談「聯考試題」與「數學教育」

羅添壽

炎夏已至, 捎來了考季的訊息, 多少莘莘學子秉著「萬般皆下品, 唯有讀書高」的心志, 手不釋卷, 不眠不休的苦讀, 只爲了七月考場中贏得勝仗, 踏上嚮往中的學府。然今聯考成績已揭曉, 數學科分數還是偏低, 這種成果是聯考試題有問題, 還是數學教育出了毛病呢? 今筆者先從數學試題談起

一. 試題方面

(A) 自然組

1. 試題分佈尚合理, 理科數學共考40分, 杜絕學生投機取巧的心態。

由於84年聯考理科數學僅考15分, 造成今年考生專攻基礎數學, 其實今年理科數學考40分, 命題合理容易得分, 不投機的學生可考高分。

試題各冊配分如下:

冊別	一	二	三	四	理科 (上)	理科 (下)
配分	8	20	12	20	35	5

(註) 計算題二題利用數學歸納法證明棣美弗定理, 內容安排在第一冊第2章, 但要利用三角函數與複數解題, 故歸納爲第二冊。

2. 命題靈活, 試題不但一題多解而且綜合各章節, 能測出學生的程度。(以下為一題多解之試題, 提供給讀者參考)

題目:適當選數對 (h,k) 可使拋物線 $y=x^2+hx+h-k^2$ 與 x 軸相切或無交點。設 D 爲所有此種數對 (h,k) 在平面上所對應的點所構成的區域。試問

(1) 區域 D 的邊界是何種圖形?

(A) 圓 (B) 橢圓 (C) 拋物線

(D) 雙曲線 (E) 兩條直線

(2) 在區域 D 中, 使得 $2h-3k$ 之值最大的點坐標 (h,k) 爲何?

(A) $(\frac{2}{5},-\frac{3}{5})$ (B) $(2,1)$

(C) $(\frac{18}{5},-\frac{3}{5})$ (D) $(2,-1)$ (E) $(0,-4)$

(3) $2h-3k$ 在區域 D 上的最大值爲何?

(A) 1 (B) 9 (C) 7 (D) $\frac{13}{5}$ (E) 12

(4) $2h-3k$ 在區域 D 上的最小值爲何?

(A) 2 (B) 1 (C) 0 (D) -1 (E) -2

解: (1) 依題意得 $\forall x\in R$,

$\because y=x^2+hx+(h-k^2)\geq 0$ 恆成立

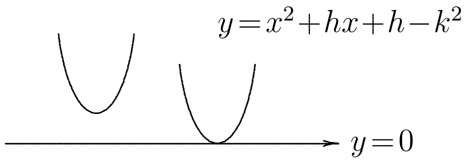
$\therefore\ \Delta=h^2-4(h-k^2)\leq 0$

$\therefore\ h^2-4h+4+4k^2\leq 4$

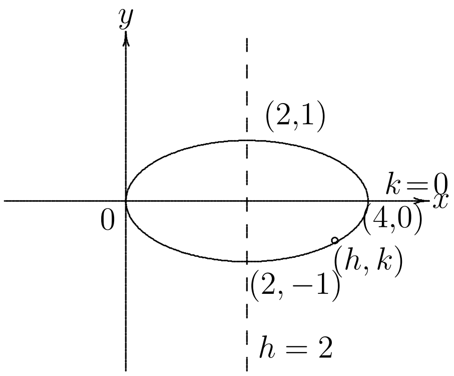
$\therefore\ D:\frac{(h-2)^2}{2^2}+\frac{k^2}{1^2}\leq 1$

表一橢圓及其內部

$\therefore\ D$ 的邊界表一橢圓



(2) 令 $\Gamma:\frac{(h-2)^2}{2^2}+\frac{k^2}{1^2}=1$, 其中 $(h,k)\in\Gamma$



$$\text{取}\begin{cases} h=2+2\cos\theta \\ k=\sin\theta, \end{cases},\theta\in R$$

$$\begin{aligned}\therefore\ 2h-3k&=2(2+2\cos\theta-3\sin\theta)\\&=4+4\cos\theta-3\sin\theta\\&=4+5(\frac{4}{5}\cos\theta-\frac{3}{5}\sin\theta)\\&=4+5\cos(\theta+\phi)\end{aligned}$$

$$\text{其中}\begin{cases}\cos\phi=\frac{4}{5}\\ \sin\phi=\frac{3}{5}\end{cases}$$

(i) 當 $\cos(\theta+\phi)=1$ 時,

取 $\theta=2k\pi-\phi$, $k\in Z$

$$\text{得}\begin{cases}\cos\theta=\cos(2k\pi-\phi)=\cos\phi=\frac{4}{5}\\ \sin\theta=\sin(2k\pi-\phi)=-\sin\phi=-\frac{3}{5}\end{cases}$$

$$\therefore\begin{cases}h=2+2\times\frac{4}{5}=\frac{18}{5}\\ k=-\frac{3}{5}\end{cases}$$

$\therefore$ 當 $(h,k)=(\frac{18}{5},-\frac{3}{5})$ 時得最大値爲

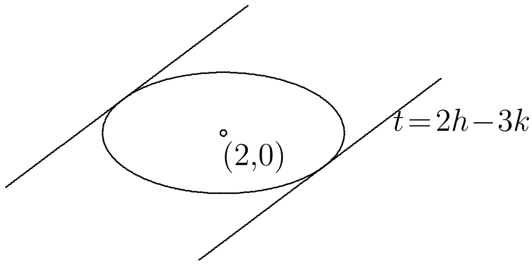
$4+5\times 1=9$

(ii) 當 $\cos(\theta+\phi)=-1$ 時得最小値爲

$4+5\times(-1)=-1$

$\therefore$ 選 (1)B (2)C (3)B (4)D

另解: (利用判別式法求解)



令 $t=2h-3k\Rightarrow k=\frac{2h-t}{3}$ 代入

$h^2-4h+4k^2=0$ 中

得 $h^2-4h+4\times\frac{4h^2-4ht+t^2}{9}=0$

$\therefore\ 9h^2-36h+16h^2-16ht+4t^2=0$

$\therefore\ 25h^2-4(4t+9)h+4t^2=0$

$\because\ h\in R$ $\therefore$ 判別式

$D=16(4t+9)^2-16\times 25t^2\geq 0$

$\therefore\ t^2-8t-9\leq 0$

$\therefore\ (t-9)(t+1)\leq 0$, $\therefore\ -1\leq t\leq 9$

$\therefore\ 2h-3k$ 之最大値爲 9,

最小値爲 -1。

當 $t=9$ 代入

$25h^2-4(4t+9)h+4t^2=0$ 中

得 $25h^2-180h+324=0$

$\therefore\ (5h-18)^2=0$ $\quad\therefore\ h=\frac{18}{5}$ 代入

$2h-3k=9$ 中得 $k=-\frac{3}{5}$

$\therefore$ 最大値的點爲 $(\frac{18}{5},-\frac{3}{5})$

另解:(此題亦可以用柯西不等式求解)

$\because\ \frac{(h-2)^2}{2^2}+\frac{k^2}{1^2}=1$

$\therefore\ [(\frac{h-2}{2})+k^2]\cdot[4^2+(-3)^2]$

$\geq [2(h-2)-3k]^2$

$\Rightarrow\ 1\times 25 \geq (2h-3k-4)^2$

$\Rightarrow\ -5 \leq 2h-3k-4 \leq 5$

$\therefore\ -1 \leq 2h-3k \leq 9$

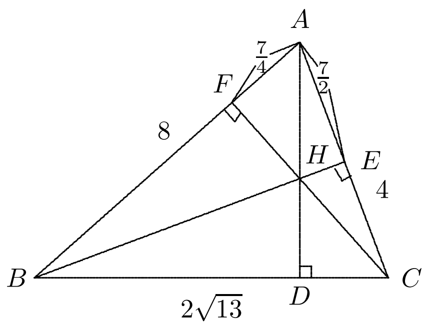
$\therefore$ 最大值爲 9, 此時 $\frac{h-2}{8}=\frac{k}{-3}$

且 $2h-3k=9$, 解得

$(h,k)=(\frac{18}{5},-\frac{3}{5})$。最小值爲 -1。

題目:設 $\triangle ABC$ 的三邊長爲 $\overline{AB}=8$, $\overline{BC}=2\sqrt{13}$, $\overline{CA}=4$, 且 H 爲 $\triangle ABC$ 的垂心, 若 $\overrightarrow{AH}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$, 則數對 $(x,y)=$ ______

解:(1) 如圖 $\triangle ABE$ 與 $\triangle BCE$ 中



$\overline{BE}^2=8^2-\overline{AE}^2=(2\sqrt{13})^2-(4-\overline{AE})^2$

$\therefore 64-\overline{AE}^2=52-16+8\overline{AE}-\overline{AE}^2$

$\therefore \overline{AE}=\frac{7}{2}\ \ \therefore\ \overline{AE}:\overline{AC}=\frac{7}{2}:4=7:8$

又 $\triangle ACF$ 與 $\triangle BCF$ 中

$\overline{CF}^2=4^2-\overline{AF}^2=(2\sqrt{13})^2-(8-\overline{AF})^2$

$\therefore\ 16-\overline{AF}^2=52-64+16\overline{AF}-\overline{AF}^2$

$\therefore \overline{AF}=\frac{7}{4}\quad \therefore \overline{AF}:\overline{AB}=\frac{7}{4}:8=7:32$

(2) $\because \overrightarrow{AH}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}=x\cdot\frac{32}{7}\overrightarrow{AF}+y\overrightarrow{AC}$

$\because\ F,H,C$ 共線 $\therefore\ \frac{32}{7}x+y=1$

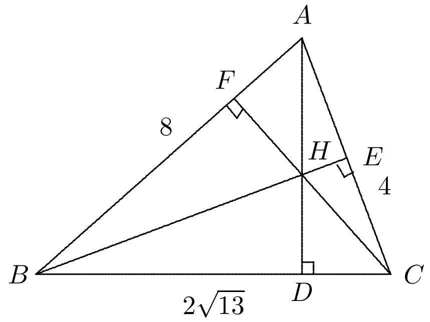
$\therefore\ 32x+7y=7$ 1

又 $\overrightarrow{AH}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AB}+y\times\frac{8}{7}\overrightarrow{E}$ $\because B,H,E$ 共線,

$\therefore x+\frac{8}{7}y=1\ \therefore 7x+8y=7$ 2

由 1, 2 得 $x=\frac{7}{207}$, $y=\frac{175}{207}$ $\therefore$ 數對 $(x,y)=(\frac{7}{207},\frac{175}{207})$

另解: (1) 先證明 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}$ 成立



$$\begin{aligned}\because\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}&=(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB})\cdot\overrightarrow{AC}\\&=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{AC}\\&=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}+0\\&=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

($\because H$ 爲垂心 $\quad\therefore\ \overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$)

同理 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}$

$\therefore\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}$

(2) $\because \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos A$

$=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\frac{|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2-|\overrightarrow{BC}|^2}{2|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}$

$=\frac{1}{2}(8^2+4^2-(2\sqrt{13})^2)=14$

$\therefore\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}$

$=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=14$

(3) $\because \overrightarrow{AH}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$, $\therefore \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=x|\overrightarrow{AB}|^2+y\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$

$\therefore 14=64x+14y$

$\therefore 32x+7y=7$ 1

同理 $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+y|\overrightarrow{AC}|^2$,

$\therefore\ 14=14x+16y$

$\therefore 7x+8y=7$ 2

由 1, 2 得 $x=\frac{7}{207}$, $y=\frac{175}{207}$

題目:設拋物線 $y=ax^2+bx+c$ 與直線 $7x-y-8=0$ 相切於點 $(2,6)$, 而且與直線 $x-y+1=0$ 相切, 試求 a,b,c 之值

解:(1) 令 $\Gamma: f(x)=ax^2+bx+c$

$\therefore f'(x)=2ax+b \therefore f'(2)=4a+b$

又 $7x-y-8=0$ 之斜率爲 7

$\therefore m=f'(2)$

$\therefore 4a+b=7$ 1

(2) $\because$ (2,6) 在 Γ 上

$\therefore\ 4a+2b+c=6$ 2

(3) $\begin{cases} y=x+1 \\ y=ax^2+bx+c \end{cases}$

$\Rightarrow\ ax^2+(b-1)x+(c-1)=0$ 有重根

$\therefore\ \Delta=(b-1)^2-4a(c-1)=0$ 3

由 2式$-$1式 得 $b+c=-1$ $\therefore c=-1-b$ 又 $b=7-4a$。

$\therefore c=-1-7+4a=-8+4a$

代入 3 得 $(6-4a)^2-4a(4a-9)=0$

$\therefore -48a+16a^2-16a^2+36a=0$

$\therefore a=3, b=-5, c=4$

另解: 令 $\Gamma: y=ax^2+bx+c$

(1) (2,6) 在 Γ 上, $\therefore 4a+2b+c=6$ 1

(2) 將 $y=7x-8$ 代入 Γ 得

$7x-8=ax^2+bx+c$

$\Rightarrow\ ax^2+(b-7)x+(c+8)=0$

$\because$ 有重根

$\therefore$ 判別式 $(b-7)^2-4a(c+8)=0$ 2

(3) 將 $y=x+1$ 代入 Γ 得

$x+1=ax^2+bx+c$

$\Rightarrow\ ax^2+(b-1)x+(c-1)=0$

$\because$ 有重根

$\therefore$ 判別式

$(b-1)^2-4a(c-1)=0$ 3

由 2式$-$3式 得 $b=4-3a$ 4

將 4 代入 1 得 $c=2a-2$ 5

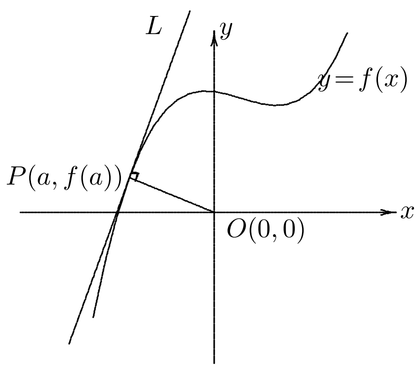
4, 5 代入 3 得 $a^2-6a+9=0$

$\therefore\ a=3$ 代入 4, 5 得 $b=-5, c=4$

$\therefore\ a=3, b=-5, c=4$

題目: 設函數 $f(x)$ 爲一可微分函數, P 爲 $y=f(x)$ 圖形上距離原點 O 最近的一點,
(1) 若 P 點的坐標爲 $(a,f(a))$, 試證 $a+f(a)\cdot f'(a)=0$
(2) 若 $y=f(x)$ 之圖形不通過原點, 試利用第 (1) 小題之結果, 證明直線 OP 爲 $y=f(x)$ 之圖形上過 P 之法線

證: 如圖 $\overline{OP}^2=a^2+(f(a))^2$,



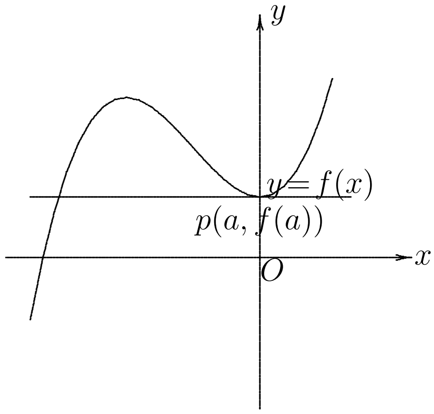
令 $g(a)=a^2+(f(a))^2$

$\Rightarrow\ g'(a)=2a+2f(a)\cdot f'(a)$

(1) $\because\ \overline{OP}$ 爲最小, $\therefore\ \overline{OP}^2$ 亦爲最小,

$\therefore\ g'(a)=0 \therefore 2a+2f(a)\cdot f'(a)=0$

$\therefore\ a+f(a)\cdot f'(a)=0$ 成立。



(2) (i) 當 $a=0$ 時, $f(a)\neq 0$,

則 $\overleftrightarrow{OP}$ 之斜率不存在,

又過 P 之切線斜率爲 $f'(a)$

且 $a+f(a)\cdot f'(a)=0$,

由 $a=0$, $f(a)\neq 0$ 得 $f'(a)=0$

$\therefore \overleftrightarrow{OP}$ 是過 P 之切線的法線。

(ii) 當 $a\neq 0$ 時,

$\because m_{OP}=\frac{f(a)-0}{a-0}=\frac{f(a)}{a}$

且 $a+f(a)\cdot f'(a)=0$,

$\therefore\ \frac{f(a)}{a}\cdot f'(a)=\frac{-a}{a}=-1$,

$\therefore\ \overleftrightarrow{OP}$ 與過 P 之切線互相垂直,

$\therefore\ \overleftrightarrow{OP}$ 是過 P 之切線的法線。

誤解:(1) 設 $P(a,f(a))$ 爲 $y=f(x)$ 圖形上一點, 且過 P 之切線爲 L, 其切線斜率爲 $f'(a)$

(i) 若 $a\neq 0$, 則 $\because P$ 距離原點 O 最近

$\therefore m_{op}\cdot m_L=-1$

$\therefore\ \frac{f(a)-0}{a-0}\cdot f'(a)=-1$

$\therefore\ f(a)\cdot f'(a)=-a$

$\therefore a+f(a)\cdot f'(a)=0$

(ii) 若 $a=0$ 則 $f(a)\neq 0$,

且 $\overleftrightarrow{op}$ 爲鉛直線, $\therefore L$ 爲水平線

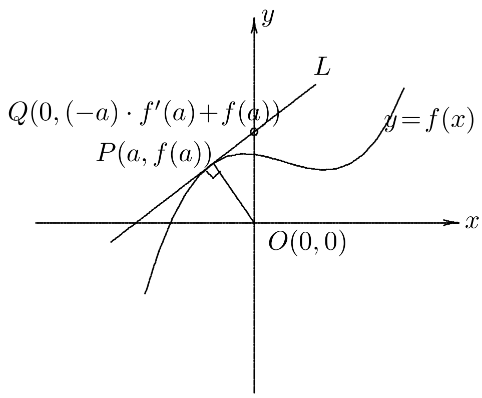
$\therefore\ f'(a)=0 \therefore\ a+f(a)\cdot f'(a)=0$

註:此種解法爲一些考生之解法, 因此題不可用 (2) 來證明 (1)。

另解: (2) 過 $P(a,f(a))$ 之切線方程式爲

$L: y-f(a)=f'(a)(x-a)$

令 $x=0$ 得 $y=(-a)\cdot f'(a)+f(a)$



(i) 當 $a=0$ 時, $y=f(a)\neq 0$

此時 P 點落在 y 軸上,

又 $a+f(a)\cdot f'(a)=0$

$\therefore\ f'(a)=0$, 切線爲水平線,

$\therefore\ \overleftrightarrow{OP}\perp$ 切線 L,

$\therefore\ \overleftrightarrow{OP}$ 是切線的法線。

(ii) 當 $a\neq 0$ 時, 得

$Q(0,(-a)f'(a)+f(a))$

$\therefore\ \overline{OQ}=|(-a)\cdot f'(a)+f(a)|$

$\because\ \ \overline{OP}^2+\overline{PQ}^2$

$=a^2+(f(a))^2+a^2+a^2\cdot(f'(a))^2$

$=2a^2+(f(a))^2+a^2\cdot(f'(a))^2$

$\therefore\ \ \overline{OQ}^2-(\overline{OP}^2+\overline{PQ}^2)$

$=a^2(f'(a))^2-2af'(a)\cdot f'(a)+(f(a))^2$

$\quad -2a^2-(f(a))^2-a^2(f'(a))^2$

$=-2a^2-2af(a)f'(a)$

$=-2a(a+f(a)\cdot f'(a))$

$=(-2a)\cdot 0=0$

$\therefore\ \triangle OPQ$ 為直角三角形, $\therefore\ \overleftrightarrow{OP}\perp L$

$\therefore\ \overleftrightarrow{OP}$ 為圖形上過 P 之法線

另解: (2) (證明法線通過原點)

$\because$ 圖形上過 $P(a,f(a))$

之切線斜率為 $f'(a)$

(i) 若 $a=0$, 則 $f(a)\neq 0$

$\because\ a+f(a)\cdot f'(a)=0\ \therefore\ f'(a)=0,$

且 P 在 y 軸上, $\therefore$ 法線過原點,

$\therefore\ \overleftrightarrow{OP}$ 切線過 P 之法線

(ii) 若 $a\neq 0$, 則

$\because\ a+f(a)\cdot f'(a)=0$ 成立,

$\therefore\ f'(a)\neq 0,$

$\therefore$ 過 P 之法線方程式為

$y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)$

$$\therefore\ y-f(a)+\frac{1}{f'(a)}(x-a)=0$$

將 (0,0) 代入上式得

$$-f(a)+\frac{-a}{f'(a)}=\frac{-f(a)\cdot f'(a)-a}{f'(a)}=0$$

$\therefore$ 原點在法線上

$\therefore\ \overline{OP}$ 為切線過 P 之法線。

(B) 社會組

1. 試題分佈均勻中稍重第三冊, 然為漂亮配分

試題各冊配分如下:

冊別	一	二	三	四
配分	20.4	19.2	38.4	22

註:試題雖偏重第三冊然皆為綜合性試題, 包括各章節。

2. 試題安排欠妥當, 影響學生解題情緒。

題目:研究十位學生某次段考甲、乙兩學科測驗成績的相關性, 設其相關係數為 r,

若 $r=1$ 表完全正相關,

$r=-1$ 表完全負相關

$0.7\leq|r|<1$ 表高度相關,

$0.3\leq|r|<0.7$ 表中度相關

$0<|r|<0.3$ 表低度相關,

$r=0$ 表零相關。

已知此十位學生的成績如下:

學生代號	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	總計
甲科測驗	3	4	8	9	5	6	7	7	6	5	60
乙科測驗	9	8	5	6	7	6	5	7	8	9	70

則此次甲、乙兩科學科測驗成績之相關程度為

(A) 高度相關 (B) 中度相關

(C) 低度相關 (D) 完全正相關

(E) 完全負相關

註:此題不宜安排在選擇題第一題, 學生在患得患失心情未平靜的環境下, 又要製表, 又怕公式背錯, 結果不錯誤才怪, 希望以後命題教授能注意改進。

3. 試題命題經精心設計, 然對社會組學生是叫好不叫座。

今年社會組試題有創造性, 夠水準, 幾乎每一題皆需熟練的數學知識, 敏捷的思考能力與快準的計算, 才能善盡其功, 否則一籌莫展, 今將容易錯誤的試題, 提出探討;

題目:設平面 $x+y+z=1$ 與球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 相交部分爲圓 S, 已知平面 $2x+2y+z=1$ 與圓 S 交於 P,Q 兩點, 則 $\overline{PQ}$ 之長爲 ______。

解:(1) 設圓心 $H(a,b,c)$,

則 $\overrightarrow{OH} // \overrightarrow{N}$ 其中 $\overrightarrow{N}=(1,1,1)$,

$\therefore\ \overrightarrow{OH}=t\overrightarrow{N}$, $t\in R$,

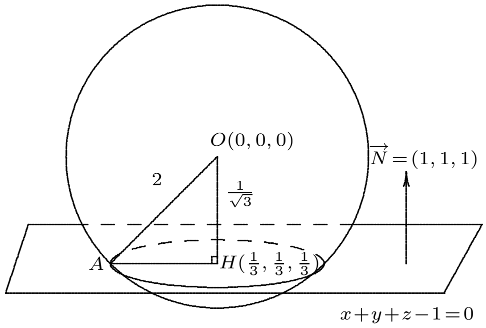
$\therefore\ (a-1,b-1,c-1)=t(1,1,1)$,

$$\therefore \begin{cases} a-1=t \\ b-1=t \\ c-1=t \end{cases} \therefore \begin{cases} a=1+t \\ b=1+t \\ c=1+t \end{cases}$$

$\because\ H$ 在平面上

$\therefore\ (1+t)+(1+t)+(1+t)=1 \ \therefore\ t=-\frac{2}{3}$

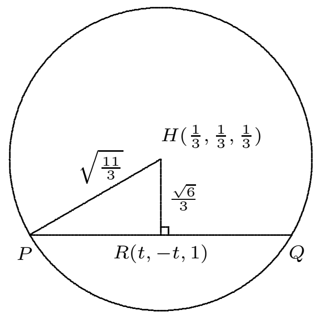
$\therefore\ H(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$



其中 $\overline{OH}=\sqrt{(\frac{1}{3})^2+(\frac{1}{3})^2+(\frac{1}{3})^2}$

$=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

又 $\overline{OA}=2, \overline{AH}=\sqrt{4-\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{11}{3}}=\overline{HP}$ (如下圖)



(2)

$$\overleftrightarrow{PQ}: \begin{cases} x+y+z=1 \text{..........................} 1 \\ 2x+2y+z=1 \text{................} 2 \end{cases}$$

2式−1式 得 $x+y=0$ 代入 1 得 $z=1$

$$\therefore \begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=1 \end{cases} \quad \therefore R(t,-t,1)$$

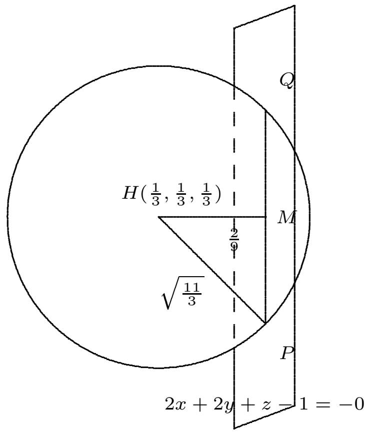
$\therefore\ \overline{HR}=\sqrt{(t-\frac{1}{3})^2+(-t-\frac{1}{3})^2+(1-\frac{1}{3})^2}$

$=\sqrt{2t^2+\frac{6}{9}}\geq\frac{\sqrt{6}}{3}$

$\therefore\ \overline{PQ}=2\overline{PR}=2\sqrt{(\sqrt{\frac{11}{3}})^2-(\frac{\sqrt{6}}{3})^2}$

$=2\sqrt{\frac{11}{3}-\frac{2}{3}}=2\sqrt{3}$

另解:(以下爲誤解)



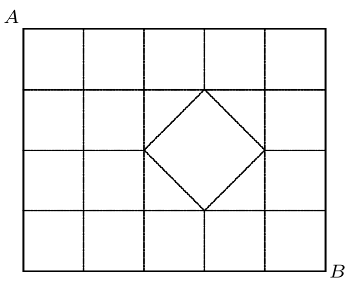
$$\because\ \overline{HM}=\frac{|\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}-1|}{3}=\frac{2}{9}$$

(錯誤, 因 $\overline{HM}\perp$ 平面, $2x+2y+z-\!-1=0$
但 $M\notin\overline{PQ}$ 請注意),

$$\begin{aligned}\therefore\ \overline{PQ}&=2\overline{MP}\\&=2\sqrt{\frac{11}{3}-\frac{4}{81}}\\&=2\sqrt{\frac{293}{81}}\\&=\frac{2}{9}\sqrt{293}\end{aligned}$$

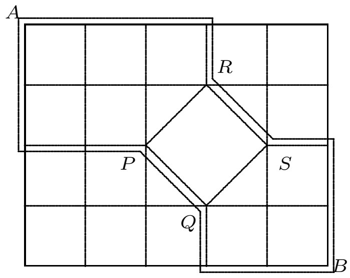
註:有許多考生用此法解, 這是誤解, 請改進。

題目: 下圖所示為一含有斜線的棋盤形街道圖, 今某人欲從 A 取捷徑走到 B, 共有 ______ 種走法。



解:(1) 如圖 $A-P-Q-B$

得 $\frac{4!}{2!2!}\times 1\times\frac{3!}{2!}=18.$

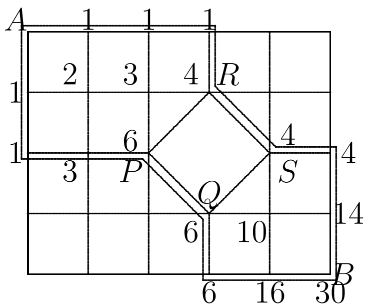


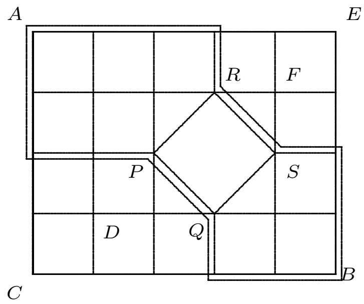
(2) 如圖 $A-R-S-B$

得 $\frac{4!}{3!}\times 1\times\frac{3!}{2!}=12$

$\therefore 18+12=30$ 種。

另解:由加法原理得共30種





註一些考生除以上方法外再考慮

(1) $A-C-B$

(2) $A-D-B$

(3) $A-E-B$

(4) $A-F-B$ 然後相加, 這是錯誤,

請注意。

題目:設 $f(x)$ 與 $g(x)$ 爲實係數多項式, 以 x^2-3x+2 除 $f(x)$ 得餘式 $3x-4$, 以 $x-1$ 除 $g(x)$ 得餘式 5, 且 $g(2)=-3$
(1) 試求以 $x-1$ 除 $f(x)+g(x)$ 的餘式。
(2) 試證 $f(x)\cdot g(x)=0$ 在 1 與 2 之間有實根。

解:(1) 設 $f(x)=(x^2-3x+2)q(x)+3x-4$
$=(x-1)(x-2)q(x)+3x-4$
$\therefore\ f(1)=-1$, 又 $g(1)=5$,
$\therefore f(x)+g(x)$ 除以 $x-1$ 的餘式爲
$f(1)+g(1)=-1+5=4$................答
(2) $\because\ g(1)=5,\ g(2)=-3$
$\therefore g(1)\cdot g(2)=-15<0$
$\therefore\ g(x)=0$ 在 1 與 2 之間有實根
$\therefore\ f(x)\cdot g(x)=0$ 在 1 與 2 之間有實根。
註:(i) 此題亦可由
$\because\ f(1)=-1,\ f(2)=2,$
$\therefore\ f(1)\cdot f(2)=-2<0$
$\therefore\ f(x)\cdot g(x)=0$ 在 1 與 2 之間有實根。
(ii) $f(x)\cdot g(x)=0$ 表 $f(x)=0$ 或 $g(x)=0$ 非 $f(x)=0$ 且 $g(x)=0$。考生可能誤解爲 $[f(1)\cdot g(1)]\times[f(2)\cdot g(2)]=(-1)\cdot 5\cdot 2\cdot(-3)=30>0$ 而無法得證, 請注意。

二. 建議

1. 請命題教授命題時以考慮提高學生們的學習興趣為原則。

   近10年來聯考高標平均分數自然組 46.8 分, 社會組 47.6 分, 低標平均分數自然組 31.5 分, 社會組 31.4 分。又 (84) (85) 年分數偏低, 教師在此情況下, 很難說服學生安心學習, 故請命題教授能體諒高中數學教師的苦心。以下爲新教材實施後共10年來各組高低標分數表, 供參考。
2. 請聯招會愼重甄選試考考生

   試考考生該以科爲原則, 試考數學科的考生以高三應屆考生, 已甄選保送者爲對象, 如此才能測出試題的合理性。
3. 請命題教授對試題的安排由淺入深普遍合理化, 尤其社會組的考題, 如此才能眞正測出學生的程度。
4. 請考生安心學習, 多思考, 多演練, 一分努力, 一分收獲, 祝學習數學愉快。

近10年第一類組數學高低標分數表

年度	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	平均
高標	44	32	49	70	52	48	55	50	36	40	47.6
低標	29	21	34	49	34	31	37	33	21	25	31.4

近10年第 二, 三, 四 類組數學高低標分數表

年度	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	平均
高標	45	43	48	46	42	45	52	57	45	45	46.8
低標	32	28	33	32	26	29	33	39	31	32	31.5

—本文作者任教於台南縣新化高中—