深過繁的情況。

以下更是一例。衆所周知, 對於空間內兩不相交直線必能找到一平面使得兩線在該平面上之投影平行。要證明之, 可推到最廣義情況, 設兩線爲

$$\begin{aligned} L:\underline{x}&=\underline{a}+t(\underline{n}+\underline{q}),\\ L':\underline{x}&=\underline{a}'+t(\underline{n}+\underline{q}'), \end{aligned}$$

其中 $\underline{n}\cdot\underline{q}=\underline{n}\cdot\underline{q}'=0$ 及 $\underline{a},\underline{a}'\in\pi:\underline{x}\cdot\underline{n}=p$。$L$ 與 L' 在 π 的投影分別爲 $\underline{x}=\underline{a}+t\underline{q}$ 及 $\underline{x}=\underline{a}'+t\underline{q}'$。若 $\underline{a},\underline{a}'$ 爲 L 與 L' 之間最短距離之兩點, 則可證明 $\underline{q}//\underline{q}'$。

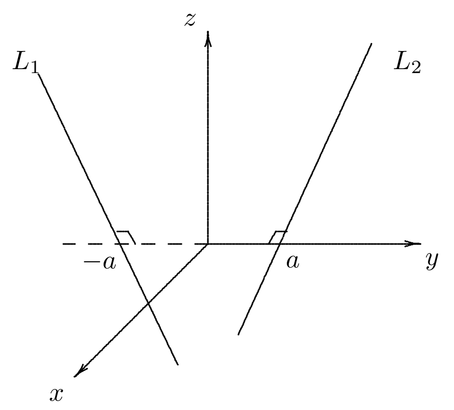
如此的模式是很難調較至適當的深度的。涉及的符號 (參數) 過多 ($\underline{a}$, $\underline{a}'$, $\underline{n}$, $\underline{q}$, $\underline{q}'$, p) 爲擬題之致命傷。於是, 又從另一手法擬題, 即以設置特別的坐標系統使各方程變得簡單。

我們設置坐標使得 L_1 與 L_2 之最短距離在 $(0,-a,0)$ 與 $(0,a,0)$ 達到。故 L_1 與 L_2 之方程十分簡單:

$$L_1: \begin{cases} x = nt \\ y = -a \\ z = nt \end{cases}$$

$$L_2: \begin{cases} x = pt \\ y = a \\ z = qt \end{cases},$$

其在 xy 平面的投影分別是 $y=-a$ 及 $y=a$, 故平行。



圖一

可是, 這樣的擬題則犯了更難處理的致命傷! 上題的運算部份不多。主要在於能看出坐標特別之處, 並從 L_1, L_2, 的最短距離性質看出 L_1 與 L_2 和 y 軸均垂直。故此便出現了看得出的考生拿全分、看不出便一分也沒有的情況。這種低的分野度是擬題最該避免的。

有效的調較方法亦可從廣義 — 特定、抽象 — 具體中想辦法。最後便有以下一題 (89ALPMII-12):

IV.(a) 點 $R(x,y,z)$ 之位置向量以 $\underline{r}=x\underline{i}+y\underline{j}+z\underline{k}$ 表示。於圖 (圖二) 中, $R_0(x_0,y_0,z_0)$ 爲於 $\pi:\underline{r}\cdot\underline{n}=\rho$ 上一點。線 $\ell:\underline{r}=\underline{r}_0+t\underline{a}$, $t\in R$, 其中 $\underline{r}_0=x_0\underline{i}+y_0\underline{j}+z_0\underline{k}$ 乃穿過 R_0 而不存在於 π 上。證明 ℓ 於 π 上之投影爲

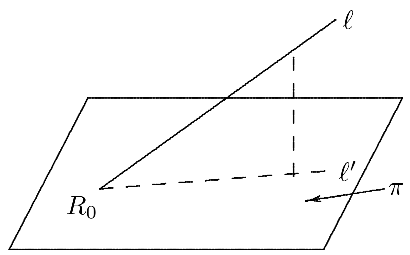
$$\ell':\underline{r}=\underline{r}_0+\underline{t}(\underline{a}-\frac{a\cdot n}{n\cdot n}\underline{n}),\quad t\in R。$$

(b) 考慮線

$$\ell_1: \begin{cases} x=-a-2t \\ y=3+3t \qquad t\in R \\ z=1+t \end{cases}$$

及

$$\ell_2: \begin{cases} x=2-8t \\ y=19t \qquad t\in R \\ z=2+4t \end{cases}$$



圖二

及平面 $\pi_1: 4x+y-2z-4=0$。

(i) 設 P_1 與 P_2 爲 π 相交 ℓ_1 與 ℓ_2 之兩點。求 P_1 與 P_2 並證明線段 P_1P_2 與 ℓ_1 及 ℓ_2 均垂直。

(ii) 證明 ℓ_1 與 ℓ_2 於 π 之投影平行。

我們早已知道 $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots$ 之算法, 主要利用部份份數, 得出

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots$$

$$=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots$$

$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$等「剛巧」相約, 故得出極限為1。

$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\cdots$ 之算法亦類似。問題是, 是否所有類似數列, 分解成部份分數後, 一定可以相約而得出極限呢? 又何以有此現象? 以

$$\frac{1}{(ax+b_1)(ax+b_2)(ax+b_3)(ax+b_4)}$$
$$\equiv\sum_{r=1}^{4}\frac{A_r}{ax+b_r}$$

為例, 通分母後, 得

$$\begin{aligned}1\equiv\ & A_1(ax+b_2)(ax+b_3)(ax+b_4)\\ &+A_2(ax+b_1)(ax+b_3)(ax+b_4)\\ &+A_3(ax+b_2)(ax+b_2)(ax+b_4)\\ &+A_4(ax+b_2)(ax+b_2)(ax+b_3)\end{aligned}$$

比較兩邊 x^3 的係數便得出 $A_1+A_2+A_3+A_4=0$。這即是相約的原因。

由此, 可算出複雜的級數, 如

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(an+b)(an+3a+b)(an+4a+b)(an+5a+b)}$$

等。但這同樣是需要調較的。方法亦是用具體數字以減低符號之數量。故有以下一題 (85ALPMI-3):

V.(a) 設 a_1,a_2,a_3 為各各不同之實數。假設 $f(x)$ 為冪小於 $n-1$ 之多項式。若

$$\frac{f(x)}{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n)}$$

分解成部份分數為

$$\frac{c_1}{x-a_1}+\frac{c_2}{x+a_2}+\cdots+\frac{c_n}{x+a_n}。$$

證明 $c_1+c_2+\cdots+c_n=0$。

(b) 設

$$F(x)=\frac{px+q}{(x+a)(x+a+1)(x+a+2)}$$

分解成部份分數為

$$\frac{b_1}{x+a_1}+\frac{b_2}{x+a_2}+\cdots+\frac{b_3}{x+a+2}。$$

證明對於 $N>3$,

$$\sum_{k=1}^{N}F(k)=\frac{b_1}{1+a}+\frac{b_1+b_2}{2+a}+\frac{b_2+b_3}{N+a+1}+\frac{b_3}{N+a+2}。$$

(c) 利用 (b), 或其他方法, 計算

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)}。$$

利用等價定義調較深度

數學上的不少定義都可用兩個等價命題 p、q 而定。若以 p 作定義, q 便為定理; 以 q 為定義, 則 p 是定理。Tcheby-cheff 多項式便是一例。它可用 $P_n(x)=\cos(n\cos^{-1}x)$ 作定義, 等價地, 亦可由一個循環關係 $P_{n+1}(x)=2xP_n(x)-P_{n-1}(x)$ 出發。前者當然較直接, 但若要證明 P_n 為一冪 n 之多項式, 則後者會較易。以擬題的角度來看, 選擇適當的出發點亦可調較題目的深度。

以下便分別是 82ALPMII-2 和 85ALPMII-5。要注意兩者之佔分是不同的。

VI.(佔十七分)

設 $T_n(x)=\cos(n\arccos x)$, 其中 $-1\leq x\leq 1$, $n=0,1,2,\ldots$

(a) 證明 $T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x)$, 由此證明 $T_n(x)$ 爲一冪 n、對於 x 之多項式、其首項係數爲 2^{n-1}, 其中 $n=1,2\ldots$。

(b) 利用第摩弗定理, 決定

$$\cos^n\theta=\sum_{k=0}^{n}a_k\cos(n-2/k)\theta$$

中之 $a_k(k=0,1,2,\ldots,n)$。

(c) 證明 $x^n=\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}C_k^nT_{n-2k(x)}$, 其中 $n=1,3,5,\ldots$。

VII.(佔十四分)

設 x_1 及 x_2 爲二次方程 $x^2-2tx+1=0$, 其中 $-1\le x\le 1$, 之二根。定義 $F_n(t)=\frac{1}{2}(x_1^n+x_2^n)$, 其中 $n=0,1,2,3,\ldots$。

(a) 證明對於 $n\ge 1$,

$$F_{n+1}(t)=2tF_n(t)-F_{n-1}(t)。$$

由此, 或用其他方法, 推出 $F_n(t)$ 爲一冪 n, 對於 t 的多項式, 其首項係數爲 2^{n-1}。

(b) 利用數學歸納法, 或用其他方法, 證明 $F_n(t)=\cos[n\cos^{-1}t]$, 由此證明

$$\int_0^\pi F_m(\cos\theta)F_n(\cos\theta)d\theta
=\begin{cases}0 & 若\ m\ne n,\\ \pi & 若\ m=n=0,\\ \frac{\pi}{2} & 若\ m=n>0。\end{cases}$$

改動條件以求變化

學生能遷移學過的技巧到類似的題目最能顯示其理解程度, 故將一些常見題目的條件改動則能擬出學生處理非常規性的能力。比如回折點爲常見的題目, 但一些學生只會背誦成規。

$$f'(x)=0:轉折點\begin{cases}f''<0 & 最大值\\ f''=0 & 回折點\\ f''>0 & 最小值\end{cases},$$

然而一些回折點可以有 $f'(x)\ne 0$。故從 $f'(x)=0$ 各點中希望找出回折點便會落空。$f(x)=\frac{x^2(x+7)}{x-1}$ 便是一例 $(x=-1)$。

89ALPMII-10之 $f(x)=\frac{x(x^2+9)}{x^2+1}$又是一例 $(x=0)$。再者, 回折點還可以根本沒有導數。回折點只是曲線上一點, 其切線跨過曲線 (Wong, 1988)。87PMII-7便是針對這個性質:

VIII. 設 $f(x)=\frac{x|x|(x+7)}{x^2+1}$, 其中 $x\in R$ 及 $x\ne 1$。

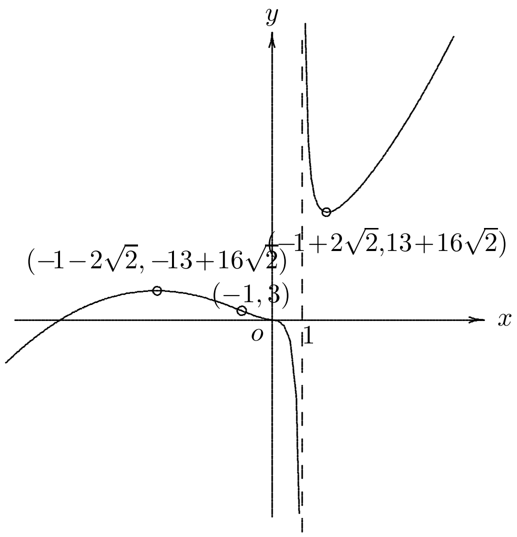
(a) 求 $f''(x)$, 若 $x\ne 1$。

(b) (i) 求 $f(x)$ 之局部極大、極小值及漸近線。

(ii) 證明 $(-1,3)$ 及 (0,0) 爲所有的回折點。

(c) 描繪 $f(x)$ 之曲線, 並標名各極點、回折點、漸近線及截點。

該圖見於圖三。



圖三

m 元集到 n 元集滿射數量向爲人所知, 利用容包原理, 可得出其爲 $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_k^n k^m$。但直接擬題頗覺繁複。以 n 書放進 n 架爲例, 若其中 p 個書架空置 (即 n 元集到 $(n-p)$ 元集之滿射) 且 $p=1$, 想像將其中二書包在一起的方式, 問題頓爲簡化 (Lau & Wong,1986)。87ALPMI-4即爲:

IX. 今有 $n\,(n>1)$ 不同的箱以安放最多 $n+2$ 本書。求以下概率:

(a) n 本不同的書隨機安放而無一箱空置。

(a) n 本不同的書隨機安放而恰有一箱空置。

(a) $n+1$ 本不同的書隨機安放而無一箱空置。

(a) $n+2$ 本不同的書隨機安放而無一箱空置。

(a) $n+1$ 本不同的書隨機安放而恰有一箱空置。

讓考生多點發揮

對這類結構題目的批評, 除了不能考核選取適當解題策略之能力外, 是既定方法桎梏了考生的思考。考生的任務不只要解決擬出的題目, 更要在短時間內觸摸擬題者採用的特定解題方式。一題多解既是數學學習中重要一環 (黃, 1980), 一些短題目便具有放寬結構性的空間。83ALPMII-1的 (c) 部: 求 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\{\cos\frac{\pi}{n}+\cos\frac{2\pi}{n}+\cdots+\cos\frac{(n-1)\pi}{n}\}$ 便可利用以下方 法解決 (Wong, 1984, 1989):

1. 定積分:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\cos\frac{\pi}{n}+\cos\frac{2\pi}{n}+\cdots+\cos\frac{(n-1)\pi}{n})$$
$$=\lim_{n\to\infty}[\frac{1}{n}(\cos\frac{\pi}{n}+\cos\frac{2\pi}{n}+\cdots+\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+\cos\frac{\pi n}{n})-\frac{1}{n}]$$
$$=\int_0^1\cos(\pi x)dx-0=0。$$

2. 複數: 設

$$C=\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{k\pi}{n},\quad S=\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}.$$

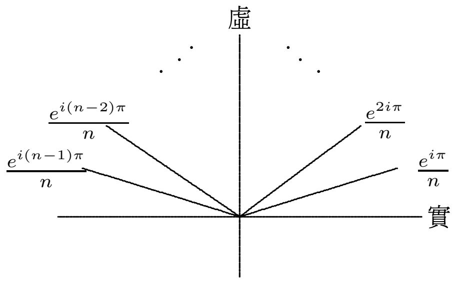
$$C+iS=\sum_{k=1}^{n-1}\exp(\frac{ik\pi}{n})$$
$$=\frac{\exp(\frac{i\pi}{n})-\exp(i\pi)}{\exp(\frac{i\pi}{n})-1}$$
$$=\frac{\exp(\frac{i\pi}{n})+1}{\exp(\frac{i\pi}{n})-1}$$
$$=\frac{1+\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}-1+i\sin\frac{\pi}{n}}$$
$$=\frac{2\cos^2\frac{\pi}{2\pi}+2i\cos\frac{\pi}{2n}\sin\frac{\pi}{n}}{-2\sin^2\frac{\pi}{2n}+2i\sin\frac{\pi}{2n}\cos\frac{\pi}{2n}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \cot\frac{\pi}{n}\frac{\exp(\frac{i\pi}{2n})}{\exp(\frac{i\pi}{2n}+\frac{\pi}{2})}\\
&= -i\cot\frac{\pi}{n}, \quad \text{故 } C=0。
\end{aligned}
$$

3. 代數法: 其實

$$
\begin{aligned}
\cos\frac{\pi}{n} &= -\cos\frac{(n-1)\pi}{n},\\
\cos\frac{2\pi}{n} &= -\cos\frac{(n-2)\pi}{n},\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

若 n 爲偶數, 則各項互相抵消, 若 n 爲奇數, 則剩回 $\cos\frac{\pi}{n}$, 亦等於0。



圖四

數學題向來較著重最後的解答, 要求解釋較爲少見。一九八七年香港高級程度考試應用數學科卷二便有以下一題 (第五題):

X.(a) 爲分析一項調查中獲得的數據, 統計學家常將數據於頻數表中分成組別。請描述列表過程的基本原理與步驟。

(b) 於某教學行業的一項薪酬調查中, 200 名隨機抽出的教師所得資料表示如下表。計算此頻數分佈之平均、中位數及標準差。略述如何詮釋其結果。

月薪 (\$)	頻數
500及1500以下	47
1500及2500以下	51
2500及3500以下	43
3500及4500以下	27
4500及5500以下	18
5500及6500以下	9
6500及7500以下	3
7500及8500以下	1
8500及9500以下	1

(c) 解釋何以若於上面研究利用幾何平均乃爲不當。

一九九四年之香港高級補充程度考試數學及統計科亦有如下的一題樣本試題 (第十題)。

XI. 在分析氣體中粒子運動的過程中, 一名科學家欲計算定積分

$$I_1=\int_0^1 e^{-x^2}dx$$

(a) 利用五區間梯形法則, 估計 I_1 之值至4個小數位。

(b) 其後, 該科學家欲計算另一定積分

$$I_2=\int_{-1}^1 e^{-x^2}dx$$

(i) 利用 (a) 部份對 I_1 之估計, 給出 I_2 至4 個小數位之估值。

(ii) 此科學家之助理宣稱若他於區間 $[-1,1]$, 利用梯形法則以五次區間或十次區間估計 I_2, 則兩個估值均較 (b)(i) 部得出之值準確。

你是否同意此說法? 請略作解釋。

(a) 於是, 該科學家繼而利用另一定積分

$$I_3 = \int_0^1 xe^{-x^2}dx$$

計算粒子的平均速度。利用代入 $y = -x^2$, 替該科學家計算 I_3, 其答案以 e 表之。

擬題生活化

在以往, 數學擬題較著重數學內容, 是否切合實際則不太理會。「某人以300ms^{-1}的速度走完 1760m, 問用了多久?」便是。事實上, 從日常生活中亦可找到擬題的素材, 例如從圖五的樓宇中, 可擬出如下的一題

圖五

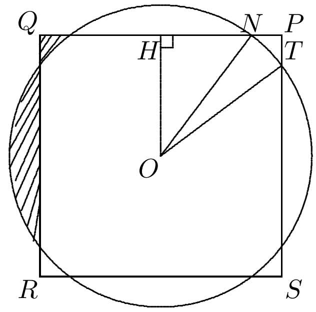
XII. 圖六所示: 單位圓之中心為 O, 其中 O 亦為正方形 $PQRS$ 之中心, 其邊長 $2x$。設 $\angle NOM = \phi$。

(a) 以 ϕ 求 $\triangle NOM$ 及 $\triangle NOT$ 之面積。

(b) 以 ϕ 求畫上影線之面積 $K(\phi)$。

(c) 繪出 $K(\phi)$ 之圖像。求 ϕ 之定義域。

(d) 求 ϕ 使得 $K(\phi)$ 為最小。該時 x的值為何?



圖六

近年公開試的題目亦多生活化。以下即是一九九三年香港中學會考數學科卷一第十及十三題。前者涉及馬寅初之人口理論, 後者則涉及單議席單票之選舉制度。

XIII. 考慮某國的糧食產量及人口問題。該國在第一年裏, 糧食的年產量為8百萬公噸, 第一年年終時的人口為2百萬。設糧食的年產量每年增加 1百萬公噸, 人口則每年增加6%。

(a) 求該國在

(i) 第三年裏、

(ii) 第 n 年裏

的糧食年產量 (答案以百萬公噸計)。

(b) 求首25年內糧食的總產量 (答案以百萬公噸計)。

(c) 求該國在

(i) 第三年年終時、

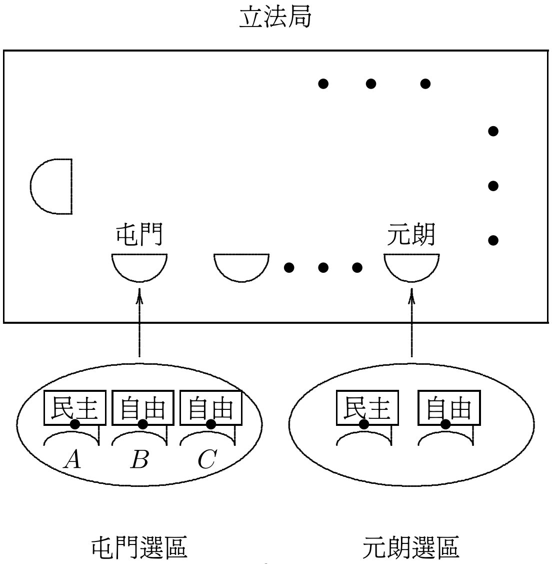
(ii) 第 n 年年終時

的人口。

(d) 從第一年年終起計, 問最少在幾年內人口會增加一倍。

(e) 若「糧食人均年產量」(即某年的糧食年產量/當年年終時的人口) 小於0.2公噸, 則該國會面臨糧食短缺。試估計在第 100 年的年終時該國會否面臨糧食短缺。

XIV. 在立法局的選舉中, 每一選區的登記選民, 只能夠在自己所屬選區的候選人中, 選擇一位, 投他一票。在每一個選區中獲得最多有效票數的候選人則贏得該區的選舉。在屯門選區中, 有 A、B、C 三個候選人。A 隸屬於一個名爲「民主派」的政黨, B和 C 則隸屬於一個名爲「自由派」的政黨。



圖七

在元朗選區中, 有 P, Q 兩個候選人, P 屬於「民主派」而 Q 則屬於「自由派」。

(a) 根據選舉前的一次調查, A、B、C 各人贏得所屬選區選舉的概率分別爲 0.65、0.25、0.1, 而 P、Q 贏得所屬選區選舉的概率則分別爲 0.45、0.55。從以上資料計算下列的概率:

(i)「民主派」的候選人在「屯門」和「元朗」兩區的選舉都獲勝,

(ii)「屯門」和「元朗」兩區選舉都由同一個政黨的候選人獲勝。

(b) 選舉後點算選票, 在屯門選區的 40,000 張有效選票中, A 取得 70%, B 取得 20%, C 取得 10%; 在元朗選區的 20,000張有效選票中, P 取得40%,Q 取得60%。若隨機從兩個選區的60,000張有效選票中抽出兩張 (先抽一張, 放回後再抽一張), 求下列的概率:

(i) 兩張選票都來自「屯門」選區, 並且都投「民主派」候選人,

(ii) 兩張選票都投「民主派」候選人,

(iii) 兩張選票分別投不同政黨的候選人。

標準參照測試

近年電腦普及, 不少學校開始用之作試後分析。例如某一學生或某班的成績有否下降。但當我們一開始分析的嘗試, 便會發覺以現時的擬題方式, 是很難作以上比較的。

以比較某特定學生在第一與第二次考試之成績爲例, 首先, 兩個考試範圍與深度都不同, 該學生的分數增加了, 未必代表他的學習已有進步。更重要的, 某生在考試內的不及格

只能顯示他的總體不理想, 我們是無法得知他那個課題出了問題, 又出了甚麼樣的學習問題。

傳統之常模參照測試之主要目的是確定某特定考生在群體中的相對位置。Glaser(1963) 則提出標準參照的評核方式 (Popham,1987)。簡言之, 它就如考取駕駛執照般, 不是與一些「對手」比較, 而是須達至某些基本要求方算及格。英國中學階段終結考試的中學教育一般證書考試 (GCSE: General Certificate of Secondary Education) 便是以標準參照測試原則擬定的。以下便是1988年卷二的一例 (括號中所註爲測試的標準):

XV. 8, 12, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 24, 32。由上述的十個數字, 選出

(a) (任何) 一個素數, (素數之認識)
(b) 一個平方數, (平方數之認識)
(c) 7的一個倍數, (倍數的認識)
(d) 64的平方根, (平方根)
(e) 30的一個因數, (因數)
(f) 3, 4, 6, 9, 13... 之下一項。(數列規律之認定)

此外, 倫敦大學考試的習作評核計劃 (Course Assessment) 亦是對照英國「國家課程」而斷定程度的, 亦是一種標準參照測試。以下便是 1994年的一道評核活動。

XVI. 收費電話問題

一個公眾收費電話只接受 $10p$, $20p$, $50p$ 和 $£1(£1 = 100p)$ 的硬幣。一位女士只有大量的 $10p$ 和 $20p$ 硬幣。這些硬幣可以任何次序放進電話。例如她需要打一個 $50p$ 的電話, 她可以用以下任何一種次序投入硬幣:

$20p, 20p, 10p$
或 $10p, 20p, 20p$
或 $10p, 10p, 20p, 10p$
及有更多之辦法。

1. 她欲打一個需費 $£1$ 的電話。問: 她有多少投幣的方法?
2. 一位男士隨此女士進入電話亭。他只有大量 $50p$ 和 $10p$ 硬幣。他欲打一個 $£2$ 的電話。他有多少投幣的方法?
3. 寫出和辨明1.2. 部份所得結果之推廣。

此題是要測試「應用」,「數學傳意」和「推理、邏輯與証明」三個範疇。它們在考試範圍中都有再細緻的能力表現劃分。以「應用」範疇爲例, 分爲「解答問題遭遇困難時找出克服方法」、「認定及得出解題所需之資料」、「以分析或較細和可處理程序的方式執行工作」、「提出自身問題或於既定處境內設計工作」、「於數學探視或用數學解決日常生活問題時追尋新的思路」及「工作時對所作選擇給出邏輯性之解釋」等。

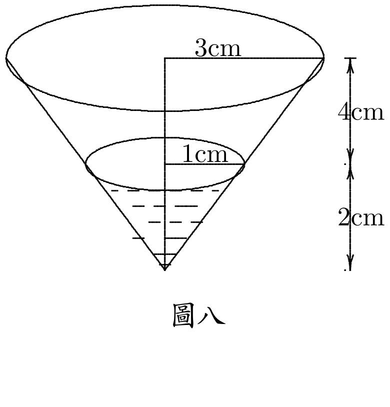
以上題而言, 若能表現基本認識並列出三種組合50p 的方法, 則算達到「解答問題遭遇困難時找出克服方法」。若得出所有50p組合的八種方法是達到「認定及得出解題所需之資料」。而若嘗試少於50p 的方法或以有系統方式得出直至 $10p$ 組合的正確方法則算是達到「以分析或較細和可處理程序的方式執行工作」等等。

真實能力 (Authentic Ability) 評核的探討

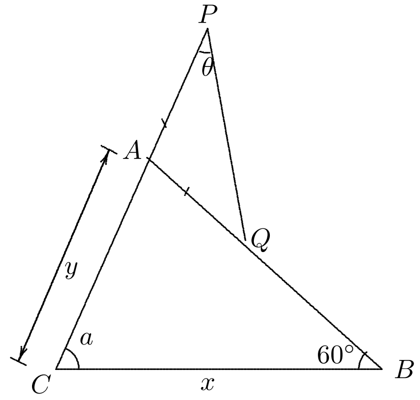
上述標準參照測試是不滿足於只得到一個分數、一個等級。傳統測試只是把衆多考生用某種方式分辨開來。近年便有「眞實能力評核」的提出。例如利用非常規性題目, 探察內在能力和不同層次的理解程度等。香港「目標爲本課程」便提出了評估形式可包括測驗、筆試、面試、口頭及書面報告、短文、實用課業、專題設計、短答題、正式或非正式觀察學習過程、口試、討論及學生功課樣本匣等 (香港教育署, 1994, 頁32)。現就非常規題與內在能力兩者舉例說明。

有認爲非常規題能減輕以背誦準備考試。資料過多與不足即是常見的非常規題, 皆因大部份數題的已知資料恰好足夠得出答案的。然現實的問題解決, 都須在茫茫衆多材料中, 選出合用的資訊來。以下兩題便是資料過多與不足的例 (Wong, 1993), 詳可參考 Low 和 Over(1989)。

XVII. 圖八中, 水注入圓錐體溶溶至半高。已知整個圓錐體積爲 18π , 求已注入水的體積。問 1cm, 2cm, 3cm, 4cm中那些資料不需動用?



圖八



圖九

XVIII. 圖九中, $B = 60°$。$\triangle APQ$ 爲一等腰三角形。求 θ。

(a) 若不能求出 θ 之準確値, 須加何種資料才可算出之?

(b) 縱現不能找出準確値, 對於 θ 可否得出些甚麼結論 ?

(c) Q 之位置 (是否與 B 重疊) 對於計算 θ 是否重要?

至於內在能力的評核、以空間想像力和解題能力爲較常見, 詳見黃 (1980, 1990)。此外, 亦有嘗試評核各種能力的不同層次者。將學習 (及評核) 目的分層並不新鮮, 其中以 Bloom(1956) 的教育目標分類爲最著名。其後, Dilts(1970) 等特別爲數學建立了匹茲堡智性行爲動詞, 而鄭肇楨曾利用它於華人地區進行了不少研究 (鄭,1980; Cheng, 1977, 1979)。Van Hiele(1959) 則有有名的幾何學習層次。而這些均給出了擬題的框架。至於大量構作題庫, 最爲人注目的首推英國之 Chelsea 診斷測驗和美國與澳洲學者發展出來的 SOLO 測試。

Chelsea 診斷性數學測驗 (Hart, Brown, Kerslake, Küchemann & Ruddock, 1985) 爲倫敦大學 Chelsea 學院科學教育中心於一九七四至七九年間建立的，其成果曾 於 Hart(1985) 發表。其作用包括斷定理解層次與常見誤解兩方面，課題包括代數、分數、圖象、度量、四則、位值與分數、比與例比、反映與旋轉及向量等，各題之劃分是透過題目回應分析所斷定。至於常見誤解，以代數的17(a) 爲例:

馬利之基本薪金爲每周 £20 。

她的超時工作以每小時 £2 計。

設 h 爲她超時工作的時間，並設 W 爲她的 總收入 (以 £ 計)，寫出連接 W 和 h 的方程式。

評定標準:

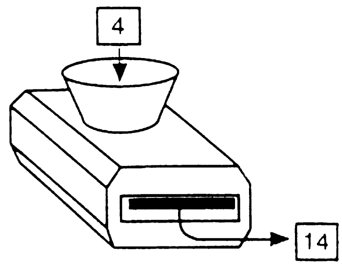
答案	診斷
$20+2h$ $W+2h$	模稜兩可
$20W+2h$ $W=10h$ $22=W+h$(即把 W 當作20, h當作2)	把代號代入特定數字 (例如已知 $e+f=8$, 就斷定$e+f+g=4+4+4=12$)
$W=20+h$ $20+h$ $W+h$	代號當作物體 (例如已知一磅等於11法朗就寫成 $p=11f$)

其他包括「沒有動用代號」(例如把4+3n 寫成7)、「把代號當作特定未知數」(如把 $3n+4$ 寫成 $7n$) 等等。

Chelsea 診斷測驗是由題庫按題項回應分析而製訂的，每一課題的各層大抵只代表了不同的難度，不似 SOLO 試題般的有層構性意義。

SOLO 爲「對學習成果進行規劃性觀察」(Structured Observation of Learning Outcome) 的縮寫，由澳洲的 Collis 及 Biggs(1982) 所建立，不是單針對數學的。簡言之，層次之劃分是同時考慮到抽象程度和有關項目結構上的複雜程度。於是分出了前結構、單結構、多結構、關係式和延展抽象等五個水平 (Level)，詳見 Biggs(1987)。

其後，Collis, Romberg 與 Jurdak (1986) 一文舉出了數學的例子：圖十所示爲一個數字轉換器，將任何輸入的數字先乘3再加2。故若輸入4，輸出爲14。以下是不同水平的問題:



圖十

單結構: 若輸出的爲4, 輸入的是甚麼?

多結構: 若輸入5, 輸出的是甚麼?

關係式: 若輸出爲41, 輸入的又是甚麼?

延展抽象: 若輸入 y、輸出是 x 時，寫出 x 與 y 間之公式。

Collis 與 Romberg 於1992年出版了第一套的按 SOLO 而寫的數學題庫, 可惜只有十題。然而, 不少文獻均反映 SOLO 測試備受注視的趨勢。香港的「目標課程爲本課程」的評核設計過程中, 亦有人提出參照 SOLO 作評核的想法 (Biggs, 1995b)。

近年更有人將 SOLO 納入 Rasch 模型去研究題庫建立之可行性 (Wilson, 1989)。即除了從理論架構去擬題外, 更用實證方式去確立效度 (Validity)。不過 Biggs (1995a, 1995b) 有不同之看法, 他提出應從測試理論 (Test Theory) 遷移到開拓蘊含學習階次成長意義的質化測試, 並指出這應是 SOLO 測試的發展路向。

結論

全班分數均超過80分可以嗎? 在常模參照測試的區分度而言, 這是難以接受的, 但若學生不能在某個階段掌握, 又怎能進入下一階段呢? 既掌握了, 整班超過80分又有何不可? 故過往在學習的最後階段 (如大考) 設一個「一次定生死」考核的想法是隱含著只選拔那些不只做得快而準, 且在特定試場環境和限時壓力下均能做得好的一小撮之想法。如可利用評核結果 (意即成績對學生帶來的後果) 比評核方式更具決定性: 評核之目的究竟是要預測未來表現 (performance predictor), 決定是否提供學習機會 (aptitude test), 還是診斷學生之學習結果等 (Ebel & Frisbie, 1965, p. 100-113)。然而, 隨著社會之轉型, 評核之作用理應考究學習者是否有進入下一階段之足夠基礎, 從這觀點出發, 由紙與筆的作答, 平時的答問甚至家課等均能達到回饋的效果。總之, 數學評核已變得多元化, 由分辨學生高下轉而瞭解學生的學習困難, 從以作出回饋與調節, 促進學習。擬題亦須配合以發揮更大的作用。

參考文獻

1. 香港教育署 (1994),「目標爲本課程簡介」, 香港: 政府。
2. 黃毅英 (1980), 解題與數學教育,「數學傳播」54期, 71-81。
3. 黃毅英 (1990), 立體數學遊戲與空間想像力之訓練,「數學傳播」56期78-96。
4. 鄭肇楨 (1980), 數學學習: 智性行爲鏈研究,「中大教育學報」8卷1-7。
5. 鍾宇平 (1985), 評鑑與測量, 於陸鴻基和李偉端 (編)「教師工作的理論與方法」, 香港, 廣角鏡出版社。
6. Biggs, J.B. (1987), SOLO 分類系統: 可作爲一個課發展與評準爲本的評估模式, 香港教育研究學會第四屆週年研討會發表論文。
7. Bigg, J. (1995a), Assessing for learning: some dimensions underlying new approaches to educational assessment, The Alberta Journal of Educational Research, 41, 1-17.
8. Bigg, J. (1995b), Assumptions underlying new approaches to educational assessment: Implication for Hong Kong, Curriculum Forum, 4(2), 2-22.
9. Bloom, B.S. (Ed.) (1956), Taxonomy of Educational Objectives, Handbook I: Cognitive Domain, New York: David Mckay Company, Inc..
10. Cheng, S.C. (1977), A design for a coding system for recording verbal cognitive behavior in mathematics classes, Education Journal, 6, 187-195.
11. Cheng, S.C .(1979), An analysis of the cognitive level in mathematics intraction, Eduction Journal, 7, 53-60.
12. Collis, K.F., Romberg, T.A., & Jurdak, M.E. (1986), A technique for assessing mathematical problem-solving ability, Jounal for Research in Mathematics Education, 17, 206-221.
13. Dilts, R.G. (1970), Development and application of a cognition verb list to facilitate analysis of mathematics textbook. Unpublished Ph.D. dissertation, Pittsburgh: University of Pittsburgh.
14. Ebel, R.L., & Frisbie, D.A. (1965), Validity: Interpretation and use, In Essentials of Educational Measurement, p. 100-113, New Jersey: Prentice Hall.

15. Glaser, R. (1963), Instructional technology and the measurement of learning outcomes, American Psychologist, 18, 519-522.
16. Hart, K. (Ed.) (1981), Children's Understanding of Mathematics: 11-16. London: John Murray (Publishers) Ltd.
17. Hart, K., Brown, M., Kerslake, D., Küchemann, D., & Ruddock, G. (1985), Chelsea Diagnostic Mathematics Tests: Teacher's guide, Berkshire: NFER-Nelson.
18. International Coordinating Centre, The Third International Mathematics and Science Study (1991), Mathematics Curriculum Framework, Vanconver, Canada: Author.
19. Lau, K.W., & Wong, N.Y. (1986), An occupancy problem in probability, Mathematics Bulletin, 11, 35-37,
20. Low, R. & Over, R. (1989), Detection of missing and irrelevant information within algebraic story problems, British Journal of Educational Psychology, 59, 296-305.
21. Popham, W.J. (1987), Criterion-referenced Measurement, Engleword Cliffs, N.J.: Prentice-Hall.
22. Van Hiele, P.M. (1957), De problematiek van her inzicht (thesis), The Netherlands: Utrecht.
23. Wilson, M. (1989), A comparison of deterministic and probabilistic approaches to measuring learning structures, Australian Journal of Education, 33, 127-140.
24. Wong, N.Y. (1984), $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{\pi}{n}=$? Mathematics Bulletin, 8, 40-41.
25. Wong, N.Y. (1988), Points of inflection, Mathematics Bulletin, 15, 19.
26. Wong, N.Y. (1989), General guideline to answering advanced level pure mathematics examination questions, Mathematics Bulletin, 18, 14-35.
27. Wong, N.Y. (1992), Different approaches to a single problem in mathematical problem solving: The arithmetic mean-geometric mean inequality, Hong Kong Science Teachers Journal, 18(2), 50-70.
28. Wong, N.Y. (1993), Enhancing students' mathematics problem solving ability in day-to-day teaching, Curriculum Forum, 3(3), 24-33.

—本文作者任教於香港中文大學課程與教學學系—