好題共欣賞

石厚高

今年中央警察大學新生入學考試的乙組(社會組) 數學試題很不錯, 大專聯考的社會組數學試題就相形見拙了。這分試題一共是二十四題選擇題, 二十題單選四題複選, 單選題很直接, 不需要想可以立即著手, 每題四分共八十分, 複選題就要想一想才能作, 每題五分共二十分。

讀者也許會問爲甚麼要介紹性質這麼特殊學校的考題? 當然它的報考人數只有一萬四千多人, 錄取一百八十名, 在任何角度來看都沒有受到 "重視" 的理由, 不過試題的良窳與考試是否受到 "重視" 並無關連, 常看到很多世俗心目中所謂的 "好" 學校出的試題令人讚嘆, 反而是一些名不見經傳的偏遠地區所謂 "壞" 學校出的考題很有可取之處, 道理簡單, 試題和命題人的專業知識與教學經驗的結合大有關係, 而與學校或考試的 "重要性" 鮮有關連。這分中央警察大學八十五學年度第六十五期大學部新生入學考試數學(乙組)(見附錄) 試題很值得大專聯考命題人或數學老師參考, 我把各題的內容或用到的定理、原理寫在下面

1. 等比級數求和
2. 級數收斂性
3. 若複數爲零則實部與虛部均爲零
4. 算術平均數大於幾何平均數
5. 餘式定理綜合除法
6. 多項式基本運算
7. 對數基本運算
8. 代數基本運算
9. 三角基本運算
10. 三角正弦定律
11. 解析幾何: 直線
12. 向量
13. 空間直線
14. 解析幾何
15. 排列組合
16. 機率
17. 機率期望值
18. 機率
19. 解析幾何: 雙曲線定義
20. 三元一次聯立方程式有無限組解之條件
21. (A) 若二直線斜率之積爲 -1 則此二直線垂直
    (B) 向量或以分點公式求解
    (C) 平面幾何: 三角形內角平分線內分對邊之比等於二鄰邊之比
    (D) 二點距離公式
    (E) 已知三角形三頂點座標求重心
22. 解析幾何圓錐曲線
    就 k 值討論 $(4-k)x^2+(9-k)y^2=(4-k)(9-k)$ 之圖形

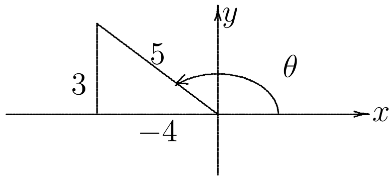
23. (A) 統計: 算術平均數
    (B) 統計: 中位數
    (C) 統計: 四分位差
    (D) 統計: 變異數
    (E) 統計: 標準差
24. (A) 向量內積
    (B) 向量內積
    (C) 向量內積
    (D) 向量內積求夾角
    (E) 三角形之面積爲二邊與夾角正弦之積的二分之一

該校未公佈答案, 我作了略解, 第 21 題的 (B) 與 (C) 二小題宜互換, 因爲有了 (C) 才能作 (B) 好在小疵不掩大醇。

我說這分試題是好試題, 因爲它能公正評估考生程度, 它選的命題題材全是中等數學教育的要點, 除了第 17、21、24 三題外, 數據單純演算容易, 值得教師參考, 所以樂於推介。

略解

1. $\frac{1-w^{25}}{1-w}=\frac{1-w}{1-w}=1$, 故選 (A)。
2. 按題意 $\left|\frac{3x}{2x+1}\right|<1$ 得 $(5x+1)(x-1)<0$, 故選 (C)。
3. 整理原式令實部爲 0 虛部爲 0 得 $x=-1$ 時, $a=-2$; $x=3$ 時 $a=2$, 選 (A)。
4. 由 $\frac{x+y+3z}{3}\geq\sqrt[3]{\frac{x\cdot y\cdot 3z}{3}}=\sqrt[3]{27}=3$ 得 $x+y+3z$ 之最小值爲 9, 故選 (C)。
5. 由綜合除法得 $f(7)=1$, 故選 (E)。
6. 設原式爲 $f(x)$, 因 $f(1)=1+a+b=0$, 以 $x-1$ 除 $f(x)$, 得商式爲 $g(x)=x^4+x^3+x^2+x+1+a$ $\therefore g(1)=a+5=0$, 故得 $a=-5$, $b=4$, 故選 (B)。
7. $a=\frac{\log .3}{\log .2}=\frac{\log 3-1}{\log 2-1}<1$, 又 $a>0$, $b=\frac{\log 3}{\log 2}>1$, $c=\frac{\log 30}{\log 20}=\frac{\log 3+1}{\log 2+1}>1$, $\log 3>\log 2$, $\therefore b>c$, 故得 $b>c>a$ 選 (C)。
8. 令 $m=3^x$ 得 $y=m^2-3m$, $\therefore m=\frac{1}{2}(3\pm\sqrt{9+4y})\leq 3$ 故得 $y\leq 0$, 選 (B)。
9. 如圖所求式 $=\dfrac{-\frac{4}{5}}{1+\frac{3}{5}}-\dfrac{\frac{3}{5}}{1-\frac{4}{5}}=-\dfrac{7}{2}$, 故選 (E)。



10. 由正弦定律 $\frac{2\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}=\frac{2\sqrt{2}}{\sin A}$ 得 $\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\therefore A=45^\circ$, $\therefore B=75^\circ$, 選 (D)。
11. 設直線 L 之斜率爲 m, 故得 $\pm\tan 45^\circ=\frac{m-\frac{3}{4}}{1+\frac{3}{4}m}$, 得 m 之値爲 7 或 $-\frac{1}{7}$, 得二直線方程式爲 $7x-y-13=0$ 與 $x+7y-9=0$, 故選 (B)。
12. 設二向量夾角爲 θ, $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta$, $\overrightarrow{b}$ 在 $\overrightarrow{a}$ 上之正射影爲 $\frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}|^2}\overrightarrow{a}=\frac{28}{14}(1,-3,2)=(2,-6,4)$, 選 (C)。
13. L 上一點可設爲 $Q(6+2t,7+3t,5+2t)$, $\overline{PQ}^2=(2t+3)^2+(3t+8)^2+(2t+2)^2=17(t+2)^2+9$, 故得 $d=3$, 選 (A)。
14. 設切線方程式爲 $y=m(x-3)+3=mx+3-3m$, 代入拋物線方程式得 $x^2+(m-4)x+3-3m=0$, 由 $b^2-4ac=(m-4)^2-4(3-3m)=0$, $m^2+4m+4=0$, $\therefore m=-2$ 得 $-2x-y+9=0$ 選 (D)
15. $4\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3=324$, 選 (C)。

16. $\dfrac{C_2^3+C_2^2+C_1^3C_1^2}{C_4^{10}}=\dfrac{1}{21}$, 選 (B)。

17. $r=1$ 時 $C_1^2+C_1^2C_1^3+C_1^3C_1^4+C_1^4C_1^5=40$,

$r=2$ 時 $C_1^3+C_1^2C_1^4+C_1^3C_1^5=26$,

$r=3$ 時 $C_1^4+C_1^2C_1^5=14$,

$r=4$ 時 $C_1^5=5$,

$C_2^{15}=105$, 故得

x	1	2	3	4
$f(x)$	$\frac{40}{105}$	$\frac{26}{105}$	$\frac{14}{105}$	$\frac{5}{105}$

, 故得期望值爲 $1\cdot\frac{40}{105}+2\cdot\frac{26}{105}+3\cdot\frac{14}{105}+4\cdot\frac{5}{105}=\frac{22}{15}$, 故選 (C)。

18. $\dfrac{\frac{50}{100}\cdot\frac{3}{100}}{\frac{50}{100}\cdot\frac{3}{100}+\frac{40}{100}\cdot\frac{4}{100}+\frac{10}{100}\cdot\frac{2}{100}}=\dfrac{5}{11}$, 故選 (B)。

19. $2a=4$ 故得 $a=2$, $2c=6$ 故得 $c=3$, $c^2-a^2=b^2$ 得 $b=\sqrt{5}$, 選 (B)。

20. $\begin{vmatrix}1&1&-1\\2&3&a\\1&a&3\end{vmatrix}=(a+3)(a-2)=0$ 故得 $a=2$ (-3不合), 選 (A)。

第 21 題宜先作 (C) 再作 (B) 後者要利用前者結果。

21. (A) 直線 AB 之斜率爲 $-\frac{1}{2}$ 直線 AC 之斜率爲 2, 所以 A 爲直角。

(C) $\overline{AB}=2\sqrt{5}$, $\overline{AC}=\frac{3}{2}\sqrt{5}$, 所以 $\overline{AB}:\overline{AC}=4:3$。

(B) 設 $P(m,n)$ 由 (C) 得 $\overrightarrow{BP}=(m+1,n-1)=\frac{4}{7}\overrightarrow{BC}=\frac{4}{7}(\frac{5}{2},-5)$, $(m,n)=(\frac{3}{7},-\frac{13}{7})$。

(D) $\overline{BC}=\frac{5\sqrt{5}}{2}$ 故得周長 $6\sqrt{5}$

(E) 三頂點橫座標之和除以 3 得重心橫座標 $\frac{7}{6}$, 三頂點縱座標之和除以 3 得重心縱座標 $-\frac{4}{3}$, 選 ABD。

22. (A) $k>0$ 時, 空集合,

(B) $k=4$ 或 9 時, 表一直線,

(C) $K>4$ 時表雙曲線或空集合,

(D) $4<k<9$ 時表雙曲線,

(E) $k<4$ 時表橢圓,

選 BD。

23. 把十個數由小而大排列 13, 14, 14, 15, 15, 15, 15, 16, 17, 19 得十數之和爲 153, 故 A 爲正確, 中位數爲 15, 故 B 亦正確, 四分位差爲 $\frac{1}{2}(16-14)=1$, 變異數 2.61, 標準差 $\sqrt{2.61}$, 故選 ABE。

24. (A) 由假設 $2\overrightarrow{PC}=-\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}$ 得

$$\begin{aligned}
&2\overrightarrow{PC}\cdot 2\overrightarrow{PC}\\
&=(-\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB})\cdot(-\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB})\\
4\overrightarrow{PC}^2&=\overrightarrow{PA}^2+\overrightarrow{PB}^2+2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\\
4&=4+4+2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\\
\therefore\quad \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}&=-2,
\end{aligned}$$

同法可得

(B) $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=-1$,

(C) $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=-1$,

(D) $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=\overline{PB}\,\overline{PC}\cos\angle BPC=-1$, $\therefore\cos\angle BPC=-\frac{1}{2}$, $\therefore\angle BPC=120^\circ$,

(E) $\triangle PBC=\frac{1}{2}\overline{PB}\,\overline{PC}\sin 120^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 選 DE。

—本文作者任教於建國中學—

附錄: 中央警察大學八十五學年度第六十五期大學部新生入學考試

數 學（乙組）試 題

注意事項	1．本試題共 24 題，自第 1 題至第 20 題爲單一選擇題；自第 21 題至第 24 題爲多重選擇題。（答案卡上自第 25 題至第 60 題，空著不用。） 2．單一選擇題，每題後面所列的答案，其中只有一個是正確的，將正確答案選出，然後用 2B 鉛筆，將答案卡上同一題號答案位置的長方格範圍塗黑。答對者每題得 4 分，答錯者每題倒扣 ¼ 題分。不答者，以零分計。 3．多重選擇題，每題 5 分，各有五個備選答案，至少有一個是正確的答案，五個備選答案各自獨立計分，答對者可各得 ⅕ 題分；答錯者則各倒扣 ⅕ 題分；完全不答者，不予計分。 4．本試題紙空白處或背面，可作草稿紙使用。 本試題共 2 頁

一、單一選擇題：

1.設 $\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 則 $1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{24}$ 之值爲

(A) 1 (B) ω (C) ω^2 (D) 0 (E) -1

2.若無窮級數 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{3x}{2x+1})^n$ 收斂，則 x 的範圍爲

(A) $-1<x<\frac{1}{5}$ (B) $-\frac{3}{2}<x<-\frac{1}{4}$ (C) $-\frac{1}{5}<x<1$ (D) $-2<x<0$ (E) $-\frac{5}{4}<x<-1$

3.已知 $(1+i)x^2-2(a+i)x+(3-3i)=0$ 有實根 $(i=\sqrt{-1})$，則實數 a 的值爲

(A) 2 或-2 (B) 3 或-1 (C) -1 或 2 (D) 1 或 2 (E) -1 或-2

4.若 x.y.z 均爲正數，且 xyz=9，求 x+y+3z 的最小值爲

(A) 13 (B) 12 (C) 9 (D) 10 (E) 11

5.多項式 $f(x)=13x^5-90x^4-8x^3+8x^2-12x+36$，求 $f(7)$ 的值爲

(A) 7 (B) 3 (C) -2 (D) -1 (E) 1

6.已知 $(x-1)^2$ 爲 x^5+ax+b 的因式，試求數對 (a,b)=

(A) (3,-4) (B) (-5,4) (C) (4,-5) (D) (4,5) (E) (-4,3)

7.若 $a=\log_{0.2}0.3$，$b=\log_2 3$，$c=\log_{20}30$，則下列大小關係何者正確？

(A) $a>b>c$ (B) $a<b<c$ (C) $a<c<b$ (D) $b<a<c$ (E) $c<a<b$

8.若 $-1\le x\le 1$，試求 $f(x)=9^x-3^{x+1}$ 的最大值爲

(A) $-\frac{9}{4}$ (B) 0 (C) 1 (D) $\frac{9}{4}$ (E) -1

9.已知 $\frac{\pi}{2}\le\theta\le\pi$，且 $\sin\theta=\frac{3}{5}$，求 $\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}-\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$ 的值爲

(A) $\frac{3}{2}$ (B) $\frac{5}{2}$ (C) $\frac{7}{2}$ (D) $-\frac{5}{2}$ (E) $-\frac{7}{2}$

10.在 ΔABC 中，$\overline{AB}=2\sqrt{3}$，$\overline{BC}=2\sqrt{2}$，$\angle C=60°$，則 $\angle B$ 的度數爲

(A) 45° (B) 15° (C) 105° (D) 75° (E) 60°

11.已知直線 L：$ax+by-9=0$ 通過點(2,1)且與 $3x-4y+4=0$ 之夾角爲 $\frac{\pi}{4}$ 試求數對 (a,b)爲

(A) (3,3) (B) (1,7) (C) (5,-1) (D) (6,-3) (E) (4,1)

12.空間中兩向量 $\vec{a}=(1,-3,2)$，$\vec{b}=(5,1,13)$，試求 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上之正射影爲

(A) $(\frac{5}{2},-\frac{3}{2},1)$ (B) (1,-3,2) (C) (2,-6,4) (D) (3,-9,6) (E) (4,-12,8)

13.設點 P(3,-1,3)到直線 L ：$\frac{x-6}{2}=\frac{y-7}{3}=\frac{z-5}{2}$之距離爲 d ，求 d 的值爲

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 9

14.通過點 P(3,3)且與拋物線$y=4x-x^2$相切的直線方程式爲 ax+by+9=0 ，則 a+b 的值爲

(A) -4 (B) -5 (C) -2 (D) -3 (E) -6

15.現有黃、綠、紅、藍四種顏色的球各 10 個，各色球大小均相同，現在從其中任取 5 球排列之，同色球不相鄰的排法有

(A) 1024 (B) 162 (C) 324 (D) 512 (E) 486

16.有大小、樣式均相同的黑鞋 3 雙，紅鞋 2 雙，若從其中任取 4 隻，則恰成 2 雙鞋子的機率爲

(A) $\frac{23}{105}$ (B) $\frac{1}{21}$ (C) $\frac{19}{210}$ (D) $\frac{1}{5}$ (E) $\frac{23}{210}$

17.一袋子中有 1 號球 1 個，2 號球 2 個，3 號球 3 個，4 號球 4 個，5 號球 5 個，若從此袋中任取 2 球，兩球的球號相差爲 r 時，則可得 r 元(r=1,2,3,4)，試求得款的期望值爲

(A) $\frac{25}{21}$元 (B) $\frac{52}{35}$元 (C) $\frac{22}{15}$元 (D) $\frac{158}{105}$元 (E) $\frac{143}{105}$元

18.設某工廠由甲、乙、丙三台機器製造某一產品，甲生產全部產品的 50％，乙生產全部產品的 40％，丙生產全部產品的 10％，又依過去的經驗中，知甲產品中有 3％，乙產品中有 4％，丙產品中有 2％爲不良品，若從產品中任選一產品，已知此產品爲不良品，則此產品由甲機器製造的機率爲

(A) $\frac{2}{33}$ (B) $\frac{5}{11}$ (C) $\frac{16}{33}$ (D) $\frac{7}{33}$ (E) $\frac{7}{11}$

19.已知雙曲線方程式爲 $\left|\sqrt{(x-3)^2+y^2}-\sqrt{(x+3)^2+y^2}\right|=4$ ，則其共軛軸長爲

(A) $\sqrt{5}$ (B) $2\sqrt{5}$ (C) $\sqrt{7}$ (D) $2\sqrt{7}$ (E) $2\sqrt{6}$

20.已知方程組$\begin{cases}x+y-z=1\\2x+3y+az=3\\x+ay+3z=2\end{cases}$ 表示三個相異平面交成一直線，則 a 的值爲

(A) 2 (B) -3 (C) -2 (D) 3 (E) 0

二、多重選擇題：

21.已知ΔABC 中，$A(3,-1)$，$B(-1,1)$，$C(\frac{3}{2},-4)$，$\angle A$ 之內角平分線交$\overline{BC}$於 P 點，則下列何者正確？

(A) ΔABC 爲直角三角形 (B) P 爲$(\frac{3}{7}，-\frac{13}{7})$ (C) $\overline{BP}：\overline{CP}=3：4$

(D) ΔABC 之周長爲$6\sqrt{5}$ (E) 重心 $G(-\frac{7}{6}，\frac{4}{3})$

22.就 k 值討論方程式$(4-k)x^2+(9-k)y^2=(4-k)(9-k)$所表示之圖形，下列何者正確？

(A) $k>9$ 時，表示橢圓 (B) $k=4$ 或 $k=9$ 時，表示一直線 (C) $k>4$ 時，表示兩直線 (D) $4<k<9$ 時，表示雙曲線 (E) $k<4$ 時，無圖形

23.已知 10 個幼兒的體重分別爲 14,15,17,16,15,19,15,14,13,15 (公斤)，以下何者正確？

(A) 算術平均數爲 15.3 公斤 (B) 中位數爲 15 公斤 (C) 四分位差爲 1.5 公斤 (D) 變異數爲 3.24 公斤 (E) 標準差爲$\sqrt{2.61}$公斤

24.已知 P 爲ΔABC 內部一點，且$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}=\vec{0}$，$|\overrightarrow{PA}|=2$，$|\overrightarrow{PB}|=2$，$|\overrightarrow{PC}|=1$則下列何者正確？

(A) $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=-1$ (B) $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=-2$ (C) $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=-2$ (D) $\angle BPC=120°$

(E) ΔPBC 面積=$\frac{\sqrt{3}}{2}$