整函數論淺介

楊重駿

前言

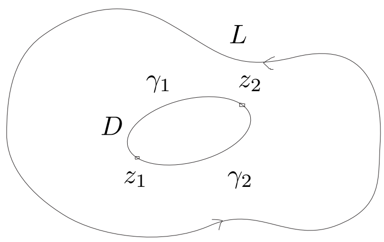
本文中字母 x, y 用來表實變數, i 爲所謂的虛數單位; $i^2 = -1$ 我們用字母 z 表複變數$= x + iy$, 以 x 爲實軸, y 爲虛軸所構成的平面就是一般所謂的複平面以 C 表之。一個複函數 $f(z)$ 是指由 C 到 $\overline{C}$ 的一函數。在 C 上若對任何兩點 $z_1 = x_1 + iy$, $z_2 = x_2 + iy_2$ 賦予一距離的量度 $|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, 則 C 在此量度下, 形成一量度空間 (metric space), 而一個虛數 $a + bi$; a, b 實數的絕對值 $|a+bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$ 也就可看爲該點到複平面 C 原點 $z = 0$ 的距離。有了這些距離及量度空間的性質, 複數或複函數也就如同實數或實函數一樣可以討論有關的極限、連續、微分、積分等概念。但這兩種函數仍有其本質上的許多差異, 特別是所謂的解析函數 (Analytic function) 和一般的實函數有著本質上的差別。我們稱定義在複平面 C 中開連通域 D 的複函數 $f(z)$ 爲解析的是指 f 的導函數 $f'(z)$ 在 D 上到處存在, 也即 f 在 D 上到處可微分的。當 $D = C$ 時, 我們就稱這樣的函數 f 爲整函數。現來看一個實函數 $g(x)$ 定義在實區間 $(-1, 1)$ 上, 如下:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & 1 > x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -\frac{x^2}{2}, & -1 < x < 0 \end{cases}$$

易驗證 g' 在整個閉區間 $(-1, 1)$ 上到處存在, 及

$$g'(x) = \begin{cases} x, & 1 > x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & -1 < x < 0 \end{cases}$$

但很明顯由圖形可見 g' 在 $x = 0$ 的導數即 $g''(0)$ 不存在。這種微分性質的間斷現象, 對解析函數來講是不會發生的。要說明這種本質性的存在, 必須得從複函數解析性 (可微分性) 的一些條件或結果來看。這方面最重要及基本的就是著名的歌西 (Cauchy) 定理及歌西積分表示式。



歌西 (Cauchy) 定理: 設複函數 $f(z)$ 在一單閉曲線 L 上及其內部爲 (單值) 解析函數, 則

$$\int_L f(z)dz = 0$$

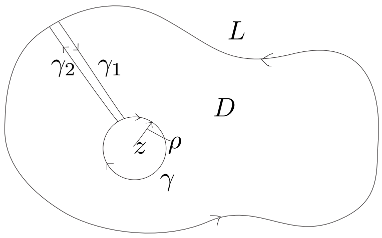
(證明, 參看 [1])。

這也表明若 D 爲由 L 所包的"連通域", z_1 與 z_2 爲 D 內任意兩點, γ_1 及 γ_2 分別爲兩條連結 z_1 與 z_2 但包含於 D 中的曲線, 則

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz。$$

換言之, 線積分: $\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz$ 與由 z_1 到 z_2 之連線 (但在 D 內) 無關。

由歌西定理可推導出一個在理論及計算上都非常有用的積分表示式:



歌西積分式: 設 f 及 L, D 如歌西定理中所述, 若 z 爲 D 內任一點, 則

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(w)}{w-z}dw。$$

略證: 以 z 爲圓心作一半徑 ρ 充分小的圓, 則由此圓的圓周 γ 及 L 加上由 L 進出到 γ 的兩連線 γ_1, γ_2 (其實是一條只是定向相反而已) 順時鐘繞走出一個連通域 D^*, z 不在其內。所以函數 $\frac{f(w)}{w-z}$ 在閉曲線: $L+\gamma_1+\gamma+\gamma_2$ 上及 D^* 內爲解析的。因而

$$\int_{L+\gamma_1+\gamma+\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z}dw = 0$$

於是

$$\int_L \frac{f(w)dw}{w-z} + \int_r \frac{f(w)dw}{w-z} = 0$$

當 $\rho \to 0$ 時 $f(w) \to f(z)$ 及在 γ 上, $w-z=\rho e^{i\theta}$, $dw = i\rho e^{i\theta}d\theta$, 並注意 γ 爲順時鐘向的 (θ 從 $2\pi \to 0$)。可得

$$\begin{aligned}\int_r \frac{f(w)}{w-z}dw &\to f(z)\int_{2\pi}^{0}\frac{i\rho e^{i\theta}}{\rho e^{i\theta}}d\theta \\ &= -2\pi i f(z)。\end{aligned}$$

定理因而得證。

註: 一般有

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_L \frac{f(w)dw}{(w-z)^{n+1}}, n=1,2,\ldots$$

在進一步的探討前, 我們指出一些有關複函數級數的性質, 以便於瞭解所述的結果。

(i) 一個由解析函數構成的均匀收斂級數, 可在其收斂域中任一路徑 (path) 逐項積分。

(ii) 一個由解析函數構成的級數, 可逐項微分, 只要所得級數爲均匀收斂的。

如同實函數的泰勒 (Taylor) 展開式或級數理論, 一個解析函數也可展開爲泰勒級數。

定理 (泰勒級數): 設 f 在由單閉曲線 L 上及其所包含的連通的區域內爲解析的, 若 a 爲 L 內一點, 則

$$\begin{aligned}f(z) = f(a) + (z-a)f'(a) + \cdots \\ + \frac{(z-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \cdots。\end{aligned}$$

且在圓: $|z-a|<\delta$ 內爲收斂的, 此處的 δ 爲任何一正數小於由 a 到 L 的最近的距離。

證: 由歌西積分式可得

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw。$$

此處 γ 爲以 a 爲圓心, 半徑 $\rho<\delta$ 的圓周, z 爲 γ 內任意一點 (因而 $|z-a|<\rho$)。

現對任意 γ 上一點 w, $|w-a|=\rho>|z-a|$。所以

$$\begin{aligned}\frac{1}{w-z}&=\frac{1}{(w-a)-(z-a)}\\&=\frac{1}{(w-a)(1-\frac{z-a}{w-a})}\\&=\frac{1}{w-a}+\frac{z-a}{(z-a)^2}+\cdots\\&\quad+\frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}+\cdots。\end{aligned}$$

此級數在 γ 上爲均勻收斂, 故我們可乘以 $f(w)/2\pi i$, 然後沿 γ 逐項積分, 可得

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-a}dw\\&\quad+\frac{z-a}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(w)}{(w-a)^2}dw+\cdots\\&\quad+\frac{(z-a)^n}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw+\cdots\\&=f(a)+\frac{(z-a)}{1!}f'(a)+\cdots\\&\quad+\frac{(z-a)^n}{n!}f^n(a)+\cdots。\end{aligned}$$

當 f 在整個複平面上爲解析時 (也即 f 爲整函數時, 我們如取 $a=0$, 則可得表示式

$$\begin{aligned}f(z)&=f(0)+\frac{z}{1!}f'(0)+\cdots\\&\quad+\frac{z^n}{n!}f^{(n)}(0)+\cdots\\&=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots。\end{aligned}$$

而任何一個收斂半徑爲 ∞ 的級數 $a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots$ 亦表示一整函數 $f(z)$, 且

$$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!},\qquad n=0,1,2,\ldots。$$

由先前提及的有關歌西積分式及解析函數構成的級數的性質可知, 若 $f(z)$ 在 C 上爲解析的, 則 $f(z)$ 在 C 內可展爲一泰勒級數, 且 $f'(z),f''(z),\ldots,f^{(n)}(z),\ldots$ (即任意階導函數) 皆存在 (因固定 n, 將 $a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots$ 逐項微分 n 次), 所得的級數仍爲收斂的。

解析函數除了它本身這種完備性外, 在數學理論分析及工程上的實際及理論問題也是重要的工具, 尤其是流體力學, 空氣動力學及控制論、訊號處理等方面的應用, 而多項式及週期性整函數 $\sin ze^z$ 等又是通常碰到的複解析函數, 如同任何函數一樣, 一個整函數的主要功用就是在能表明其取值的情形, 用個式子來表明就是有關方程: $f(z)-a=0$ 之解, 或函數 $f(z)-a$ 的零點。本文主要在介紹整函數的基本概念, 其增長性的刻劃, 及它與零點或取值之相關性表示式等等基礎性的理論作一淺介。本文的介紹說明力求淺顯、明白及例舉有關的例子以輔助及加強讀者對整函數理論之美及完備性的欣賞。

1.1. 整函數的基本概念及主要性質

一個整函數 $f(z)$ 按定義是在 C 上任一點 a 可有一收斂半徑爲 ∞ (無限大) 的泰

勒展開式, 不妨取 a 爲原點 $(z=0)$, 則我們可將 $f(z)$ 表示如下:

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots \\ +a_nz^n+\cdots \tag{1.1}$$

一個多項式是指 (1.1) 爲一具有限項的級數的情形, 所有非多項式的整函數稱之爲超越整函數。

依據一個實數級數的收斂或發散理論, 上式 (1.1) 在 C 上到處收斂的必要條件爲

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=0 \tag{1.2}$$

但在應用及理論上, 常用到的是下面一充分 (但非必要) 的條件:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=0 \tag{1.3}$$

例1: $e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots$ 及 $a^z(0<a\neq 1)$ 皆爲整函數, 這是因對 e^z

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} \\ =\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n+1}=0$$

而對 a^z, 其可表爲 $e^{z\ln a}=1+\frac{\ln a}{1!}z+\frac{(\ln a)^2}{2!}z^2+\cdots$, 但如想引用 (1.2) 來驗證就要用到 Sterling 公式 ($n!$ 的估計式) 而顯得困難了。

不過依據 (1.2) 及將 (1.1) 逐項微分, 我們立即可推得 $f'(z)$ 爲一整函數, 從而可見對f 的任何階導函數 $f^{(n)}(z)$ 皆爲整函數。以後我們將利用係數列 $\{a_n\}$ 去刻劃 $f(z)$ 的增長 (growth) 定出一個整函數的“級”(order) 及“型”(type) 等量度。由 $f^{(n)}(z)$ 的級數表示 (即將 (1.1) 逐項微分 n 次) 易見 f 與 $f^{(n)}$ 具有相同的“級”及“型”(即相當的增長)。

首先, 我們先引進一個刻劃整函數 $f(z)$ 增長的較自然的概念。我們是所謂的“極大模”(maximum modulus):

$$M_r(f)=M(r,f)=\operatorname*{Max}_{|z|=r}|f(z)| \tag{1.4}$$

定理1.1: 對固定的 f, $M(r,f)$ 爲 r 的漸增函數且爲 r 的連續函數。

證: 要嚴格來證明 $M(r,f)$ 爲 r 的漸增函數, 我們需引用複分析的基本定理: 歌西 (Cauchy) 定理。它是說, 若 L 爲 C 中任何一可求長的閉曲線, 則沿著 L 的 f 的線積分必爲0。由此可得出歌西積分式:

$$f(a)=\frac{1}{s\pi i}\int_{|z-a|=R}\frac{f(z)}{z-a}dz;$$

R 爲任意的正數。

由此公式, 易推得: 對於任意圓盤 D : $|z|\leq R$, 一非常數的 f 其 $|f(z)|$ 於 D 上的極大值, 只能在其邊界: $|z|=R$ 上取得。從而可得知 $M(r,f)$ 爲 r 的漸增函數。事實上, 若一開始在 (1.4) 我們定義 $M(r,f)=\mathrm{Max}_{|z|\leq r}|f(z)|$, (即整個圓盤, 不是邊界圓周: $|z|=r$) 其漸增性就自明了。現證其連續性。

設 $r_1<r_2$ 及 $|f(r_z e^{i\theta_0})|=M(r_2)=M(r_2,f)$。則只要取 $r_2-r_1<\delta$ (充分)

$$0<M(r_2,f)-M(r_1,f)$$

$$\begin{aligned}&\le |f(r_2e^{i\theta_0})|-|f(r_1e^{\theta_0})|\\&\le |f(r_2e^{i\theta_0})-f(r_1e^{i\theta_0})|\\&<\varepsilon(\delta)。\end{aligned}$$

定理1.2: 設 $f(z)$ 其泰勒展開式 (1.1), 則對任何 r,

$$|a_n|\le \frac{M(r,f)}{r^n},\quad n=0,1,2,\ldots \tag{1.5}$$

證: 這是因由 (1.1) 兩邊乘以 z^{-n}, 可得

$$\begin{aligned}z^{-n}f(z)=a_0z^{-n}+a_1z^{-n+1}+\cdots\\+a_n+a_{n+1}z+\cdots\end{aligned} \tag{1.6}$$

而對任何非零整數 m (可爲負的), 變數 $z=re^{i\theta}$, r 固定

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi} z^m d\theta=\int_0^{2\pi} r^m e^{im\theta}d\theta\\&=r^m\int_0^{2\pi}(\cos m\theta+i\sin m\theta)d\theta\\&=r^m\int_0^{2\pi}\cos m\theta d\theta+ir^m\int_0^{2\pi}\sin m\theta d\theta\\&=0+0=0\end{aligned}$$

於是對式 (1.6), 沿半徑爲 r 的圓周積分, 可得

$$\int_0^{2\pi} z^{-n}f(z)d\theta=a_n$$

所以

$$\begin{aligned}|a_n|&\le\int_0^{2\pi}|z^{-n}f(z)|d\theta\\&\le r^{-n}M(r,f)。\end{aligned}$$

定理1.3 (*Liouville*): 設 $f(z)$ 爲在整個複平面 C 上一有界的整函數, 則 $f(z)$ 必爲一常數。

證: 設 $M(r,f)<d$ 爲一常數, 由上定理可知, 若令 $r\to\infty$, 則可得 $\frac{d}{r^n}\to 0$, 從而 $a_n=0,\quad n=1,2,\ldots$, 即 $f(z)=a_0$ 一常數。

由上可推得

系理1.1: 設 $f(z)$ 滿足

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{M(r,f)}{r^n}<\infty, \tag{1.7}$$

則 $f(z)$ 爲一次數至多爲 n 的多項式。

又由定理1.3可證明下面的一代數基本定理。

定理1.4 (代數基本定理): 設 $P_n(z)$ 爲一 $n(\ge 1)$ 次複多項式, 則 $P_n(z)$ 在 C 上至少有一根, 即必有一複數 z_0, 使得 $P_n(z_0)=0$; z_0 稱爲 $P_n(z)$ 的一零點。

證: 設不然, $P_n(z)$ 在 C 上無零點, 則 $\frac{1}{P_n(z)}$ 亦爲一整函數。當 $r\ge r_0$ 充分大時, $|P_n(z)|$ 亦必充分大 $\ge d>0$, 所以當 $|z|\le r_0$ 時, $0<\mathrm{Max}_{|z|\le r_0}|\frac{1}{P_n(z)}|\le d_1$, 而當 $r>r_0$ 時, $\mathrm{Max}|\frac{1}{P_n(z)}|\le\frac{1}{d}$, 因而在整個 C 上

$\mathrm{Max}|\frac{1}{P_n(z)}|\le\mathrm{Max}(d_1,\frac{1}{d})$, 即 $\frac{1}{P_n(z)}$ 爲一有界的整函數, 因而爲一常數, 於是 $P_n(z)$ 亦爲一常數與假設不符, 定理因而得證。

定理1.4 告訴我們一個 n 次多項式 $P_n(z)$ 至少有一個根, 但由此不難推得 $P_n(z)$ 有且僅有 n 個根 (其中重根計其重複度)。所以一個具有 n 項的泰勒級數有 n 個根, 那麼如項數爲無窮大時, 表示的整函數即超越整函數是否必有無窮多個根呢? 由 e^z

得知不然, 即一個超越整函數可能在整個複平面上無零點。事實上, 我們在後面會證明, 任何在一個無零點的超越整函數必具有 $e^{\alpha(z)}$ 之表示式子, 其中 $\alpha(z)$ 爲一整函數, 一個具有限多個零點 (設 n 個零點) 的整函數必可表爲 $P_n(z)e^{\alpha(z)}$, 所以除了這種形式的整函數必有無窮多個零點, 但其數目至多爲可列的 (countably many)。

定理1.5: 設整函數 $f(z)\not\equiv 0$, 則 $f(z)$ 至多有可列個零點。

證: 設 S 表 $f(z)=0$ 的零點集合。若 S 爲不可列的 (uncountable), 則 S 必有一極限點 $a\in C$ (易證 $a\in S$)。即有一序列 $z_n\in S$, $z_n\to a$。今證 $f(z)$ 在 a 點的泰勒展開式恆爲0。

設

$$f(z)=a_0+a_1(z-a)+a_2(z-a)^2+\cdots \tag{1.8}$$

則 $\because f(z_n)=0, \therefore 0=a_0+a_1(z_n-a)+a_2(z_n-a)^2+\cdots$

令 $n\to\infty$, 則 $z_n\to a \therefore 0=a_0$

從而由 (1.8) 可得

$$\frac{f(z)}{z-a}=a_1+a_2(z-a)+\cdots$$

再令 $z=z_n$, 及令 $n\to\infty$, 則有 $0=a_1$。

所以可依次推得 $a_2=0, a_3=0,\ldots,a_n=0,\ldots$ 即 (1.8) 恆爲0。

推論:

(i) 設 $\{z_n\}$ 爲 C 上一序列, $z_n\to a\in C$, 若整函數 f 滿足 $f(z_n)=0=f(a)$, 則 $f(z)\equiv 0$。

(ii) 任何一個非恆爲0的整函數, 其零點的極限點若存在的話, 必爲點 ∞。

(iii) 任何一整函數, 若其在一不可列點集上爲0, 則必恆爲0。

(iv) 若兩整函數 f, g 在一線段或任一不可列點集上相等, 則 f 必恆等於 g。

1.2. 整函數的增長定義及與零點分布關係

由前面的討論我們知道, 若有一正整數 n 存在使得 $\underline{\lim}_{n\to\infty} M_f(r)/r^n<\infty$, 則 f 必爲一多項式, 其次數 $\le n$。所以對一超越整函數 $f(z)$, 我們就不能用 r^n 即 r 的冪次來刻劃其增長性。這時我們取用 $e^{r^k}(k>0)$ 來作指標比較及分類。若對一整函數 f, 存在一正數 k, 使得當 $r(>r_0)$ 充分大時,

$$M(r,f)<e^{r^k} \tag{1.9}$$

總成立 , 則稱 f 爲有限級, 不然就稱 f 爲無窮級。而使得 (1.9) 式成立的 k 的最大下限, 稱爲 f 的級 (order), 一般以 ρ_f (或 ρ) 表之。因而若一個 f 其級 ρ_f 爲有限的, 則它表示對任一給定的正數 ε (不論其多小), 當 r 充分大時 $(r>r_0)$, 下式總成立:

$$e^{r^{\rho-\varepsilon}}<M_f(r)<e^{r^{\rho+\varepsilon}}。$$

從而可推出“級”的一個等價定義如下:

$$\rho_f=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln\ln M(r,f)}{\ln r} \tag{1.10}$$

其中 ln 是指以 e 爲底的自然對數, 注意 (1.10) 中的 ρ 可爲 ∞, 這時 f 就爲無窮數。

例2: $e^{\sqrt{2}z}$ 爲一有窮級的函數, 其級爲 1, 而 e^{e^z}, 爲一無窮級的函數。

註: 由此定義不難見對任何兩個整函數 f, g,
(i) $\rho(f+g) \le \max(\rho(f), \rho(g))$,
(ii) $\rho(f, g) \le \max(\rho(f), \rho(g))$。

在此順便引進另一有用的概念, 其爲 f 的"下級"(lower order) μ_f 定義如下:

$$\mu_f = \varliminf_{n\to\infty} \frac{\ln\ln M(r,f)}{\ln r} \tag{1.11}$$

註: σ_f 可爲無窮大 (∞)。當 $\rho_f = \mu_f$ 時, 稱 f 的增長爲正常的 (regular growth)。

知道了一個函數 f 的級爲有限後, 爲了進一步的刻劃, 引進了所謂的"型"(type) 的概念:

$$\sigma_f = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln M(r,f)}{r^\rho} \tag{1.12}$$

當 σ_f 爲0時稱之爲極小型, $\sigma_f = \infty$ 時稱之爲極大型, 及 $0 < \sigma_f < \infty$ 時稱之爲正規型, 函數 $e^{\sqrt{2}z}$ 的型爲 $\sqrt{2}$。

以上增長的概念是依據 $M(r,f)$ 來求出相應的級, 下級, 型等的數量, 但一般說來, 除了一些較特殊形式的整函數, 求 $M(r,f)$ 是不容易的。當已知 f 爲有限級時, 較方便及簡單的方法是依據 f 的泰勒展開式 (1.1) 中的係數序列 $\{a_n\}$ 來得出 f 的級及型。

定理1.6: 設整函數 $f(z)$ 的級爲 ρ, 其泰勒展開式如下:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_1 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots$$

則 ρ 爲有限的充要條件爲

$$\frac{1}{\rho} = \varliminf_{n\to\infty} \frac{\ln(1/|a_n|)}{n\ln n}。 \tag{1.13}$$

當 $\infty > \rho \neq 0$ 時, 設 f 的型爲 σ, 則

$$(\sigma e\rho)^{1/\rho} = \varlimsup_{n\to\infty} n^{1/\rho}|a_n|^{1/n} \tag{1.14}$$

註: 由上定理, 我們可建造一個整函數具有預先給定的級及型。

證明參看 [1]或 [3]。

例3: $f(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(A^\alpha z)^n}{\Gamma(\alpha n+1)^1}$ 爲一整函數, 其中 A 及 α 皆爲正數, 則可得 $\rho_f = \rho = \frac{1}{\alpha}$ 及 $\sigma_f = A$。

證: 這是因

$$\Gamma(\alpha n+1) = (\frac{\alpha n}{e})^{\alpha n}\sqrt{2\pi\alpha n}(1+O(\frac{1}{n}))。$$

($f(x) = Og(x)$(或 $O(1)g(x)$) 是表 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 爲有上界的及 $a_n = A^\alpha/\Gamma(\alpha n+1)$, 代入 (1.13) 可得 $\rho_f = \frac{1}{\alpha}$。由此及式 (1.14) 可得 $\tau = A$。

在整函數的研究中, 常涉及一個函數與其導函數間之增長比較及關係: 如由 f 的泰勒展開式及其任意 n 次逐項微分所得的 f 的 n 次導函數 $f^{(n)}$, 依據定理1.6就不難想見 f 與 $f^{(n)}$ 具有相同的級及型。

定理1.7: 設 f 爲一整函數, 則 f 與 $f^{(n)}$ $(n \ge 1)$ 必有相同的級及型。

設 f_1 及 f_2 爲兩個整函數, 則我們稱 f_1 的增長比 f_2 的增長大, 如 $\rho_{f_1} > \rho_{f_2}$ 或 $\rho_{f_1} = \rho_{f_2}$, 但 $\sigma_{f_1} > \sigma_{f_2}$, 另外易見的是 $\rho_{f_1+f_2} \le \max(\rho_{f_1}, \rho_{f_2})$, 及若 f_1 的增長比 f_2 的增長來得大, 則 $\rho_{f_1+f_2} = \rho_{f_1}$。

特別若一無窮級的函數 f_1 與一有窮級的函數 f_2, 則其和 $f_1 + f_2$ 必爲無窮級。

1.3. 函數的表示與其零點之關係

首先, 我們證明一個有用的表示式。

定理1.8: *設 $f(z)$ 在 C 上無零點, 則 $f(z)$ 可表爲 $e^{g(z)}$, 其中 g 爲一整函數。*

證: 考慮 $\ln f(z)$, 此雖然爲一具無窮分支的函數 (每一分支差 $2\pi i$ 的整數倍), 但其導數 $[\ln f(z)]' = \frac{f'(z)}{f(z)}$ 爲一單值的整函數, 一個整函數的零點分布與其成長有相當密切的關係。它們的相關性是基於下面的劍生 (Jensen) 定理。

定理1.9: *設 $f(z)$ 爲一整函數, $f(0) \neq 0$, 其具零點 $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots; |a_n| = r_n \le r_{n+1} = |a_{n+1}|$, 則當 r 滿足 $r_n < r < r_{n+1}$ 時,*

$$\ln \frac{r^n |f(0)|}{r_1 r_2 \cdots r_n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{i\theta})| d\theta \tag{1.15}$$

略證: 這是主要基於任何一個實調和函數 $h(z)$ 具均值定理的事實 ($h(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(re^{i\theta})d\theta$) 而得, 現若在 $|z| \le r$ 內, $f(z)$ 的零點爲 $a_1, a_2, \ldots, a_n$, 則考慮輔助函數

$$F(z) = f(z) \cdot \frac{r^2 - \bar{a_1} z}{z - a_1} \cdot \frac{r^2 - \bar{a_2} z}{z - a_2} \cdots \frac{r^2 - \bar{a_n} z}{z - a_n}。$$

其在 $|z| \le r$ 內無零點, 注意在 $|z| = r$ 上時,

$$\left|\frac{r^2 - \bar{a_i} z}{z - a_i}\right| = 1; \quad i = 1, 2, \ldots, n。$$

這時我們知 $\ln|F(z)| = u(z)$ 在 $D: |z| \le r$ 內爲一調和函數; 此處設 $g(z) = u(z) + iv(z)$; u, v 表 F 的實部及虛部及 $F(z) = e^{g(z)}$。

於是引用均值定理立即可得式 (1.15)。

設以 $n(t, f)$ 或 $n(t)$ 表 $f(z)$ 在 $|z| \le t$ 內零點之數目 (重根計其重覆度), 則當 $r_n \le r \le r_{n+1}$ 時, 並注意當 $r_j \le x < r_{j+1}$, $j = n(x)$ 及 $r_n \le x < r$ 時, $n = n(x)$, 我們可得

$$\begin{aligned} &\ln \frac{r^n}{r_1 r_2 \cdots r_n} \qquad (1.16)\\ =& n \ln r - \sum_{j=1}^{n} \ln r_j \\ =& \sum_{j=1}^{n-1} j(\ln r_{j+1} - \ln r_j) + n(\ln r - \ln r_n) \\ =& \sum_{j=1}^{n-1} j \int_{r_j}^{r_{j+1}} \frac{dx}{x} + n \int_{r_n}^{r} \frac{dx}{x} \\ =& \int_0^n \frac{n(x)}{x} dx \qquad (1.17) \end{aligned}$$

於是劍生公式 (1.15) 又可表爲

$$\int_0^r \frac{n(x)}{x} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ln|f(re^{i\theta})|d\theta - ln|f(0)| \tag{1.18}$$

上定理顯示在半徑爲 r 的圓盤內一個函數其零點的平均數大致和該函數的對數的模的平均值相等, 由此立即可得下面一重要的結果。

定理 1.10. 設 $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$, 表 $f(z)$ 的零點的模序列, 若 f 的級 $\rho_f < \infty$, 則當 $s > \rho(f)$ 時, $\sum_{j=1}^{\infty} r_j{}^{-s}$。

1.4. 整函數的表示式與增長關係

大家都知道依據代數基本定理每個非常數 $n(\geq 1)$ 次多項式, $p(z)$ 必有一個根 (零點), 據此可推導出 (ii) p 可表爲 n 個零點 (可重覆出現) 的線性因子乘積:

$p(z) = d(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)$; z_i 爲 p 的零點, d 爲適當的常數。這兩個特性對超越整函數就不見得正確。譬如: e^z 根本無根。但根據匹卡 (Picard) 定理 (參看 [1]), 對任何一個非0的值 a, 設 $a = 1$, $(e^z = 1)$, 必有無窮多個根。我們此無窮多根爲可列的, 設它們爲 $\{a_i\}$, 所以可以依其模 (modulii) $\gamma_i(= |a_i|)$ 列出, 現問題是我們是否可以像多項式一樣將 $e^z - 1$ 表成無窮多個線性因子的乘積表示? 即

$$e^z - 1 = dz^k(1-z/a_1)(1-z/a_2)\cdots (1-z/a_n)\cdots \quad (a_i \neq 0) \tag{1.19}$$

但依據無窮因子乘積的定理, 如此般的定積表示一絕對收斂 (也即有意義) 的必要條件是

$$\sum^{\infty} \frac{1}{r_i} < \infty$$

另一方面我們知 $e^z - 1 = 0$ 的所有的根爲 $z = 2n\pi i$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$。但 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n\pi} = \infty$, 所以一般式 (1.19) 不足以用來表示一個整函數其具零點 $a_1, a_2, \ldots$, 爲了克服此一問題, 魏爾斯特拉斯 (Weierstrass) 將因子 $(1 - z/a_i)$ 用所謂的基本因子 $E(z/a_i; k_i)$; 即 $E(u,k) = (1-u)e^{\frac{u}{1}+\frac{u^2}{2}+\cdots+\frac{u^k}{k}}$, 並利用這種因子來表示一個在整個平面爲絕對收斂的無窮乘積 (或一整函數)。其主要依據是對任何一序列 $r_n \to \infty$ 總可找到一正整數序列 $\{p_n\}$ (譬如取 $p_n = n$), 使得

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{(r_n)^{p_n}} \quad \text{爲收斂的,}$$

則據此 $\{p_i\}$, 就可引進適當的 k_i 的值, 而使得無窮乘積 $\prod_{i=1}^{\infty} E(z/a_i, k_i)$, 在整個複平面上爲絕對收斂的 (整函數), 令

$$\begin{aligned} E(u;k) &= (1-u)e^{\frac{u}{1}+\frac{u^2}{2}+\cdots+\frac{u^k}{k}} \\ &= (1-u)e^{-ln(1-u)-\frac{u^{k+1}}{k+1}-\frac{u^{k+2}}{k+2}+\cdots} \\ &= 1 + c_1u^{k+1} + c_2u^{k+2} + \cdots \end{aligned} \tag{1.20}$$

(這是因 $1 - u = e^{\ln(1-u)}$), 又

$$\begin{aligned} & e^{\frac{u}{1}+\frac{u^2}{2}+\cdots+\frac{u^k}{k}} \\ &= 1 + \frac{1}{1!}(\frac{u}{1} + \frac{u^2}{2} + \cdots + \frac{u^k}{k})^2 \\ &\quad + \frac{1}{2!}(\frac{u}{1} + \frac{u^2}{2} + \cdots + \frac{u^k}{k})^2 + \cdots \\ &= \sum b_i(k)u^i \end{aligned} \tag{1.21}$$

易見所有的係數 $b_i(k)$ 爲正的, 且爲 k 的漸增函數。在 $k = \infty$ 時, 上式左邊變成

$e^{\ln\frac{1}{1-u}} = \frac{1}{1-u} = \sum u^n$, 此式與 (1.21) 比較, 立即可得

$$|c_i| < 1 \tag{1.22}$$

據此及 (1.20), 可得

$$\begin{aligned}|E(u;k)-1| &< |u^{k+1}| + |u^{k+2}| + \cdots \\ &= \frac{|u^{k+1}|}{1-|u|}\end{aligned}$$

或

$$|E(z/a_i;p_i-1)-1| < \frac{|z/a_i|^{p_i}}{1-|z/a_i|} \tag{1.23}$$

今由事實如 $\sum|a_n|$ 爲收斂的則無窮乘積 $\prod(1+a_n)$ 亦爲收斂的, 於是對任何 z, i 充分大時, $0 < |z/a_i| < \frac{1}{2}$, 因而由 (1.23) 可得

$$\sum_{i>i_0}|E(z/a_i;p_i-1)-1| < 2|z|\sum\frac{1}{(r_i)^{p_i}} < \infty$$

於是無窮乘積

$$\prod E(z/a_i;p_i-1) \text{ 在 } C \text{ 上爲收斂} \tag{1.24}$$

定義 1.1: 我們稱形式如 $\prod E(z/a_i;p_i-1)$ 的收斂無窮乘積爲以 $a_1, a_2, \ldots$ 爲零點的典型乘積。

定理 1.10: 設 $f(z)$ 爲一具且僅具 $a_1, a_2, \ldots,\ a_n, \ldots (a_1 \neq 0)$ 爲零點的整函數, 則 $f(z)$ 可表爲 $f(z) = \pi(z)e^{g(z)}$, 其中 $\pi(z)$ 是以 $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ 爲零點的一典型乘積, $g(z)$ 爲一整函數。

證: 因 $\pi(z)$ 與 $f(z)$ 兩者具有相同的零點 (包括重根的重覆度也一致), 於是 $f(z)/\pi(z)$ 爲一整函數, 且 $\neq 0$。於是它可表爲 $e^{g(z)}$, 即 $f(z)/\pi(z) = e^{g(z)}$, 定理因而得證。

註: 若 $z=0$ 爲 f 的零點且重度 k, 則一般 f 可表爲 $z^k\pi(z)e^{g(z)}$。

定義 1.2: 設 f 爲有窮級, 其具零點 $a_1,\ a_2,\ \ldots,$ 則稱 $\rho_1 = \inf\{s : \sum_{n=1}^{\infty} r_n^{-s}\text{爲收斂的}\}$ 爲 f 的零點的收斂指數 (易見 $\rho_1 \leq \rho_f$)。

定義 1.3: f 等同定義 1.2 中所設。我們稱使 $\sum\frac{1}{r_n^p}$ 收斂的最小正整數 p 爲 f 的虧格 (genus), 而相應的典型乘積 (1.24) 就稱爲由 f 零點構成的典型乘積具虧格 p。

註: 若 ρ_1 非爲整數, 則 $p = [\rho_1]$。當 ρ_1 爲整數時, 只當 $\sum r_n^{-\rho_1}$ 爲發散時 $p = \rho_1$, 當 $\sum r_n^{-\rho_1}$ 爲收斂時, $p = \rho_1 - 1$。因此我們總有 $p \leq \rho_1 \leq \rho$。

特別若 f 爲有窮級, 則依據定理 1.9 知存在一正整數 p (取 $p > \rho(f)$), 使得 $\sum\frac{1}{r_j^p} < +\infty$, 於是可得所謂的哈達瑪德 (Hadamard) 定理如下:

定理 1.11: 設 $f(z)$ 爲一有窮級的整函數, 則

$$f(z) = z^k e^{Q(z)}\pi(z),$$

其中 k 爲一正整數或0(視 $f(0)=0$ 否而定其重度), $Q(z)$ 爲一多項式, 其次數不大於 f 的級, $\pi(z)$ 爲由 f 的零點構成的典型乘積。

由定理 1.10 知 $f(z) = z^k e^{Q(z)}\pi(z)$, 其中 z 爲一整函數, $\pi(z)$ 爲由 f 零點構成的典型乘積。證明主要是在證明 $Q(z)$ 必爲一

多項式且次數 $\leq \rho_f$, 因較繁複, 詳細討論可參閱 [1]。

稍進一步的探討可得下面二個有用的結果:

定理 1.12: 設 f 如同上定理中所述, 則在其表示式中的典型乘積 $\pi(z)$ 的級與 f 的零點的收斂指相等。

註: 證明可參看 ([3], p.17)

定理 1.13: 設 f 爲一整函數, 其級爲有窮且爲非整數, 則 f 的零點, 收斂指數與其級相等。

註:

(i) 由定理 1.13 或反證法, 立即可知任何一有窮非整數級的整函數必有無窮多個零點。

(ii) 任何一有窮級整函數其型爲極大或極小者, 也必有無窮多個零點, 例如 $\frac{1}{\Gamma(z)}$ Γ 表 (Gamma Function), 級爲 1 極大型, 故對任意 a 值 $1/\Gamma(z)-a$ 必有無窮多個零點。

定理 1.13 之證明: 設 $\rho_1(f)$ 表 f 的零點收斂指數, 我們由先前之探討已知 $\rho_1(f)\leq\rho(f)$, 今假設 $\rho_1<\rho$, 則由定理 1.11 及 1.12, 我們可將 f 表爲

$$f(z)=\pi(z)e^{Q(z)} \qquad (1.25)$$

其中 $\pi(z)$ 的級爲 $\rho_1(<\rho), Q(z)$ 爲一多項式次數, 設爲 $q\leq\rho$。現 e^Q 爲一整函數, 且其級爲 $q<\rho$ (不可能$=\rho$, 因 q 爲整數而 ρ 爲非整數)。由事實 $\rho(f,g)\leq\max(\rho(f),\rho(g))$ (參看式 (1.10) 之後的註 (ii) 及式 (1.25) 將導至

$$\rho=\rho(f)\leq\max(\rho(\pi),\rho(e^\theta))<\rho$$

之矛盾, 所以必須有 $\rho=\rho_1$。

2. 整函數的匹卡 (Picard) 定理及函數方程

我們由前面的討論知任何一個整函數 f 若它只有有限個零點, 則 $f(z)$ 必可表爲 $p(z)e^{g(z)}$ 之形式, 其中 $p(z)$ 爲由 f 的零點構成的多項式, $g(z)$ 爲一整函數。很自然的一個問題, 對這種形式的整函數, 取不取異於 0 的值? 即 $p(z)e^{g(z)}-a(a\neq 0)$ 有沒零點, 如有, 可不可能也爲有限個? 或更一般 $g(z)$ 爲一多項式, $p(z)e^{q(z)}-p(z)=0$ 有沒有零點? 其個數又爲如何? 如爲無窮多, 我們有沒有對之作一種估計? 匹卡 (Picard) 定理是說若 f 爲一超越整函數, 則至多可有一個值 a, 使得 $f(z)-a=0$ 只有有限多個零點。如此的 a 值, 稱爲 f 的匹卡例外值。如 $e^{e^z}+1$ 具有匹卡例外值 1 及 e^z-3 具有匹卡例外值 -3。前一個例子的函數爲無窮級, 而後者爲有窮級, 一般性的證明較爲複雜, 在此不便介紹, 有興趣的讀者可參閱 [1]。我們在此就有窮級整函數加強的結果[附註]來作一證明。

匹卡定理 (有窮級時情形): 設 f 爲一有窮級的整函數, 則至多有一個例外的值 a 使得 $f(z)-a$ 的零點收斂指數小於 ρ_f。

附註: 此一加強的結果即爲所稱的波雷耳 (Borel) 定理。

證: 依據定理1.13, 我們知若 f 的級 (ρ_f) 不爲整數, 則其零點收斂指數$=\rho_f$, 因而對任何 $a, f-a$ 的級亦爲非整數, 從而 $f-a$ 的零點指數不可能小於 ρ_f, 所以我們現針對 $\rho_f=$ 整數情形來討論, 在此情形下, 假設有兩個値 a, b, 使得 $f-a$ 與 $f-b$ 兩者的零點收斂指數皆小於 ρ_f, 於是有

$$f(z)-a=z^{k_1}e^{Q_1(z)}\pi_1(z), \qquad (2.1)$$

$$f(z)-b=z^{k_2}e^{Q_2(z)}\pi_2(z) \qquad (2.2)$$

其中 $Q_1(z)$ 及 $Q_2(z)$ 爲兩多項式次數皆爲 $\rho(=\rho_f), k_1, k_2$ 爲非負的整數 (可爲0) 及 $\pi_1(z)$ 及 $\pi_2(z)$ 爲典型乘積, 且兩者的級皆小於 ρ。(2.1)-(2.2) 得

$$b-a=z^{k_1}e^{Q_1(z)}\pi_1(z)-z^{k_2}e^{Q_2(z)}\pi(z)。$$

因而

$$\begin{aligned} &z^{k_1}\pi_1(z)e^{Q_1(z)-Q_2(z)} \\ &=z^{k_2}\pi_2(z)+(b-a)^{-Q_2(z)} \qquad (2.3)\end{aligned}$$

現上式右邊的級爲 ρ, 所以 $Q_1(z)-Q_2(z)$ 爲 ρ 次多項式 $(\because \rho(\pi_1)<\rho)$, 另一方面將 (2.3) 微分可得

$$\begin{aligned} &(z^{k_1}\pi_1{Q_1}'+k_1z^{k_1-1}\pi_1+z^{k_1}{\pi_1}')e^{Q_1} \\ &=(z^{k_2}\pi_2Q_2'+k_2z^{k_2-1}\pi_2+z^{k_2}\pi_2')e^{Q_2} \ (2.4)\end{aligned}$$

注意一個整函數與其導函數具有相等的級, 所以上式中

$$(z^{k_1}\pi_1{Q_1}'+k_1z^{k_1-1}\pi_1'+z^{k_1}\pi_1')\,(\equiv {\pi_1}^*)$$
$$(z^{k_2}\pi_2Q_2'+k_2z^{k_2-1}{\pi_2}'+z^{k_2}\pi_2')\,(\equiv {\pi_2}^*)$$

的級皆小於 ρ。於是由 (2.4) 可得

$$\pi_1^*e^{Q_1}=\pi_2^*e^{Q_2}$$

或

$$\pi_1^*e^{Q_1-Q_2}=\pi_2^*,$$

$\because \pi_1^*\neq 0, \pi_2^*\neq 0$ (否則將導至 $z^{k_1}e^{Q_1}\pi_1$ 及 $z^{k_2}e^{Q_2}\pi_2$ 皆爲常數的矛盾), 所以上式可導至 $e^{Q_1-Q_2}$ 的級不能大於 $\rho(\pi_1^*)$ 或 $\rho(\pi_2^*)$。因而 Q_1-Q_2 的次數 $\leq \max(\rho(\pi_1^*), \rho(\pi_2^*))<\rho$。此與先前 Q_1-Q_2 的次數 $=\rho$ 相矛盾, 定理因而得證。

我們以下介紹一些 [2]中有關函數方程解的研究作爲匹卡定理之應用及本文之結束。

大家或許都熟習下列恆等式:

$$\sin^2 z+\cos^2 z=1$$

因此函數方程:

$$f^2(z)+g^2(z)=1 \qquad (2.5)$$

至少有組解 $f(z)=\sin z, g(z)=\cos z$, 問題是 (2.5) 有關整函數的通解爲如何?

解: 將 (2.5) 左邊分解可得

$$[f(z)+ig(z)][f(z)-ig(z)]=1 \quad (2.6)$$

今 $f(z)+ig(z)$ 及 $f(z)-ig(z)$ 皆爲整函數, 且皆不取0値, 故

$$f(z)+ig(z)=e^{ih(z)}, \qquad (2.7)$$

$h(z)$ 爲一適當的整函數, 因而由 (2.6),

$$f(z)-ig(z)=\frac{1}{f(z)+ig(z)}=e^{-ih(z)} \qquad (2.8)$$

由 (2.7) 及 (2.8) 兩式, 立即可得

$$f(z)=\frac{e^{ih(z)}+e^{-ih(z)}}{2}=\cos h(z)$$

$$g(z)=\frac{e^{ih(z)}-ie^{ih(z)}}{2i}=\sin h(z)$$

$\therefore f(z)=\cos h(z)$ 及 $g(z)=\sin h(z)$, $h(z)$ 爲一整函數, 爲方程 (2.5) 的通解。

今考慮函數方程:

$$f^n(z)+g^n(z)=1, \qquad n\geq 3 \qquad (2.9)$$

的通解問題。

我們將證當 $n\geq 3$ 時, 函數方程 (2.9) 無任何非常數的整函數解。

證: 設 f,g 爲滿足 (2.9) 的兩非常數整函數, 設

$$\alpha_0=\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n},$$

及 $\alpha_k={\alpha_0}^{2k+1}=\cos\frac{2k+1}{n}\pi+i\sin\frac{2k+1}{n}\pi, k=0,1,2,\ldots,n-1$, 則 $\alpha_k(k=0,1,2,\ldots,n-1)$ 爲 $z^n=-1$ 的 n 個根。即

$$\begin{aligned}z^n+1=&(z-\alpha_0)(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots\\&(z-\alpha_{n-1})\end{aligned}$$

上式中將 z 代以 $f(z)/g(z)$ 後, 兩邊同乘以 $f^n(z)$ 可得

$$\begin{aligned}&f^n(z)+g^n(z)\\=&[f(z)-\alpha_0g(z)][f(z)-{\alpha_0}^3g(z)]\cdots\\&\cdot[f(z)-{\alpha_0}^{2n-1}g(z)] \qquad (2.10)\end{aligned}$$

由 (2.9) 知上式右邊 n 個因子中無一因子可取得0値, 加上各因子皆爲整函數, 所以我們有

$$\begin{aligned}f(z)-\alpha_0g(z)&=e^{h_0(z)},\\f(z)-{\alpha_0}^3g(z)&=e^{h_1(z)}\\f(z)-{\alpha_0}^5g(z)&=e^{h_2(z)},\\&\vdots\\f(z)-{\alpha_0}^{2n-1}g(z)&=e^{h_{n-1}(z)}, \quad (2.11)\end{aligned}$$

其中 $h_0(z),h_1(z),\ldots,h_{n-1}(z)$ 皆爲整函數。

因 $n\geq 3$, 所以我們不妨考慮最先3個方程式, 及消去 $f(z)$, 可得

$$({\alpha_0}^2-\alpha_0)g(z)=e^{h_0(z)}-e^{h_1(z)}$$

及 (2.12)

$$({\alpha_0}^3-{\alpha_0}^2)g(z)=e^{h_2(z)}-e^{h_1(z)}$$

注意 $\alpha_0=\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n}\neq 0$ 及 ${\alpha_0}^2=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\neq\pm 1$ $(\because n\geq 3)$, 所以由上兩式可得

$$\frac{e^{h_0(z)}-e^{h_1(z)}}{\alpha_0({\alpha_0}^2-1)}=\frac{e^{h_1(z)}-e^{h_2(z)}}{({\alpha_0}^2-1)}$$

其可化爲:

$${\alpha_0}^2e^{h_0(z)}+e^{h_2(z)}=(1+{\alpha_0}^2)e^{h_1(z)}。$$

上式又可表爲

$$\begin{aligned}&[\frac{\alpha_0}{\sqrt{1+{\alpha_0}^2}}e^{\frac{h_0(z)-h_1(z)}{2}}]^2\\+&[\frac{1}{\sqrt{1+{\alpha_0}^2}}e^{\frac{h_2(z)-h_1(z)}{2}}]^2=1。\end{aligned}$$

由前結果可知, 存在一整函數 $h(z_0)$, 使得

$$\frac{\alpha_0}{\sqrt{1+{\alpha_0}^2}}e^{\frac{h_0(z)-h_1(z)}{2}}=\cos h(z)$$

及 (2.13)

$$\frac{1}{\sqrt{1+{\alpha_0}^2}}e^{\frac{h_2(z)-h_1(z)}{2}}=\sin h(z)$$

今證 $h(z)$ 必爲一常數, 設不然, 則或者 $h(z)$ 爲一次數 ≥ 1 的多項式, 或爲一超越整函數。在前者情形下, 則我們知存在 $-z_0$ 使得

$h(z_0)=\pi/2$ (代數基本定理保證此 z_0 的存在), 對此 z_0 (2.13) 中第一個方程的右邊式爲 $\cos h(z_0)=\cos\pi/2=0$, 但左邊式恆不爲0, 故得矛盾。今設 $h(z)$ 爲超越的, 則依據匹卡定理 $h(z)=\pi/2$ 或 $h(z)=-\pi/2$ 兩者總有一方程有解, 同樣將此解代入 (2.13) 中的第一個方程, 得至矛盾, 所以 $h(z)$ 只得爲常數。這時由 (2.13) 知兩指數 $(h_0-h_1)/2$ 及 $(h_2-h_1)/2$ 必須爲常數; 即

$$\frac{h_0(z)-h_1(z)}{2}\equiv a, \qquad \frac{h_2(z)-h_1(z)}{2}\equiv b。$$

但(2.12) 中第一個方程可導至

$$\begin{aligned}g(z)&=\frac{e^{h_0(z)}-e^{h_1(z)}}{\alpha_0({\alpha_0}^2-1)}\\&=e^{h_1(z)}\frac{e^{h_0-h_1}-1}{\alpha_0({\alpha_0}^2-1)}\\&=e^{h_1(z)}\frac{e^{2a}-1}{\alpha_0({\alpha_0}^2-1)}=\beta e^{h_1(z)}\end{aligned}\tag{2.14}$$

其中 $\beta=(e^{2a}-1)/\alpha_0({\alpha_0}^2-1)$ 爲一常數。但另一方面, 由式 (2.11) 的第二個方程可得

$$\begin{aligned}f(z)&={\alpha_0}^2g(z)+e^{h_1(z)}\\&=({\alpha_0}^2\beta+1)e^{h_1(z)}\\&=re^{h_1(z)}\end{aligned}\tag{2.15}$$

其中 $r={\alpha_0}^2\beta+1$, 將 $g(z)$ 及 $f(z)$ 的表示式 (即式 (2.14) 及式 (2.15)) 代入函數方程 (2.9) 中得

$$(\beta^n+r^n)e^{h_1(z)}=1$$

即 $e^{h_1(z)}$ 爲一常數, 從而 f 及 g 皆爲常數, 此爲矛盾的, 定理因而得證。

從上面的論證我們可得到下面推廣的結果:

定理2.1: 設 $p_n(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$ 爲一 $n(\geq 3)$ 次多項式, 若 $p_n(z)$ 至少有三個互異的零點, 則對任何值 $b\neq 0$ 函數方程:

$$a_0f^n(z)+a_1f^{n-1}(z)g(z)+\cdots+a_ng^n(z)=b$$

無非常數的整函數 f 及 g 可滿足。

註: 匹卡定理換言之, 可說一個整函數 $f(z)$, 若有二個或以上 (有限) 匹卡例外值, 則 $f(z)$ 必得爲一常數。在一般應用或常用到的亞純函數 (meromorphic function) $F(z)$, 相應的匹卡定理又如何呢? 所謂亞純函數 F 是指 $F(z)$ 爲兩個整函數之商式的函數, 如 $\tan z$, $\frac{e^z+1}{\sin z}$ 或 $\frac{e^z+1}{z^2-3z+4}$。

匹卡定理 (亞純函數的): 設 $F(z)$ 爲一亞純函數, 若 F 具有三個或以上的 (有限) 匹卡例外值, 則 $F(z)$ 爲常數。

證: 設 $F=\frac{g}{f}; g,f$ 爲整函數。設 $F(z)-a_1\neq 0, F(z)-a_2\neq 0, F(z)-a_3\neq 0$, a_i 爲互異的常數並不妨設 $a_i\neq 0$, 作輔助函數 $G(z)$:

$$G(z)=\frac{1}{F(z)-a_1},$$

則易見 $G(z)$ 爲整函數, 這時

$$G(z)-\beta=\frac{1-\beta F(z)+\beta a_1}{F(z)-a_1}$$

或

$$G(z)-\beta=\frac{-\beta(f(z)-\frac{1+\beta a_1}{\beta})}{F(z)-a_1},$$

$\therefore$ 如取 $\beta=\beta_1$, 滿足 $\frac{1+\beta_1 a_1}{\beta_1}=a_2$, 即 $\beta_1=\frac{-1}{a_1-a_2}$, 則 $G(z)-\beta_1\neq 0$, 如取 $\beta=\beta_2$ 滿足 $\frac{1+\beta_2 a_1}{\beta_2}=a_3$ 或 $\beta_2=\frac{-1}{a_1-a_3}$, $G(z)-\beta_2\neq 0$。

這時 $G(z)$ 不取 β_1 與 β_2, 且 $\beta_1\neq\beta_2$, 因此 $G(z)$ 爲一常數, 從而 F 亦然。

例: 考慮 $F(z)=\frac{e^z}{e^z-1}$, 則 $F(z)$ 爲一亞純函數, $F(z)\neq 0$ 及 $F(z)\neq 1$, 所以對任何 $a\neq 0, a\neq 1, F(z)-a$ 必有解。

尾註: 值分布論會告訴我們例外值的概念, 可以推廣到例外小函數上去, 我們稱 $h(z)$ 爲 $f(z)$ 的小函數, 一般是指 $h(z)$ 的增長比 $f(z)$ 來得小的很多。例如對任一超越整函數來講, 任一多項式就是它的小函數。這時我們可斷定一個超越的亞純函數 $F(z)$ 至多有二個它的小函數 $a_1(z), a_2(z)$, 使得 $F(z)-a_1(z)$ 及 $F(z)-a_2(z)$ 無零點或只有有限多個零點。應用: 如取 $F(z)=\frac{e^z-z^2}{ze^z-1}$ 則 $F(z)-\frac{1}{z}$ 及 $F(z)-z^2$ 兩者都至多有有限多個零點。這時對任何多項式或有理函數 $R(z)\neq\frac{1}{z},\neq z^2$, $F(z)-R(z)$ 必有零點且數目爲無窮多。值分布理論就是將此數量與 F 的增長連結起來的種種有關研究。數學界著名的費爾茲 (Fields) 獎第一屆的受獎人 L.V. Ahlfors 就是因他將有關值分布論推廣到高維複空間的映照 (mapping) 上去的卓越成果。近年來, 值分布論已和古典的複函數結合, 被應用作爲亞純函數的分解論及複動力系統等方面研究的主要工具, 並取得了豐碩的成果, 特別是在不動點 (fixed point) 與函數分解間的關係、整函數不動點的定量性刻劃等等結果, 參看由筆者主持的一國際性複分析及其應用的會議專輯 [4]或 [3]。

參考文獻

1. E. C. Titchmarsh, The theory of functions, second edition, Clarendon Press, Oxford, 1939.
2. A. I. Markushevich, Entire functions, (English translation), American Elsevier Publishing Company, Inc. 1966.
3. F. Gross, Factorization of meromorphic functions, U.S. Government printing office, Washington, D. C. 1972.
4. C. C. Yang et al., Complex Analysis and its Applications, Proc. International Conference on Complex Analysis and Its Applications. (held in 1993 in Hong Kong). Pitnam Research Notes of Mathematics, Longman, Vol.305, 1994.

—本文作者任教於香港科技大學數學系—