三角形內的比例線段(二)

劉俊傑

一. 前 言

從本文開始, 我將嘗試以在第一篇文章中所得到的比例公式, 來進行嚴謹的邏輯推理, 導引出一系列關於平面幾何學的性質。我所要研究的主要圖形, 是在三角形各邊取等比例點, 連接它們形成新的小三角形, 然後重覆這個作圖方法, 如圖 A 所示, 爲便於討論將稱之爲比例三角形。

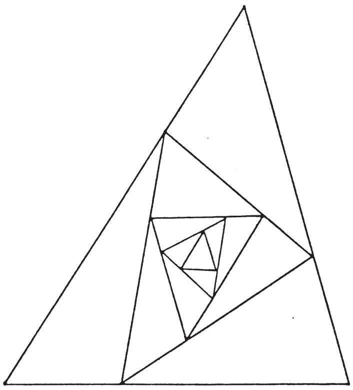

圖 A

我們將驚訝地發現到, 在這個看似簡單的規律圖形中, 存在著許許多多點共線, 線共點, 平行線 $\cdots$ 等的幾何關係, 而在這些點、線彼此之間也都互有關連, 它們相互架構出一套完整的推理系統及美麗的幾何圖形。

比例三角形原本只是一個簡單的作圖方法, 但只需要拿把直尺一比, 就會發現有平行線及共線點在這單純的圖形中, 等這些性質被推理證明後, 又由它們製造出新的平行線及點共線等題材, 如此不斷地衍生擴展, 一道接著一道的性質被發現並予以解決。

在做這個幾何圖形的研究過程中, 深深體會到, 只需利用比例的性質, 就可以盡情地討論點共線, 線共點, 平行線, 線段比 $\cdots$ 等題材。事實上, 我是在大量處理比例三角形的性質時, 發現到有許多過程完全相同的比例計算, 爲了節省時間, 便於求值, 遂逐步地將這些計算過程整理成公式, 爾後只要遇見符合條件的情況, 立即代入公式, 就可以很快地得到所想要的比例值, 這些公式就是前篇文章的 37 個比例公式。[8]

二. 本 文

性質 1.

已知: $\frac{AD}{DB}=\frac{BE}{EC}=\frac{CF}{FA}=\frac{DH}{HE}=\frac{FI}{ID}=\frac{1}{2}$

求證: $HI//BC$ (如圖1)

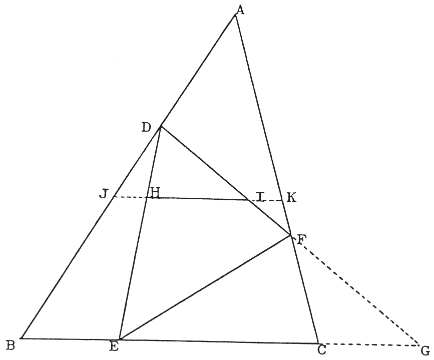

圖 1

證明:

(i) 由 Menelaus 定理, 得知

$$\frac{FA}{CF}\frac{DB}{AD}\frac{GC}{BG}=1\Rightarrow\frac{GC}{BG}=\frac{1}{4}$$

再應用 Menelaus 定理

$$\frac{FG}{DF}\frac{CB}{GC}\frac{AD}{BA}=1\Rightarrow\frac{FG}{DF}=1$$

(ii) 將 $\frac{FI}{ID}=\frac{1}{2}$, $\frac{FG}{DF}=1$, 代入公式 I-(2), 得到 $\frac{DI}{IG}=\frac{1}{2}$ 將$\frac{BE}{EG}=\frac{1}{3}$, $\frac{GI}{ID}=\frac{2}{1}$, $\frac{DH}{HE}=\frac{1}{2}$, 代入公式 III-(4), 得知 $\frac{DJ}{JB}=\frac{1}{2}$ 將 $\frac{AD}{DB}=\frac{DJ}{JB}=\frac{1}{2}$, 代入公式 I-(5), 得到了 $\frac{AJ}{JB}=\frac{5}{4}$

(iii) 綜合 $\frac{BE}{EC}=\frac{AD}{DB}=\frac{1}{2}$, $\frac{AJ}{JB}=\frac{5}{4}$, $\frac{EH}{HD}=\frac{2}{1}$, 套入公式 V-(5), 得有 $\frac{CK}{KA}=\frac{4}{5}$, 由 (ii), (iii) $\Rightarrow$ $\frac{AJ}{JB}=\frac{AK}{KC}$ 因此得證 $HI//BC$。

性質 2.

已知: $\frac{JE}{EG}=\frac{GH}{HI}=\frac{IK}{KJ}=\frac{EB}{BH}=\frac{KC}{CE}=\frac{1}{2}$ 延長 BC, 交 GJ, JI 於A, D

求證: $\frac{AD}{GI}=\frac{5}{9}$, 且 $\frac{BG}{GI}=\frac{1}{3}$ (如圖2)

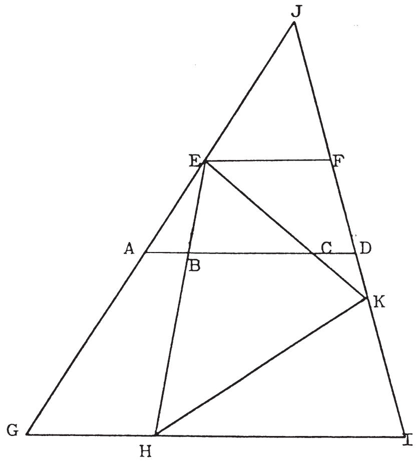

圖 2

證明:

(i) 利用性質 1., 得知

$$\frac{JA}{JG}=\frac{5}{9}\text{ 且 }AD//GI\Rightarrow\frac{AD}{GI}=\frac{5}{9}$$

(ii) 因爲 $AB//GH$ 且

$$\frac{EB}{EH}=\frac{1}{3}\Rightarrow AB=\frac{1}{3}GH=\frac{1}{9}GI$$

過 E 點, 作 $EF//GI$, 同前理 $CD=\frac{1}{3}EF=\frac{1}{9}GI$, 由於 $AD=\frac{5}{9}GI$, 而

$$BC=AD-AB-CD=\frac{3}{9}GI=\frac{1}{3}GI$$

得證 $\frac{BC}{GI}=\frac{1}{3}$。

說明: 這兩個邊長的比例關係, 在後續的推理中, 將常被引用。

性質 3.

已知: 圖3 是在 $\triangle ABC$ 各邊取 $1:2$比例點, 連接比例點成新三角形, 並重覆作圖, 以後將以 $1:2\triangle S$簡稱之。

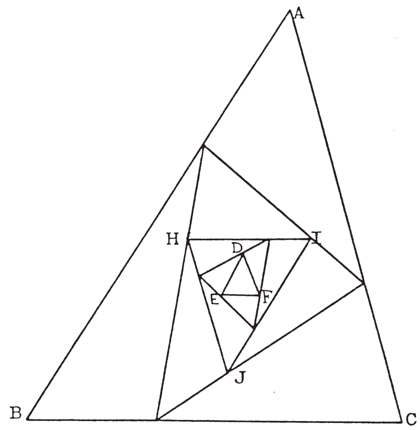

圖 3

求證: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

證明: 由性質 1, 得有 $HI//BC$, $HJ//AC$, $IJ//AB$, 所以 $\triangle ABC \sim \triangle JIH$ 同理可知 $\triangle DEF \sim \triangle JIH$, 所以得證 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$。

性質 4.

已知: $1:2\triangle S$, 如圖4。

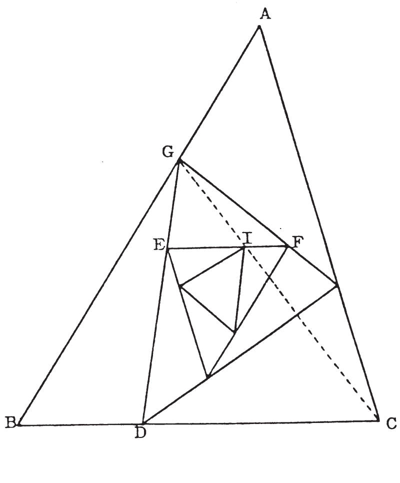

圖 4

求證: G, I, C 共線

證明: 由第一篇文章中的例題1, 即可得知這條線。因為它很重要, 也很漂亮, 又常被用來導引其它證明, 因此特別列在這裡。

性質 5.

已知: $\frac{AD}{DB} = \frac{BE}{EC} = \frac{1}{2}$, $BN = NC$,

求證: $DE//AN$ (如圖5)

證明: 因為 $\frac{BE}{EC} = \frac{1}{2}$, $BN = NC$, 代入公式 I-(4) $\Rightarrow$ $\frac{BE}{EN} = \frac{2}{1}$, 所以 $\frac{BD}{DA} = \frac{BE}{EN}$, 得證 $DE//AN$ 。

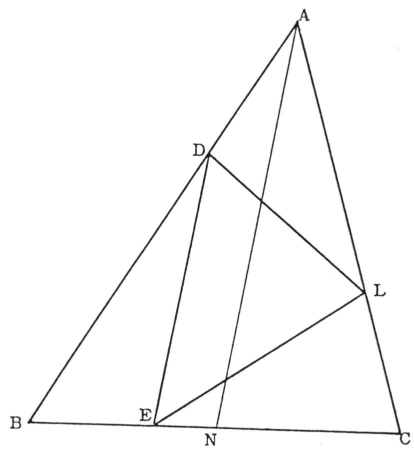

圖 5

性質 6.

已知: $\frac{AD}{DB} = \frac{BE}{EC} = \frac{CL}{LA} = \frac{1}{2}$, O 為 $\triangle ABC$ 的重心, 中線 BF 交 DL 於點 G, 中線 CP 交 DE 於點 H。

求證: $HG//BC$ (見圖6)

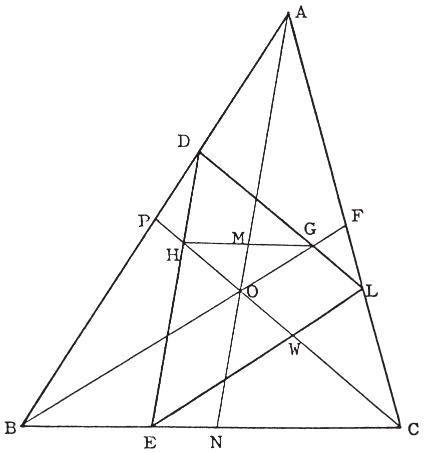

圖 6

證明:

(i) O 是重心, $AF = FC$。依據性質5, 知 $EL//BF$ 得 $\frac{LW}{EW} = \frac{FO}{BO} = \frac{1}{2}$

(ii) 同理 $CP//LD$, $\frac{DH}{HE} = \frac{LW}{WE} = \frac{1}{2}$, 同理可證 $\frac{LG}{GD} = \frac{1}{2}$。再由性質1, 得證 $HG//BC$ 。

性質 7.

已知: $\frac{AD}{DB} = \frac{BE}{EC} = \frac{CL}{LA} = \frac{1}{2}$, O 爲 $\triangle ABC$ 的重心。

求證: $\triangle ABC$ 三中線, 三等切分 $\triangle DEL$ 的邊。(如圖7)

證明: 利用性質6 的推理過程, 可得 H, W 爲三分點, 即 $\frac{DH}{HE} = \frac{LW}{WE} = \frac{1}{2}$, 同理可知 Z, T, K, G 亦爲三分點。由此得證本題。

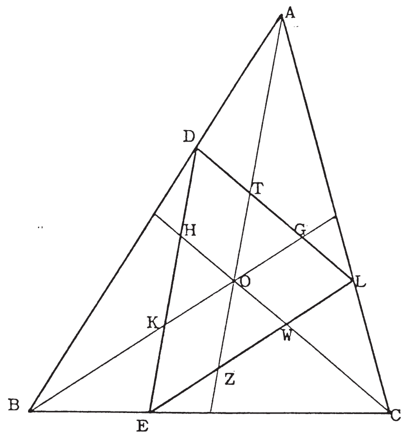

圖 7

性質8.

已知: $1:2\triangle S$,O 爲 $\triangle HIC$ 的重心。

求證: $AB = BC$ (如圖8)

證明:

(i) 由前文例題2 $\Rightarrow$ O 亦爲 $\triangle DAK$ 的重心。因爲性質5, $DE//FG$ 再由性質1, $FG//HC$, 綜合得知 $DB//HC$。所以 $\frac{CB}{BI} = \frac{HD}{DI} = \frac{1}{2}$。

(ii) 將 $\frac{IA}{AC} = \frac{1}{2}$, $\frac{IB}{BC} = \frac{2}{1}$ 代入公式 I-(4), 即可得證 $AB = BC$ 。

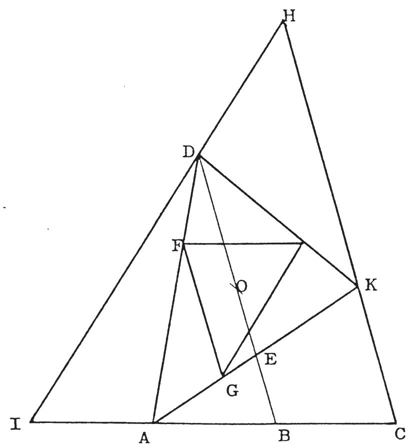

圖 8

性質 9.

已知: $1:2\triangle S$

求證: A,B,C 共線 (如圖9)

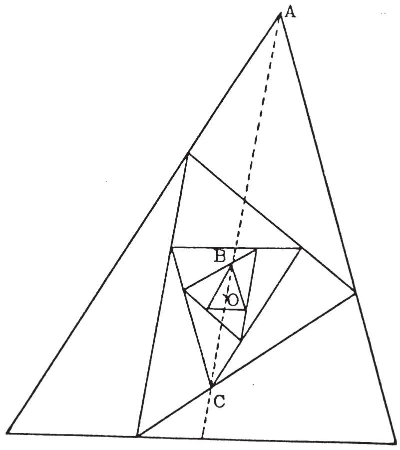

圖 9

證明: 由題意 C 爲三分點。因爲性質7 $\Rightarrow$ 重心 O 在 AC 線上。B 亦爲三分點; 同理 $\Rightarrow$ O 在 BC 線上由以上可得 A 在 OC 線上, B 在 OC線上, 得證 A,B,C 共線。

性質 10.

已知: $1:2\triangle S$

求證: AE,BF,CG 共點 (圖10)

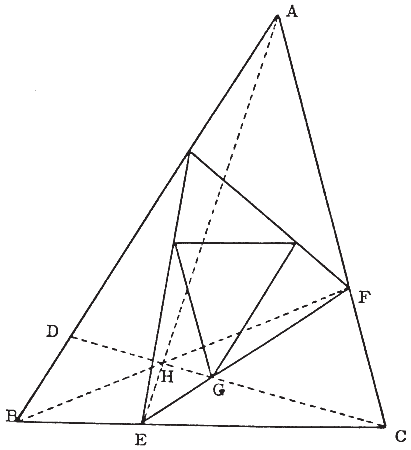

圖 10

證明: 由已知有比例式 $\frac{CF}{FA}=\frac{BE}{EC}=\frac{EG}{FG}=\frac{1}{2}$。代入公式 III-(2) 得 $\frac{AD}{DB}=4$。所以 $\frac{BE}{EC}\frac{CF}{FA}\frac{AD}{DB}=1$。依據 Ceva 定理, 得證 AE,BF,CG 共點 。

性質 11.

已知: $1:2\triangle S$

求證: A,B,C,D,E,F 共線 (圖11)

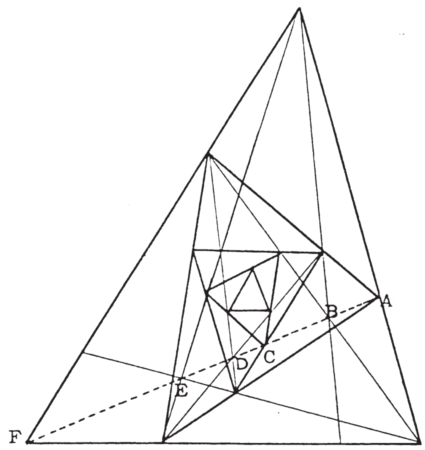

圖 11

證明: 由性質10 $\Rightarrow$ B,E 落在 AF 線上, 又因性質4 $\Rightarrow$ C 落在 AF 線上, 再由性質10 $\Rightarrow$ D 落在 AC 線上。綜合以上結果, 可得知 A,B,C,D,E,F 六點共線。

性質 12.

已知: $1:2\triangle S$ (如圖 12)

求證: $ACHE$ 是平行四邊形

證明: 從性質1, 知 $CH//AE$ 由性質1 得 $CH=\frac{1}{3}KE=AE$ 由此可知 $ACHE$ 是平行四邊形 。

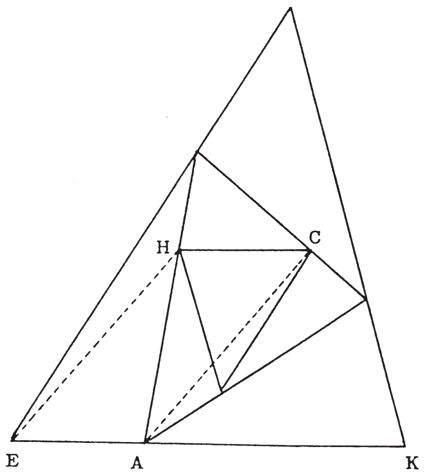

圖 12

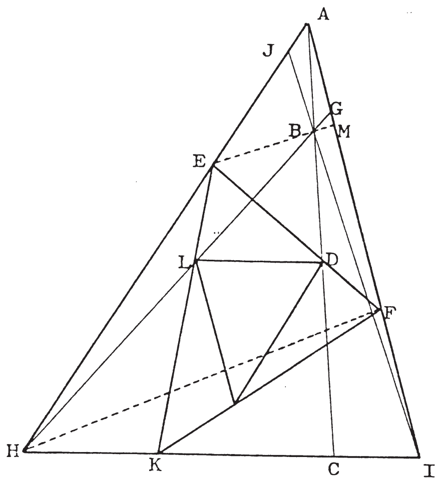

圖 13

性質 13.

已知: $1:2\triangle S, AD, \overrightarrow{HL}$ 交於點 B

求證: $EB//HF$ (如圖13)

證明:

(i) 已知 $\frac{HK}{KI}=\frac{AE}{EH}=\frac{EL}{LK}=\frac{1}{2}$, 代入公式 III-(2), 得 $\frac{AG}{GI}=\frac{1}{4}$; 同理 $\frac{IC}{CH}=\frac{1}{4}$。作 $\overrightarrow{IB}$ 交 AH 於 J, 由 Ceva 定理 $\Rightarrow \frac{AJ}{JH}=\frac{1}{16}$。

(ii) 因 $\frac{AJ}{JH}=\frac{1}{16}$, $\frac{HC}{CI}=\frac{4}{1}$。經由公式 II-(3), 有 $\frac{AB}{BC}=\frac{5}{16}$。在性質 2 時得知 $\frac{AD}{DC}=\frac{5}{4}$。現在將 $\frac{AB}{BC}=\frac{5}{16}, \frac{AD}{DC}=\frac{5}{4}$, 代入公式 I-(4)。運算得 $\frac{AB}{BD}=\frac{3}{4}$。

(iii) 再將 $\frac{ED}{DF}=\frac{2}{1}$, $\frac{AB}{BD}=\frac{3}{4}$, 代入公式 II-(2), 知 $\frac{AM}{MF}=\frac{1}{2}$。因爲 $\frac{AM}{MF}=\frac{AE}{EH}$, 得證 $EB//HF$ 。

性質 14.

已知: $1:2\triangle S$

求證: $AH//DG$ (圖14)

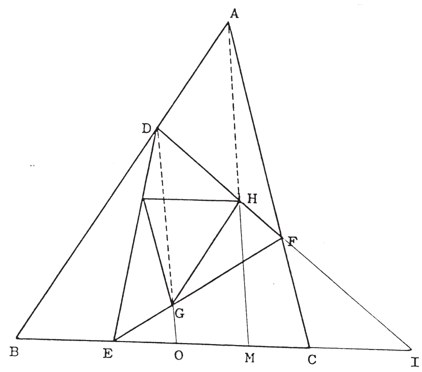

圖 14

證明:

(i) 引性質13-(i) 的步驟 $\frac{BM}{MC}=\frac{4}{1}$。由性質1-(i) 的步驟, 有 $CI=\frac{1}{3}BC$ 及 $DF=FI$。

(ii) 將 $\frac{IF}{FD}=1$, $\frac{EG}{GF}=\frac{1}{2}$, 代入公式 II-4, 得 $\frac{EO}{OI}=\frac{1}{4}$ 即 $EO=\frac{1}{5}BC \Rightarrow OI=\frac{4}{5}BC$。由以上可得知 $OC=OI-$

$CI=\frac{7}{15}BC$, $OM=OC-CM=\frac{4}{15}BC$, $BO=BE+EO=\frac{8}{15}BC$。
$\Rightarrow\ \frac{BO}{OM}=\frac{2}{1}=\frac{BD}{DA}$, 因此得證 $AH//DG$ 。

性質 15.

已知: $1:2\triangle S$, AC 交 KJ 於 B, EH 交 NJ 於 I。

求證: $BI//AE$ (如圖15)

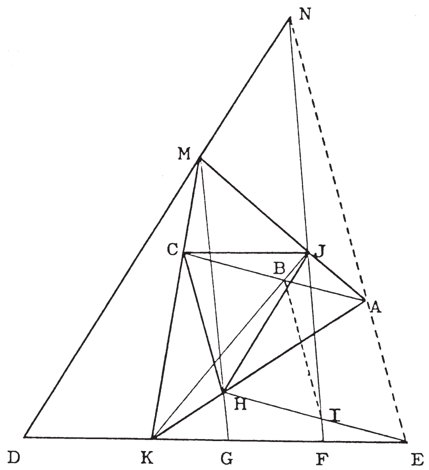

圖 15

證明:

(i) 因 $\frac{AJ}{JM}=\frac{MC}{CK}=\frac{1}{2}$, 應用公式 II-(3) $\Rightarrow\frac{AB}{BC}=\frac{3}{4}$。

(ii) 由性質14-(ii) 的步驟, 有 $\frac{DG}{GE}=\frac{8}{7}$, 配合 $\frac{DF}{FE}=\frac{4}{1}$, 代入公式 I-(4), 得到 $\frac{GF}{FE}=\frac{4}{3}$。再依據性質14. $\Rightarrow$ $NJ//MH$。所以 $\frac{EI}{IH}=\frac{EF}{FG}=\frac{3}{4}$, 綜合 (1) 知道 $\frac{AB}{BC}=\frac{EI}{IH}$。

(iii) 依據性質12. $\Rightarrow$ $ACHE$ 是平行四邊形, 因此 $AC//HE$。配合 (ii) 的結論得證 $BI//AE$ 。

性質 16.

已知: $1:2\triangle S$。

求證: $BE//IJ$ (如圖16)

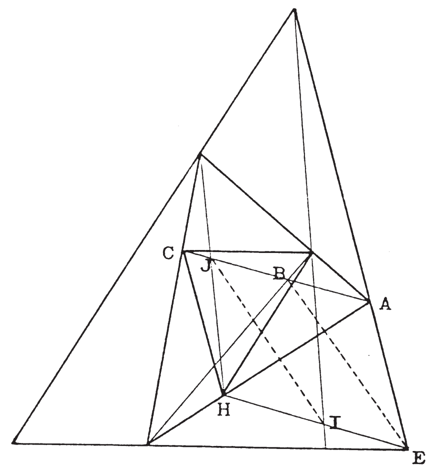

圖 16

證明:

(i) 已知 $1:2\triangle S$, 由公式 II-(3), 得 $\frac{AB}{BC}=\frac{3}{4}$。再由公式 II-(1), 得 $\frac{AJ}{JC}=\frac{6}{1}$。代入公式 I-(4), 有 $\frac{AB}{BJ}=1$。

(ii) 從性質15 的推論 $\Rightarrow$ $ABIE$ 平行四邊形。因此 $AB=EI$, 所以 $EI=BJ$。由性質14, $AC//EH\Rightarrow BEIJ$ 平行四邊形, 得證 $BE//IJ$ 。

性質 17.

已知: $1:2\triangle S$

求證: $AB//IH$ (如圖17)

證明: 由性質1 $\Rightarrow JD//BC$ 及 $HJ//AC$。故 $CGJF$ 是平行四邊形, 得$\angle C=\angle J$。再由性質2, 知$HJ=\frac{1}{3}AC$, $JD=BC$。因此 $IJ=\frac{1}{3}JD=\frac{1}{3}BC$ $\Rightarrow\frac{IJ}{BC}=\frac{HJ}{AC}=\frac{1}{3}$。所以 $\triangle ABC\sim\triangle HIJ$, 有 $\angle ABC=\angle HIJ$。因性質1$\Rightarrow$ $JD//BC$; $\angle BEJ=\angle ABC$(內

錯角) $\Rightarrow$ $\angle BEJ = \angle HIJ$, 得證 $AB//HI$。

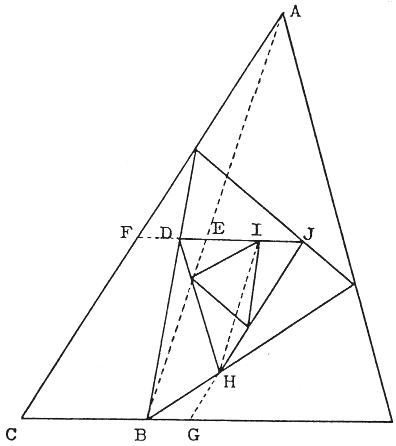

圖 17

性質 18.

已知:

(i) D, E, F 爲3分點

(ii) L 爲 AB 中點

(iii) G 爲 $\triangle ABC$的重心

求證: $IG//LJ$(如圖18)

證明:

(i) 由公式 II-3 及公式 I-(4) 可得 $AI = IJ$。已知 L 爲 AB 的中點, 因此 $LI//BJ$, 同理 $LJ//MK$, 得到 $LMKJ$ 爲平行四邊形 $\Rightarrow$ $LM = JK$。

(ii) 因 $AM//LJ \Rightarrow \angle LJI = \angle MAI$, $\angle AIM = \angle JIL$, $AI = IJ$,
有 $\triangle ILJ \cong \triangle IMA$, 知 $LI = IM$ $\Rightarrow$ $LI = \frac{1}{2}LM$。G 爲 $\triangle ABC$ 的重心, 由前文例題2, 可知 G 亦爲 $\triangle IJK$ 的重心。因此 $JO = OK \Rightarrow JO = \frac{1}{2}JK$, 綜合 (i)(ii) 可證 $IG//LJ$。

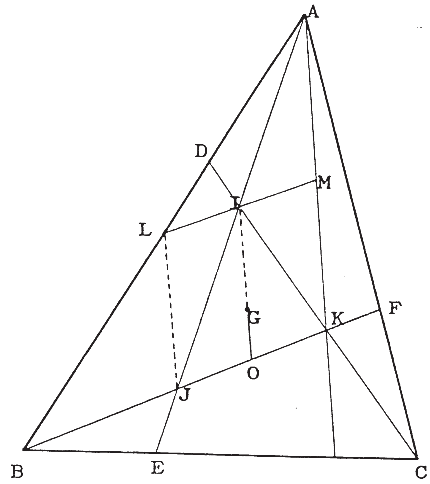

圖 18

性質 19.

已知: $1:2\triangle S$(如圖19)

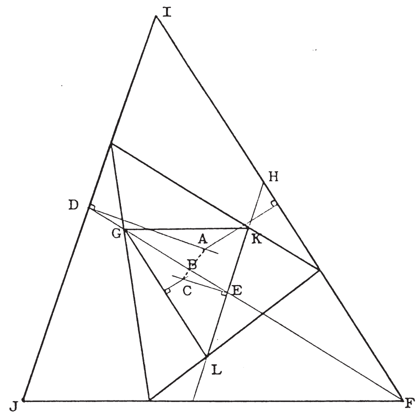

圖 19

求證: $\triangle GLK$ 的外心和 $\triangle IJF$ 的外心, 重心共線。

證明:

(i) 設 A 爲 $\triangle IJF$ 的外心, C 爲 $\triangle GLK$ 的外心, 由性質1 $\Rightarrow$ $KL//IJ$。因 $AD \perp IJ, CE \perp KL \Rightarrow AD//CE$。所以 $\triangle DAB \sim \triangle ECB$。再利用性質3的 $\triangle IJF \sim \triangle LKG$ 及從性質2知

$KL:IJ=1:3$。得到 $AD=3CE$, 所以 $BD=3BE, DF=3GE$。

(ii) 由性質2, 得 $\frac{FH}{FI}=\frac{5}{9}$, 因此 $\frac{FH}{HI}=\frac{5}{4}=\frac{FE}{ED}$, $BE+BD=DE$, $\frac{1}{3}BD+BD=\frac{4}{9}FD$, $BD=\frac{1}{3}FD$, D 爲 IJ 中點, 得知 B 爲 $\triangle IJF$ 重心。得證 $\triangle GLK$ 的外心, 和$\triangle IJF$ 的外心, 重心共線。

性質 20.

已知: $1:2\triangle S$。

求證: $\triangle DEF, \triangle GFH$ 和 $\triangle IFJ$ 三重心共線 (如圖20)

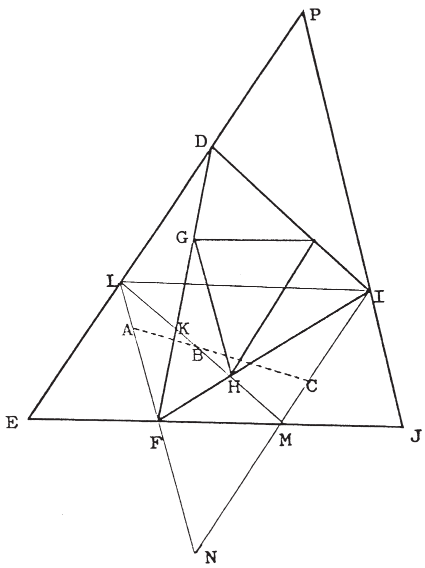

圖 20

證明: 設 A 爲 $\triangle DEF$ 的重心, C 爲 $\triangle IFJ$ 的重心, 由公式 $IV-(1)$ 可知 LHM 共線 , 如圖 AC 與 LM 的交點爲 B。

(i) 如圖延長中線 LF 交中線 IM 於 N, 因 $LN//PJ$ 且 $FM=MJ \Rightarrow IM=MN$; 同理可得 $LF=FN$。

(ii) 將 $\frac{IC}{CM}=\frac{2}{1}$, $IM=MN$, 代入公式 I-(2), 得 $\frac{IC}{CN}=\frac{1}{2}$, 並且 $\frac{LA}{AF}=\frac{1}{2}$, $LF=FN$, 代入公式 I-(2), 得 $\frac{LA}{AN}=\frac{1}{5}$, 再將 $\frac{LA}{AN}=\frac{1}{5}$, $\frac{NM}{MI}=1$, $\frac{NC}{CI}=\frac{2}{1}$, 代入公式 VI-(1), 得到 $\frac{LB}{BM}=\frac{4}{5}$。

(iii) $LI//FM$ 且 $FH=\frac{1}{2}HI \Rightarrow MH=\frac{1}{2}HL$, 配合 $\frac{LB}{BM}=\frac{4}{5}$, 代入公式 I-(4) $\Rightarrow LB/BH=2$。

(iv) 因為 $LF//GH$ 且 $LF=\frac{1}{3}PJ=GH \Rightarrow LFHG$ 為一平行四邊形。所以 HK 為中線且 $LK=KH$。配合 $\frac{LB}{BH}=2$, 代入公式 I-(4), 得 $\frac{KB}{BH}=\frac{1}{2}$。得知 B 為 $\triangle GFH$ 的重心。得證 $\triangle DEF, \triangle GFH$ 和 $\triangle IFJ$ 三重心共線。

三. 結 論

比例三角形所討論的題材, 及使用的定理, 只需要對平面幾何學有些基礎的中學生, 都應該可以看得懂。主要的是想向他們介紹推理程序, 每一道性質都是由前面已得證的性質建立出來的, 而每一個推理步驟都是有憑有據, 毫不含糊, 如此所有的定理, 性質都能一路往前追溯, 直到幾個”無法證明”, ”人訂出來”的公設, 這也就是 公設推理系統 的結構。

在本文中許多的平行線或共線的性質, 不僅是對比例爲 $1:2$ 時成立, 事實上對於任何一般的 $a:b$ 都是可以成立的, 當然討論起來會比較複雜些, 以後將有專篇研討。

在往後的幾篇文章中, 將以本文所獲得的結果做基礎, 繼續對比例三角形進行更詳

盡的解析, 我們將會見到更多有趣的幾何性質, 展現於比例三角形中。

四. 参考資料

1. 九章編輯部譯, 幾何學辭典, 九章出版社, 1986。
2. D.R. Davis, Modern College Geometry, 1949。
3. Otto Schreier, Projective Geometry of n dimensions, Chelsea Publishing company,1985。
4. Roger A. Johnson, Advanced Euclidean Geometry, Dover Publications, INC.1960。
5. 孫文先, 平面幾何, 九章出版社,1986, P.31。
6. Howard Eves, A Survey of Geometry, Vol. 1。
7. 趙文敏, 幾何學概論, 九章出版社, 1986。
8. 劉俊傑, "三角形內的比例線段", 數學傳播, 第十九卷第二期, 84年6月, pp.76-85。

— 本文作者任教於臺灣省立西螺農工數學科 —