關於數學直覺思維的幾個問題

李文興 · 吳開朗

數學家們要進行數學創造, 必須依賴於直覺思維的自由發揮, 直覺思維是右腦的重要功能。美國著名心理學家 J.S. 布魯納曾指出:「直覺是一種行爲, 通過這種行爲, 人們可以不必明顯地依靠其分析技巧而掌握問題或情形的意義, 重要性和結構[1]。」現在, 我們來研究關於數學直覺思維的幾個問題, 並將其目錄列表如下:

一、數學直覺思維的含義;

二、數學直覺思維的主要特性;

三、數學直覺思維的基本類型。

一. 數學直覺思維的含義

「直覺」一詞是對「intuition」的意譯, 原意爲未經充分邏輯推理的直觀, 但它是以已經獲得的知識和已經積累的經驗爲基礎的。概括地說, 數學直覺即是對數學對象中的關繫和結構的直接領悟。

直覺思維的實質, 是思維模的嵌入過程。思維模是指主體在認識過程中依據經驗而確立的思維元素與其相應的思維框架 (scheme) 所形成的結構, 這種結構由於經驗的積累而形成模塊。直覺思維的過程, 乃是依據相似關聯來檢索大腦中所儲存的模塊, 而後將其嵌入於所思考的問題之中, 以形成新的模塊。這種思維過程可圖示如下:

$$\begin{array}{cccc|cccc}
A_1, & A_2, & \cdots & A_n & M_1, & M_2, & \cdots & M_n \\
\updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow \\
B_1, & B_2, & \cdots & B_n & [M_1(B_1)], & [M_2(B_2)], & \cdots & [M_n(B_n)]
\end{array}$$

圖中豎線的右邊是模塊, 其左邊是與模塊相對應的問題; 上下兩行相對應的字母, 表示對應關繫; 方括號內的字母表示由被嵌入的新問題而形成的新模塊。雖說直覺思維是直接 (一步) 完成嵌入的, 但直接並非快速, 因爲對於模塊的選擇還需要有一個過程。由於這種選擇具有明確的目的, 因而使用定向思維往往易於檢索有關信息; 如其不然, 則需要使

思維向建構方向發展, 用創造性的想像去聯貫和構造它們。

法國數學家 H. 龐卡萊 (Poincare,1854-1912) 是19世紀和20世紀之交的數學巨星, 他認爲:「這種對於數學秩序之感覺, 能使我們去推測隱蔽著的各種和諧性與聯繫, 但它並不是每個人都具備的。有些人既沒有這種如此難以定義的微妙的直覺, 亦沒有能夠勝過常人的記憶力和注意力, 於是他們就絕對不能理解比較高深的數學 ... 還有一些人或多或少地具有我們所說的特殊直覺, 於是盡管他們的記憶力並不超群, 但他們不僅能理解數學, 而且還可能成爲創造家。試圖去發明點什麼, 其成就的大小, 則視這種直覺在他們身上發展的程度而定。」[2] 法國數學家 R. 笛卡爾 (Descartes,1596-1650) 是近代唯理論哲學的代表人物, 他把直覺視爲一種理智活動, 稱之爲「理性直覺」, 並認爲通過直覺能夠發現作爲推理起點的、無可懷疑而清晰明白的概念, 歐幾里德 (Euclid, 約公元前330 — 公元前275) 的「原本」, 就是這種「理性直覺」的標本。

二. 數學直覺思維的主要特性

在整個數學思維活動中, 能夠使用邏輯語言來描述的, 僅僅是其中的一部分, 越是複雜的數學想像, 越少有邏輯性, 在邏輯語言無能爲力的地方, 只有以「直覺」一言以蔽之而已。數學直覺思維的主要特性有三, 現在分別討論之:

1. 非邏輯性

什麼是直覺呢? 龐卡萊認爲: 直覺乃是指某種與邏輯相異的東西。他曾經說過:「搞算術, 如同搞幾何, 或搞任何別的科學一樣, 需要某種與邏輯不同的東西。爲了表達這個某種東西, 我們沒有更好的字眼, 只能用『直覺』一詞。」爲什麼科學發明創造需要這種不同於純邏輯的東西呢? 這是因爲在探索未知世界的過程中, 人們的認識往往帶有很大的或然性, 其間有偶然的機遇, 有潛在的智能, 有來自書本知識的啓示, 也有來自於思維元素自身的分離與組合, 所有這些都不是邏輯所能表達清楚的。

直覺思維的非邏輯性, 主要是體現於直覺與邏輯之間的對立。龐卡萊曾經把數學家區分爲直覺型與邏輯型兩大類。他寫道: 「其中之一完全被邏輯所支配, 讀他們的書, 你就不得不相信, 他們是以步步爲營的方式前進的, 沒有給機遇留下任何餘地; 而另一類則是受直覺所指引, 他們在第一次出擊中, 就能夠迅速地達到征服的目的, 雖然這種征服有時也是不穩定的。」龐卡萊在這裡所說的第一次出擊即可達到目的, 也正好說明了直覺思維還具有直接性和簡潔性。對此, 美國著名數學家 G. 波利亞 (Polya,1887-1985) 也曾給以微妙而深刻地闡述, 他寫道: 「一個突然產生的, 展示了驚人的 (處於戲劇性重新排列之中) 新因素的想法, 具有一種令人難忘的重要氣氛, 並給人以強烈的信念。這種信念常常表現爲諸如『現在我有啦!』、『我求出來了!』、『原來是這一招!』等驚嘆。」

數學直覺思維的這種非邏輯性, 還表現在它與抽象思維的對立, 而經常與右腦中所

進行形象思維相聯絡。形象思維的重要特徵, 即是其綜合性和直觀性, 而數學直覺思維呈現在人們頭腦之中的也是一幅綜合的整體性圖象, 儘管它的某些細節可能是模糊不清的, 但它並非是不可靠的。

2. 自發性

數學直覺思維有時在朦朧中逐漸湧現, 有時猶如閃電一般突然誕生。前者的出現形式, 稱爲漸悟; 後者的出現形式, 稱爲頓悟。但是, 無論是漸悟或者是頓悟, 都是事前未曾料到, 在不知不覺之中已經獲得, 這就是直覺思維的自發性特徵。英國數學家 W.R. 哈密爾頓 (Hemilton,1805-1865) 在回憶自己發現四元數的經過時曾經說過, 當他攜妻子拉迪·哈密爾頓 (Lady Hemilton) 在步行去都柏林的途中來到勃洛翰 (Brouguam) 橋上時, 思想上的電路突然接通了, 從中落下的水花, 就是 I.J.K 之間的基本方程。[3] 龐卡萊也曾有過類似的經歷, 他回憶說:「我的脚剛踏上剎車板, 突然想到一種設想 ... 我用來定義富克斯函數的變換方法, 同非歐幾何的變換方法是完全一樣的。」[4]

德國數學家 K.F. 高斯 (Gauss,1777-1855) 經過數年的探索, 終於證明一個數論定理。在他的自述中曾這樣寫道:「最後我獲得了成功 ... 就像是一道忽然出現的閃光, 疑團一下子被解開了, 連我自己也無法說淸楚在先前已經瞭解的東西與使我獲得成功的東西之間是怎樣聯繫起來的。」高斯的這番話, 生動地說明了直覺思維的自發性特性。對於直覺思維的這種自發性, 也可以說是偶然性, 或者說是不可預期性。它可能會出乎意料地閃現在我們面前, 但也可能會姍姍來遲, 甚或是乾脆讓你白等。

3. 無意識性

龐卡萊是最早把人的無意識活動與直覺思維相聯繫的研究者之一, 他曾明確表示: 直覺思維是一種無意識活動。大家談論直覺思維的論著, 都要談及無意識或下意識問題。但是, 無意識並不等同於沒有意識, 對於它可以解釋爲 「暫時沒有被意識」、「來不及意識」、「沒有自我意識」、「不需要特意去意識」等等。

按照龐卡萊的說法, 他在數學發現中所遇到的那種「頓悟」, 常常是發生在「經過一種長久的自覺工作」之後。他在進行數學難題的求解時, 經過一段時間的沉思, 如果沒有進展, 就略作休息, 而後再繼續工作, 這時往往會有重要的新思路突然發生。他認爲在休息時刻, 這種無意識活動仍在繼續進行, 休息之後, 讓自覺工作一刺激, 馬上即可將休息時刻所獲得的但尙未進入意識的思維結果推動出來, 成爲自覺的活動。[5]

奧地利著名神經病理學家和心理學家弗洛伊德 (1865-1939) 把人的精神活動區分爲三個系統, 即無意識系統、下意識系統和意識系統。對於前兩個系統, 也可以並稱爲無意識系統。在一些心理學文獻中認爲二者都是描述一種低水平的心理過程。弗洛伊德認爲借助於夢境可以洞察到無意識系統的深處。1619年, 笛卡爾在多瑙河畔的諾伊堡軍營服役時, 曾連續作過三個奇特的夢, 他在夢境中

的無意識活動, 對於解析幾何基本原理的發現, 確乎起到一定的「徹悟」作用。[6]

三. 數學直覺思維的基本類型

美國數學家 M. 克萊因 (Kline) 曾提出:「數學發現不是依靠在邏輯上, 而是依靠在正確的直覺上。正如 Jacques Hadamard 所指出的, 嚴密僅僅是批准直覺的戰利品; 或者像 Hermann Weyl 所說的, 邏輯是指導數學家保持其思想健康和強壯的衛生學。」[7] 以直覺在數學發現中的作用而論, 可以將數學直覺劃分爲辯認直覺、聯絡直覺、審美直覺三種基本類型, 辯認直覺是辯認和預測數學新設想是否具有科學價値, 聯絡直覺是探究和考察不同數學理論之間的內在聯繫, 審美直覺是審查和評判數學新設想是否符合於數學理論的美學標準。現在分別討論如下:

1. 辯認直覺

數學家們在研究工作中, 對於理論發展方向往往會有多種設想, 對於解決問題方法往往會有多種思路, 何去何從, 必須求助於辯認直覺。德國數學家 D. 希爾伯特 (Hilbert,1862-1943) 爲了把數論中的二次互反律推廣到代數數域之中, 就曾利用過這種辯認直覺。C.瑞德 (Reid) 對此評論說:「通過對高斯古典互反律的研究, 希爾伯特能夠以一種簡單、優美、可以同時應用於代數數域的形式來重新表述這條定理 ... 後來, 數學家們認爲: 希爾伯特一直是通過猜想來進行構思的, 數學直覺的準確性在這裡表現得如此明顯, 這在希爾伯特的工作中是絕無僅有的。」[8]

複數概念的演化, 相繼在幾個世紀裡都是表現爲一種理性和想像之間的神秘結合, 此間, 數學家們也正是憑借著辯認直覺的導引而前進的。1545年, 意大利數學家卡爾丹 (Cardan,1501-1576) 首次用一個記號來表示這種無意義之物, 但是, 這樣做旣無邏輯上的保證, 又無現實原型, 以致當時對於複數的承認和使用, 完全是依賴於辯認直覺。無怪乎德國數學家 G.W. 萊布尼茲 (Leibniz,1646-1716) 當時曾經把複數的產生說成是「聖靈的超凡的啓示」。

數學家 H. 漢克爾 (Hankel) 曾經這樣說過:「可以說存在有一種科學機敏, 它指導著數學家們從事研究, 保護他們不致在毫無科學價値的問題和艱澀難解的領地上耗費精力。」[9] 這裡所說的「科學機敏」, 即是指辯認直覺。數學家 S. 拉瑪努眞 (Ramanujan,1887-1920) 被印度尊爲國寶, 他憑借著辨認直覺的引導猜想出許多有價値的數學公式, 僅是在他病重期間所留下的一個筆記本, 就記有600餘條公式, 其中有者直至本世紀50年代數學家們尙且未得解決。

2. 聯絡直覺

通過聯絡直覺的引導, 數學家們在原來認爲毫無關聯的諸理論分支之間, 往往可以覺察到某種統一性或相關性。在數學發展史上, 有很多數學理論問題的解決方法, 都是通過聯絡直覺而發現的。例如, 微分方程與積分方程、線性積分與線性代數之間的類比聯想, 就是利用聯絡直覺而進行的。

龐卡萊所提出的「觀念原子」, 也屬於聯絡直覺這種類型。他把數學家頭腦中的思想和觀念, 形象地比作帶勾的原子。這些觀念原子平時掛在牆上, 處於靜止狀態, 一旦開動思維機器, 成群結隊的觀念原子, 便在空中翩翩起舞。他們之間乘機相互碰撞、相互滲透、相互兼併, 又可重新結合而成爲新的觀念原子。這些新的觀念原子通過審美選擇, 即可進一步構成數學上的新思想、新概念和新方法。在數學學習和數學研究中, 我們決不可坐視聯絡直覺的降臨, 應該積極地開動思維機器, 驅使觀念原子飄然起舞, 使之在腦海中迅速地湧現出種種想像、猜測, 和一些形象思維的浪花, 以便聯絡直覺從中牽線搭橋, 進而撲捉有科學價値的新東西。

法國數學家 J.A. 狄多涅 (Dieudonne) 認爲「這些富於創造性的科學家與衆不同的地方, 在於他們對所研究的對象有一個活生生的構想和深刻的瞭解, 這種構想和瞭解結合起來, 就是所謂『直覺』」。[10] 狄多涅在這裡所說的「直覺」, 乃是把「構想和瞭解結合起來」的「直覺」, 顯然這也是一種聯絡直覺。由於聯絡直覺源源不斷地提供給數學認識活動以生動的素材, 致使數學科學猶如一棵巍然挺立的大樹, 枝繁葉茂, 亭亭如蓋。

3. 審美直覺

龐卡萊在巴黎心理學學會上的慶賀講演, 給意識與無意識的關係, 投射了一束燦爛的光輝。[11] 他認爲在無意識活動所形成的諸多組合中, 只有一部分是和諧、美妙、有用的。這些組合能夠觸動數學家的審美情感, 一旦這種感情被喚起, 它們即可有機會變成數學家的有意識行爲。阿達瑪在「數學領域中的發明心理學」一書中曾經提出:「在數學上, 激情會要求我們對於一個問題作出嚴格的證明, 而這初看起來似乎只是理智感興趣的事 ... 而龐卡萊甚至認爲: 美感對於發明來說, 乃是必不可少的, 沒有美感就不會有發明。」[12]

審美直覺的主要功能, 是判別一種新設想是否符合於數學理論的美學標準。這種美學標準在目前的數學家中尙未取得一致見解, 但是多數都認爲其中含有三個要素, 即和諧美、簡單美和奇異美。羅森在評價 A. 愛因斯坦 (Einstein,1878-1955) 時曾經這樣寫道:「在構造一個理論時, 他所採取的方法與藝術家所用的方法具有某種共同性; 他的目的在於求得簡單性和美, 而對於他來說, 美在本質上終究是簡單性。」和諧美的主要內涵是統一性, 在數學發展史上, 追求統一性已經取得很多重要成果, 而且數學理論越是向前發展, 越會變得更加諧和一致, 甚至那些一向相互隔絕的分支之間, 也會顯露出原先意想不到的關聯。

在數學研究中, 奇異美最容易吸引直覺思維的關注, 數學工作者只有不斷地發掘數學對象的奇異美, 才能探索未知世界的深層次問題。1826年, 挪威數學家 N.H. 阿貝耳 (Abel,1802-1829) 證明了高於四次的一般代數方程用根式求解的不可能性[13]。這個奇異性結論後來變成許多數學家審美選擇的方向, 他們轉而集中精力研究代數方程何時存在根式解的問題。經過深入發掘之後, E.伽羅華 (Galois,1811-1832) 創立了群論, 從

此, 代數學的發展, 從局部性質的研究轉變爲系統結構的整體分析。

數學家們所提出的檢驗數學理論眞理性的美學標準, 也就是他們的數學審美觀, 這種審美觀也凝聚著他們個人在數學研究中的經驗教訓和直覺感受, 往往具有一定的獨特性。在實際研究工作中, 審美直覺思維受其審美觀的影響, 有時也會發生誤導。1993年6月, 美國普林斯頓大學教授 A. 懷爾斯 (Wiles) 在英國劍橋作了三次演講, 宣稱他證明了懸案350多年的費馬大定理。他在審美直覺的引導下, 過份偏愛於 Euler 系, 以致在構造 Euler 系方面存在嚴重漏洞。後來他另闢蹊徑, 作出關於 Hecke 代數性質某些假設, 才得以圓滿完成自己的證明。他自己完成的論文, 題目爲「模橢圓曲線和 Fermat 最後定理」, 與此同時, 他又與 Taylor 合作爲自己論文所需要的 Hecke 代數性質, 完成一篇論文, 題目爲「某些 Hecke 代數的環論性質」。1994年10月25日, 美國 Ohio 州立大學教授 Karl Rubin 向數學界的朋友們發出了一個電子信件, 提出上述兩篇重要論文的預印本已經公開。

注釋

1. J.S. 布魯納著, 教育過程, P. 71。
2. H. 龐卡萊著, 數學上的創造, 數學譯林, 第5卷第3期, P. 254。
3. M. 克萊因著, 古今數學思想, 第三册, 上海科學技術出版社出版, P. 177。
4. 科學家論方法, 第二輯, 內蒙古出版社出版, 1985年, P. 264。
5. H. 龐卡萊著, 科學與方法, 商務印書館出版, 1933年, P. 46。
6. 梁宗巨著, 世界數學史簡編, 遼寧人民出版社出版, 1980年, P. 196。
7. M. 克萊因著, 古今數學思想, 上海科學技術出版社出版, 第四册, P. 99。
8. C. 瑞德著, 希爾伯特, 上海科學技術出版社出版, 1982年, P. 71。
9. 數學譯林, 1987年, 第2期, P. 111。
10. J.A. 狄多涅著, 我們應該講授新數學嗎?, 數學譯林, 1980年, 第3期。
11. J. 阿達瑪著, 數學領域中的發明心理學, 江蘇教育出版社出版, 1988年, P28。
12. 書名同 [11], P. 27-28。
13. Jour. für Math. 1, 1826, P. 65-84。

—本文作者李文興任教於安徽省銅陵財經專科學校, 吳開朗任教於安徽省阜陽師範學院—