關於“等平方和”的插配及其有關問題

宋秉信

摘要: 本文根據談祥柏教授提出的數論中的一個問題:“給 m、$n \in N$, 任意兩組位數全爲 m 的整數 $\{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ 與 $\{y_1, y_2, \ldots y_n\}$, 使得滿足: $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i$ 與 $\sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2$, 那麼將每個數自左至右 (或自右至右) 逐次抹去一位、兩位, 直至剩下最後一位, 左右兩邊的數的平方和總是保持相等。” 提出解決此問題的充份條件, 並利用所給之定理構造出滿足上述問題的具體例題。這充份條件即定理一、二、三中所給的條件。

談祥柏教授在「天下之奇」一文中提出如下一個問題:

等式兩邊有兩組互不相同, 但位數相同的自然數, 它們一定滿足:

1. 等式兩邊各數相加, 其和相等;
2. 等式兩邊各數平方之和相等,
3. 將每個數自左至右逐次抹去一位, 兩位、三位, 直至剩下個位數, 左右兩邊的平方和總是保持相等;
4. 將每個數自右至左逐次抹一位、兩位、三位, 直至剩下最後一位, 左右兩邊的平方和也是保持相等。

談先生所提出的問題確實是一奇。如 123789、561945、642864 與 242868、323787、761943 就是符合上述條件的兩組數。在本文中, 爲討論方便起見, 我們約定滿足上述條件的兩組數爲“符合等平方和”的兩組數。同時, 我們也只限於討論符合等平方和的兩組數的插配問題及其有關問題。

一. 基本定理

爲了論述之方便, 我們引入記號:

$$[x_{i1}x_{i2}x_{i3}\cdots x_{in}] = \sum 10^{n-k}x_{ik}$$

$$[y_{i1}y_{i2}y_{i3}\cdots y_{in}] = \sum 10^{n-k}y_{ik}$$

其中 x_{ik}, y_{ik} 均爲整數, $i, k, n \in N$, 且 $0 \le x_{ik}, y_{ik} \le 9$, 此符號是爲了分別自然數的乘積。

定理一: 設 A_i、B_i、x_i、y_i 均爲小於10的自然數, $i = 1, 2, 3$, 若 $\sum\limits_{i=1}^{3} A_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{3} B_i^2$, $\sum\limits_{i=1}^{3} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{3} y_i^2$, 那麼, 兩組二位自然數 $[A_1x_1]$、$[A_2x_2]$、$[A_3x_3]$ 與 $[B_1y_1]$、$[B_2y_2]$、$[B_3y_3]$ 符合等平方和充要條件是:

$A_1x_1+A_2x_2+A_3x_3=B_1y_1+B_2y_2+B_3y_3$。

例1: 設$A_1=1$、$A_2=5$、$A_3=6$; $B_1=2$、$B_2=3$、$B_3=7$; $x_1=9$、$x_2=5$、$x_3=4$; $y_1=8$、$y_2=7$、$y_3=3$, 則 $[A_1x_1]$、$[A_1x_2]$、$[A_3x_3]$

與 $[B_1y_1]$、$[B_2y_2]$、$[B_3y_3]$ 爲符合等平方和的兩組數。

定理二 (前後插配): 設 A_i, B_i 均爲小於10的自然數, p_i, q_i 爲位數相同的自然數, 且 $\sum_{i=1}^n A_i^2 = \sum_{i=1}^n B_i^2$,
若 (1) $\sum_{i=1}^n A_ip_i = \sum_{i=1}^n B_iq_i$

(2) $p_1, p_2 \cdots p_n$ 與 $q_1, q_2 \cdots q_n$ 爲符合等平方和的兩組數。

則 $[A_1p1]$、$[A_2p_2] \cdots [A_np_n]$與$[B_1q_1]$、$[B_2q_2] \cdots [B_nq_n]$ 爲符合等平方和的兩組數。 $[p_1A_1]$、$[p_2A_2] \cdots [p_nA_n]$ 與 $[q_1B_1]$、$[q_2B_2] \cdots [q_nB_n]$ 也爲符合等平方和的兩組數。

例2: 設 $A_1 = 1, A_2 = 5, A_3 = 6$; $B_1 = 2, B_2 = 3, B_3 = 7$; $p_1 = 12, p_2 = 56, p_3 = 64$; $q_1 = 24, q_2 = 32, q_3 = 76$, 則

(1) $[A_1p_1]$、$[A_2p_2]$、$[A_3p_3]$ 與 $[B_1q_1]$、$[B_2q_2]$、$[B_3q_3]$ 爲符合等平方和的兩組數;

(2) $[p_1A_1]$、$[p_2A_2]$、$[p_3A_3]$ 與 $[q_1B_1]$、$[q_2B_2]$、$[q_3B_3]$ 也爲符合等平方和的兩組數。

證明: 由例一知 $\sum\limits_{i=1}^{3} A_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{3} B_i^2$, 根據定理二知, 121、565、646、與242、323、767爲符合等平方和的兩組數。

定理三 (中間插配): 設第一組數 $[x_{11}x_{12}]$、 $[x_{21}x_{22}]$、$[x_{31}x_{32}]$ 與第二組數 $[y_{11}y_{12}]$ 、 $[y_{21}y_{22}]$ 、 $[y_{31}y_{32}]$ 符合等平方和, 且 p_i, q_i 爲0或小於10的自然數 $(i = 1, 2, 3)$。

若 (1)$x_{11}p_1+x_{21}p_2+x_{31}p_3=y_{11}q_1+y_{21}q_2+y_{31}q_3$

$x_{12}p_1+x_{22}p_2+x_{32}p_3=y_{12}q_1+y_{22}q_2+y_{32}q_3$

(2) p_i 與 q_i 爲符合等平方和的兩組數, 則分別在所設的兩組數的各數中間插入 p_i 與 q_i, 構成新的兩組數。

$[x_{11}p_1x_{12}]$ 、$[x_{21}p_2x_{22}$ 、$[x_{31}p_3x_{32}]$ 與 $[y_{11}q_1y_{12}]$、$[y_{12}q_2y_{22}]$、$[y_{31}q_3y_{32}]$ 符合等平方和。

註: 定理中的 p_j 與 $q_j (j = 1, 2 \ldots n)$ 不論爲多少位, 只要位數相同, 又滿足定理中所要求的條件, 其結論仍成立。

例3: 設12、56、64與24、32、76爲符合等平方和的兩組數, $p_1 = 123$, $p_2 = 561$, $p_3 = 642$; $q_1 = 242$, $q_2 = 323$, $q_3 = 761$。則11232, 55616, 66424與22424, 33232, 77616爲符合等平方和的兩組數。

二. 插配方法

定義: 設 x_i 與 y_i, x_i' 與 y_i' 均爲符合等平方和 $(i = 1, 2, \ldots n)$, 將下標相同的兩個數按同一方式 (如將第一組數都擺放在左邊或都擺放在右邊), 配成兩組新的二位數的方法, 叫做順序插配法; 用下標之和爲 $(n + 1)$ 的兩個數相配, 叫做逆序插配法。

如 $[x_1x_1']$ 、$[x_2x_2'] \cdots [x_nx_n']$ 與 $[y_1y_1']$、$[y_2y_2'] \cdots [y_ny_n']$ 就是順序插配法插配而成的兩組數。

顯然, 如果有兩組數爲符合等平方和, 另兩組數也是符合等平方和, 只要它們滿足上述定理中的條件, 我們就可將這四組數通過插配而得出新的符合等平方和的兩組數來。

例4: 設1、5、6與2、3、7; 7、8、3與9、4、5爲兩組符合等平方和的兩組數。

根據順序插配法的定義, 而利用定理一、定理二可得到 17、58、63 與 29、34、75; 71、85、36 與 92、43、57; 19、54、65 與 27、38、73; 91、45、56 與 72、83、37 爲四組符合等平方和的兩組數。

爲了既能作順序插配又能作逆序插配, 我們只討論每個數皆爲一位數時, 等式兩邊各爲 n 個數的基本解的求法。

(1) 當等式兩邊爲一個數時、二個數時, 其基本解是顯然的。這裡討論當 $n=3$ 時。

令 $x_1=t, \quad y_1=t+r$

$x_2=t+s, \quad y_2=t+s-2r$

$x_3=t+2s-3r, \quad y_3=t+2s-2r$

當 t、r、s 爲允許範圍內的整數時, 可求得 205 對 x_1、x_2、x_3 與 y_1、y_2、y_3 的基本解。

如 1、5、6 與 2、3、7

1、6、8 與 2、4、9

7、8、3 與 9、4、5

當 $n=4$ 時, 可令

$x_1=t, \quad y_1=t+r$

$x_2=t+s, \quad y_2=t+s-r$

$x_3=t+2s-r, \quad y_3=t+2s-2r$

$x_4=t+3s-3r, \quad y_4=t+3s-2r$

在 t、s、r 允許取值的整數範圍內, 可求得 200 多對基本解。

如 1、3、4、4 與 2、2、3、5; 1、4、5、4 與 3、2、3、6; 1、5、6、4 與 4、2、3、7。

當 $n=5$ 時, 可令

$x_1=t, \quad y_1=t+1,$

$x_2=t+s+1, \quad y_2=t+s,$

$x_3=p, \quad y_3=p,$

$x_4=q+1, \quad y_4=q$

$x_5=g+5, \quad y_5=q+s+1$

在 t、s、p、g 允許取值的整數範圍內, 可求得 1000 對基本解。

如 1、6、2、4、7 與 2、5、2、3、8

1、7、2、4、8 與 2、6、2、3、9

6、9、2、4、5 與 7、8、2、3、6

$\ldots \qquad \ldots$

(2) 對於每個數皆爲一位數時, 等式兩邊的數字的個數 $n \geq 6 (n \in N)$ 時的情形。我們雖然仍可以利用解參數方程組的方法進行, 但由於參數的個數太多, 求它們的基本解勢必造成計算繁雜, 工作量極大, 只好另闢蹊徑, 利用疊加法來解決此問題。

事實上, 在上述所求的基本解的基礎上, 分別在等式兩邊疊加 $3m$ 個、或 $4m$ 個、或 $5t$ 個不相同的基本解, 可使等式兩邊達到 $(3m+4n+5t)$ 個數, 且這兩組數不相同。我們知道, 大於5的任何自然數都可表示爲 $3m+4n+5t$。所以便能很快地構造出等式兩邊爲任意個符合等平方和的兩組數。

由於選擇基本解的隨意性, 所以符合平方和的兩組數可達到任意時, 又由於基本解具有按順序插配和逆序插配後所得出的新的兩組數仍符合等平方和的性質。所以只要多次反複地用基本解作順序插配或逆序插配, 就可使數組的每個數達到任意位。

參考資料

1. 談祥柏,「天下之奇」。讀者文摘, 九二年第三期。

—本文作者任教於湘南湘潭教育學院—