如何同時解決許多極值的問題

吳建生

(一) 下列有幾個常見的問題或公式

A: 代數類

(1) 算術均數大於或等於幾何均數 ($AP \geq GP$), 即若 $b_1, \cdots, b_n$ 均為正數, 則 $\frac{b_1,+b_2+\cdots+b_n}{n} \geq \sqrt[n]{b_1 b_2 \cdots b_n}$。

(2) $\theta_1, \cdots, \theta_n$ 均為銳角且 $\theta_1 + \cdots + \theta_n = \pi/2$, 求 $\tan\theta_1 + \cdots + \tan\theta_n$ 之最小值。

(3) $\forall i, b_i > 0$ 且 $n, m \in N$, 則 $n^{m-1}(b_1^m + b_2^m + \cdots + b_n^m) \geq (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)^m$。

B: 幾何類

(4) 定周長之 n 邊形, 何種形狀有最大面積?

(5) 圓內接 n 邊形, 何種形狀有最大面積?

(二) 以上諸題中, 先考慮最細微的變化, 先固定 n 個變量中 $(n-2)$ 個, 剩下兩個作有系統的算術平均化, 在和保持不變之前提下, 發現某些量遞增 (減)。若此平均化步驟無限次進行, 其極限即可解決上列的問題, 以下將逐步說明。

1. 算術平均化極限定理

實數列 $\langle E\rangle = \langle E_1, E_2, \cdots, E_n\rangle$, 平均化一週期之新數列為 $\langle E^{(1)}\rangle = \langle E_1^{(1)}, E_2^{(1)}, \cdots, E_n^{(1)}\rangle$, 則 $\forall i, 1 \leq i \leq n$, $\lim_{m\to\infty} E_i^{(m)} = \frac{\sum_{k=1}^n E_k}{n}$(即諸數全等)。

$\langle E^{(1)}\rangle$ 之說明:

例: $\langle E\rangle = \langle 24, 40, 60, 36, 41, 31\rangle$, $E_1 \otimes E_2$ 指對 E_1, E_2 作算術平均化, 過程如下:

$$
\begin{array}{rccccccc}
\langle E\rangle = \langle & 24 \otimes & 40\,, & 60\,, & 36\,, & 41\,, & 31 & \rangle \\
& \downarrow & \downarrow & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
& 32 & 32 \otimes & 60 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
& & \downarrow & \downarrow & \vdots & \vdots & \vdots & \\
& & 46 & 46 \otimes & 36 & \vdots & \vdots & \\
& & & \downarrow & \downarrow & \vdots & \vdots & \\
& & & 41 & 41 \otimes & 41 & \vdots & \\
& & & & \downarrow & \downarrow & \vdots & \\
& & & & 41 & 41 \otimes & 31 & \\
& & & & & \downarrow & \downarrow & \\
& & & & & 36 & 36 & \\ \hline
\langle E^{(1)}\rangle = \langle & 32\,, & 46\,, & 41\,, & 41\,, & 36\,, & 36 & \rangle
\end{array}
$$

證明: 定義

$$
\begin{aligned}
|\langle E\rangle| &= \max\{E_1, E_2, \cdots, E_n\} \\
&\quad - \min\{E_1, E_2, \cdots, E_n\} \\
&= \max\{E_{kl} | E_{kl} \\
&= |E_k - E_l|, 1 \leq k, l \leq n\}
\end{aligned}
$$

今平均化一週期, 結果如下:

$$E_1^{(1)}=\frac{E_1+E_2}{2},$$

$$E_2^{(1)}=\frac{E_1^{(1)}+E_3}{2}$$

$$=\frac{\frac{E_1+E_2}{2}+E_3}{2}$$

$$=\frac{E_1+E_2+2E_3}{2^2}$$

$$E_3^{(1)}=\cdots$$

$$=\frac{E_1+E_2+2E_3+2^2E_4}{2^3},\cdots$$

$$E_k^{(1)}=\frac{E_1+E_2+2E_3+\cdots+2^{k-1}E_{k+1}}{2^k}$$

最後

$$E_{n-1}^{(1)}=E_n^{(1)}=\frac{E_1+E_2+2E_3+\cdots+2^{n-2}E_n}{2^{n-1}},$$

而

$$E_i^{(1)}-E_j^{(1)}=\frac{E_1+E_2+\cdots+2^{i-1}E_{i+1}}{2^i}-\frac{E_1+E_2+\cdots+2^{j-1}E_{j+1}}{2^j},$$

上面兩分式之分子, 各有 2^i 和 2^j 個 E, 現在若擴分至分母爲 2^{n-1}, 則分子各有 2^{n-1} 個 E, 且其中 E_1 和 E_2 至少對消兩次, 因若 $i=1, j=n$ 之極端情形亦有

$$E_1^{(1)}=\frac{E_1+E_2}{2},$$

$$E_n^{(1)}=\frac{E_1+E_2+\cdots+2^{n-2}E_n}{2^{n-1}},$$

故

$$E_i^{(1)}-E_j^{(1)}=\frac{\sum(E_k-E_l)}{2^{n-1}}$$

而其分子最多有 $2^{n-1}-2$ 項, 故

$$|E_i^{(1)}-E_j^{(1)}|\le\frac{2^{n-1}-2}{2^{n-1}}|\langle E\rangle|。$$

由歸納法知:

$$\forall m\in N,\quad |\langle E^{(m)}\rangle|\le\Big(\frac{2^{n-1}-2}{2^{n-1}}\Big)^m|\langle E\rangle|,$$

今取極限得 $\lim\limits_{m\to\infty}|\langle E^{(m)}\rangle|=0$, 即 $\lim\limits_{m\to\infty}E_i^{(m)}=\frac{\sum_{k=1}^n E_k}{n}$ (即諸數全等)

2. 平均化定理之應用 (前述的5個問題)

(1)

$$AP=\frac{b_1+\cdots+b_n}{n},\quad GP_0=\sqrt[n]{b_1\cdots b_n}$$

證法: 先將 b_1, b_2 平均化成 $\frac{b_1+b_2}{2}$, 則 AP 不變, 但

$$GP_1=\sqrt[n]{(\frac{b_1+b_2}{2})^2b_3\cdots b_n}\ge GP_0,$$

持續做算術平均化, 可見 AP 不變, GP_n 漸增極限時, $AP=\lim_{n\to\infty}GP_n$, 故得證 $AP\ge GP_0$ (且知 $AP=GP_0$ 發生於 $b_1=b_2=\cdots=b_n$ 時)。($GP_0=GP$)。

(2) $\theta_1,\theta_2,\cdots\theta_n$ 均銳角, 且 $\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n=\pi/2$, 求 $\tan\theta_1+\tan\theta_2+\cdots+\tan\theta_n$ 之最小值?

求法: 由

$$\begin{aligned}&\tan\theta_1+\tan\theta_2\\ =&\frac{\sin(\theta_1+\theta_2)}{\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2}\\ =&\frac{2\sin(\theta_1+\theta_2)}{\cos(\theta_1-\theta_2)+\cos(\theta_1+\theta_2)}\\ \ge&\frac{2\sin(\theta_1+\theta_2)}{1+\cos(\theta_1+\theta_2)}\\ =&2\tan\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\end{aligned}$$

故對 $\theta_1, \cdots \theta_n$ 做平均化, 可知 $\theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_n$ 時有最小值 $n \tan \frac{\pi}{2n}$。

(3) $\forall i, b_i > 0$, $n, m \in N$, 則

$$n^{m-1}(b_1^m + b_2^m + \cdots + b_n^m) \geq (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)^m$$

證法: 同理先處理2個變數, 若 $A > 0, B > 0, m \in N$, 此處 $l = \frac{|A-B|}{2}$, 則

$$\begin{aligned}
& A^m + B^m \\
&= (\frac{A+B}{2} + l)^m + (\frac{A+B}{2} - l)^m (l \geq 0) \\
&= (\frac{A+B}{2})^m + f(l) + g(l) \\
&+ (\frac{A+B}{2})^m + f(-l) + g(-l) \\
&= 2(\frac{A+B}{2})^m + 2f(l) \geq 2(\frac{A+B}{2})^m
\end{aligned}$$

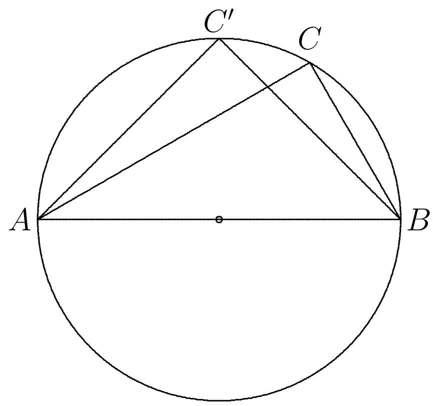
($f(l)$ 爲二項式展開後 l 之偶次項和, 而 $g(l)$ 則爲奇次項和)。

其他同理可推。

(4) 定周長之 n 邊形, 以正 n 邊形面積最大。

(5) 圓內接 n 邊形以正邊形面積最大。

處理方法 (如圖) 類似 (4), 但不同之處是對弧做平均化。



(拙作承蒙審查先生精心的修改許多不當之處, 特此感謝)

—本文作者任教於高雄女中—