商高、趙爽與劉徽關於勾股定理的證明*

曲安京

一. 緣起

「周髀算經」是流傳至今最古老的一部天算典籍, 它的成書年代保守估計應在公元前一世紀。該書開篇記述周公與商高的問答, 將中國數學史的源流回溯到公元前十一世紀, 由於商高的答辭中論述了勾股定理的內容, 因此歷來深受研究者的重視。

勾股定理在中國傳統數學 (尤其是幾何學) 中的重要性無論怎樣定位恐皆不會過分。遠在三國時代的趙爽注釋「周髀」並撰著"句股圓方圖說"之前, 有關勾股定理及勾股形問題的討論已經出現在「周髀算經」及「九章算術」等著作中, 但中算家究竟何時給予勾股定理以嚴格的證明, 則是人們對商高答周公問所寄寓濃厚興趣的原因所在。

本世紀五十年代, 中國大陸的數學史界曾就「周髀」中是否給出勾股定理一般形式的證明, 展開過頗爲熱烈的討論, 但終因其原文有關文字過於隱晦而難於疏通, 結果不了了之。

1982年, 台灣陳良佐先生發表文章, 討論趙爽的"勾股圓方圖注", 首次從探析趙爽對「周髀」中商高答問一段文字注釋的角度, 給出了原文一些極富啓發性的說明[1], 由此引發了新一輪"商高是否證明了勾股定理"的討論。

1989 年, 台灣李國偉先生在"第二屆 (台灣) 科學史研討會"上發表論文, 拋開趙爽注, 以爲「周髀」原文已經表明商高證明了勾股定理[2]。

幾乎同時, 陳良佐教授與美國程貞一先生亦發表論文, 再論商高答周公問, 他們給出的證明圖幾乎一致, 但陳教授以爲商高原文尙有個別疑點, 只是求弦的方法, 未必稱得上是對勾股定理的證明[3]; 而程貞一教授則主張, 商高已給出了該定理一個一般性的證明[4]。

1993年, 西安李繼閔先生發表論文, 給出商高原文另一種不同解釋, 李繼閔教授以爲, 前述三位學者將術文中的"矩"理解爲直角四邊形, 缺乏中算根據, 李文認爲, "矩"的古義一爲"矩線", 一爲"磬折形"(即曲尺形);"矩"演變爲今日 "矩形"的概念, 則是明代西方數學傳入中國之後的事[5]。

上述四種論點, 除陳良佐先生外, 皆力主商高已證明勾股定理, 李國偉先生以爲趙爽注與原文難相吻合, 李繼閔先生則逐字訓解趙注, 認爲它與經文完全一致。

*本文係筆者系列論文"「周髀」當論之四"。寫作時, 多次與古克禮 (C. Cullen) 博士討論, 承惠予指點, 獲益良多, 特此致謝。

1994年10月底, 筆者受紐約李氏基金資助到英國劍橋李約瑟研究所做爲期一年的訪學, 11月中, 倫敦大學古克禮 (C. Cullen) 先生在該所每周例行的古漢語英譯討論班上, 報告他英譯「周髀算經」中商高答問等有關內容, 在報告完畢時, 筆者便按照李繼閔教授有關“矩”的釋義, 提出一種與古克禮博士完全不同的看法, 受到質疑, 感覺難以自圓其說, 遂對此產生興趣。後經對商高答問及趙爽注文的仔細分析, 發覺將“矩”釋爲直角四邊形似非絕無可能, 因之由此出發, 重新探討商高原文與趙爽注釋的含義。

在完成對商高答問及趙爽注釋的疏解之後, 我從劍大圖書館等處找來了上述幾位學者的文章, 認眞拜讀之後, 發覺對經文的圖解與李國偉教授的觀點有些類似。李國偉先生的大作兩年前曾在李繼閔教授處見過, 當時沒有仔細拜讀, 依稀覺得其構圖十分複雜, 由於當時我對李繼閔教授的論述已然深信不疑, 認爲“商高定理”幾成定論, 因而未去研讀其它學者的論述, 這次“舊事重提”, 或許潛意識裡不能抹殺李國偉先生大作中圖示的啓發, 這裡特別說明。

依筆者愚見, 商高確實證明了勾股定理, 趙爽的注文則不僅正確理解了商高答問原文的內含, 而且由此創作了“句股圓方圖說”。

二. 商高關於勾股定理的證明

「周髀算經」第一章即周公與商高的問答, 原文不長, 今照錄如下:

> 昔者周公問於商高曰:“竊聞乎大夫善數也, 請問昔者包犧立周天曆度, 夫天可不階而升, 地不可得尺寸而度, 請問數安從出?”商高曰:“數之法出於圓方, 圓出於方, 方出於矩, 矩出於九九八十一。故折矩, 以爲句廣三, 股修四, 徑隅五。既方之, 外半其一矩, 環而共盤, 得成三四五。兩矩共長二十有五, 是謂積矩。故禹之所以治天下者, 此數之所生也。”[6]

商高的答辭總共81個字,“矩”出現了五次。對於上述文字理解上產生的歧異, 主要集中在以下兩點:

1. “矩”,“其一矩”,“兩矩”各指什麼?
2. “既方之”如何操作?

筆者認爲, 這裡的“矩”可以統統理解爲長方形 (包含正方形), “其一矩”是不同於“故折矩”中所述的另一種長方形, “兩矩”正如趙爽所注爲勾與股爲邊長的兩個正方形。

“既方之”, 則是取一與趙爽弦圖大小相同的正方形 (邊長爲勾+ 股)。

以下結合趙爽注, 逐句解釋商高的答辭。

所謂“數之法出於圓方”, 是古人對宇宙萬物的數學抽象, 意指任何事物的形態或測度, 均可以歸結爲對某種“方”或“圓”形的計算。如劉徽在 《九章算術》“圓田術注”中便稱“凡物類形象, 不圓則方。方圓之率, 誠著於近, 則雖遠可知也。”

由於遠古中國人認爲圓周率 $\pi = 3$, 於是, 任何圓的度量, 按

$$周長 = 3\times 直徑$$
$$圓積 = \tfrac{3}{4}\times 直徑^2$$

皆可化爲對邊長等於圓徑的正方形的度量:

圓周長: 正方形周長=圓積: 方積=3:4

因此說“圓出於方”。

由於“方”爲長方形 (即矩) 之特例, 因此說“方出於矩”, 即“方”的度量可按“矩” 來處理。

趙爽注稱: “矩, 廣長也。” 正是在講“矩” 是由長與寬 (即廣) 兩條垂直的邊所交成的直角四邊形。其面積=長×寬, 需用乘法計算, 因此說“矩出於九九八十一”。

誠然, 在趙爽“句股圓方圖說”及「九章算術」劉徽注的文字中, 所提到的弦方之中“勾實之矩”或“股實之矩”分別是以股弦差或勾弦差爲寬的曲尺形, 但在計算其面積時, 則分別按下述文字陳述:

勾實之矩, 以股弦差爲廣, 股弦並爲袤。
股實之矩, 以勾弦差爲廣, 勾弦並爲袤。

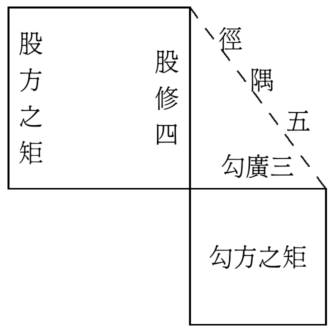
這分明是將曲尺形化爲長方形。而從上述陳述句式判斷,“矩”不就是以“廣”和“袤”爲邊長的長方形嗎? 因此, 筆者認爲,“矩”形本應指長方形, “勾實之矩”或“股實之矩”因其可以直接化爲長方形, 故得此稱謂。

如前所述, 商高將宇宙萬物抽象爲圓與方, 而通過 $\pi=3$, 又得“圓: 方 $=3:4$”, 就勾股定理而言, 有

$$3^2+4^2=5^2$$

2,3,4,5這種奇妙的數字組合, 簡直就成了整個中國古代數學的出發點。

因此, 商高以4爲股,3爲勾來建立勾股定理, 它們分別代表了宇宙最基本的兩種幾何形態: 方與圓。



圖一. 故折矩

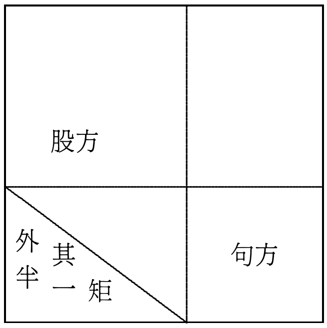
“故折矩”, 就是將通過圓與方之關係導出的勾3, 股4分別折合成“勾方之矩”與“股方之矩”, 如圖一所示。此兩矩位置的設置, 按趙爽注稱:“應圓之周, 橫者謂之廣, 句亦廣, 廣, 短也。” 因此將勾方之矩置於右下, 又“應方之匝, 從者謂之修, 股亦修, 修, 長也。” 將股方之矩置於左上。“徑隅五”, 即由“兩矩”相交的兩條邊勾與股所對應的斜邊, 按勾三, 股四, 適得弦五[7]。這是以下將要證明的事實。

“既方之”, 就是在圖一的基礎上做一大正方形。

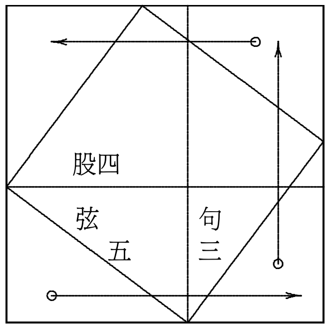
按趙爽注稱:“句股之法, 先知二數, 然後推一。見句股, 然後求弦, 先各自乘, 成其實, 實成勢化, 爾乃變通, 故曰‘既方’。”

這段注文的意思是說, 按勾股定理, 若已知勾股, 即可求弦。現在通過“折矩”, 先令勾股各自乘, 而給出勾方與股方, 要將這兩矩面積之和轉化爲弦方的面積, 進行變通, 因此, 將其納入一大正方形之中, 這就是“既方之”的用意。

趙爽接著說:“其外, 或並句股之實以求弦, 實之中乃求句股之分並, 實不正等, 更相取與, 互有所得, 故曰‘半其一矩’。”



圖二. 即方之、外半之

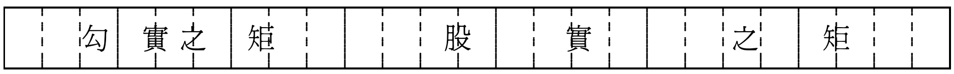


圖三. 環而共盤

"其外", 即圖二大方形中股方與勾方之外的兩個矩形, 爲了求得弦方, 即需拼合股方與句方, 因其形態不悉相似, 因而要對圖二重新分割, 按出入相補, 進行組合, 因此要先"半其一矩"。

"其一矩"即不同於股方與勾方之矩的另一種矩, 在圖二大正方形的右上與左下的兩個以勾股爲邊長的矩形均可稱爲"其一矩", "外半其一矩", 就是從外側剪下這兩個矩形中某一個的一半, 無妨取其左下, 如圖二所示。

"環而共盤, 得成三四五"。將圖二"外半其一矩"所剪下的半個矩形, 繞大正方形周邊盤而裁之, 如圖三所示, 因裁去的四個三角形正好是大正方形中兩個 "其一矩"的面積, 因此圖三中弦方的面積, 適爲股方與句方之和, 此時得弦長爲5, 於是勾, 股, 弦成爲3,4,5。在這段原文之後, 趙爽注稱: "盤讀如盤桓之盤。言取而並減之積, 環屈共盤之。..." 這裡說得很淸楚, "並減之積", 即圖二中"股方"與"句方"之外的兩個長方形, 將它們裁下, 繞大正方形"環屈而共盤之", 即得圖三。



圖四. 兩矩共長

"兩矩共長二十有五, 是謂積矩。"

趙爽注稱:"兩矩者, 句股各自乘之實。共長者, 並實之數。將以施於萬事, 而此先陳其率也。"

很顯然, 趙爽將這裡的"兩矩"理解爲勾方與股方, 與我們前面的疏解完全吻合。將兩矩面積稱爲"共長", 曾令許多學者迷惑不解, 李繼閔先生很精闢地道出了個中原委。原來, 古人並無量綱概念, 傳統數學中沒有"平方尺"或"立方尺"之類的單位, 中算家度量面積, 總是將其化爲某一邊爲單位量的矩形, 體積則化爲某一面爲單位正方形的長方體, 如此一來, 這個等積矩形另一邊的長度, 即可表示其面積的大小, 而等積長方體的高度, 即可

表示其體積的大小。因此, 弦方的面積, 展如圖四所示。

通過上述文字應可看出, 商高以勾三, 股四, 弦五爲例, 展示勾股定理的證明, 一方面基於這位遠古數學大師對複雜客觀事物的數學抽象, 另一方面也體現了中算家對數學定理往往“寓理于算”的傳統風格。

商高無疑已嚴格地證明了勾股定理。

三. 趙爽的弦圖

趙爽在前引「周髀算經」商高關於勾股定理的論述之後, 就勾股定理及勾股弦三邊互求的多種類型創作了一篇傑出的論文: “句股圓方圖說”, 其中第一段便是利用他構造的“弦圖” 對勾股定理給予了一個新的證明:

> 句股各自乘, 併之爲弦實, 開方除之即弦。案: 弦圖又可以句股相乘爲朱實二, 倍之爲朱實四, 以句股之差自相乘爲中黃實, 加差實亦成弦實。

這段文字緊接著商高的答辭給出, 其中案語中有兩句話應引起我們的注意:

1. “弦圖又可以...”
2. “加差實亦成弦實。”

圖五. 趙爽的弦圖

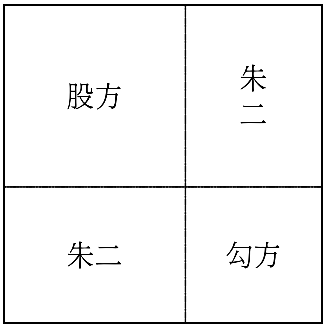
第1句話表明, 趙爽給出的弦圖 (影印見圖五), 與商高的弦圖不同, 換句話說, 商高的答辭中必然包含了一張弦圖。

第2句話則證明, 這兩張弦圖皆在推求弦實, 亦即均在證明勾股定理。至少從趙爽的角度而言, 商高的原文是在證明並且已經證

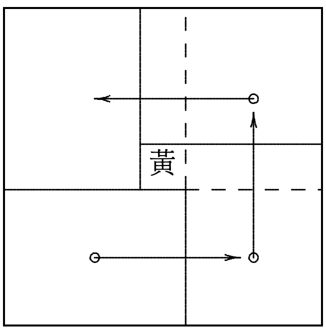
明了勾股定理!

那麼, 趙爽的弦圖與商高的弦圖從構造的方式來看有什麼關係呢?

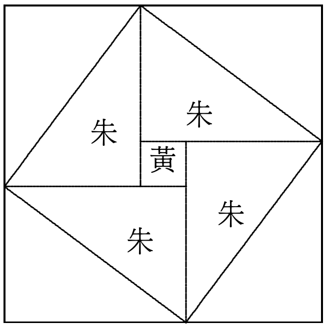
趙爽的弦圖中弦實由兩部分組成, 一爲中黃實, 即股勾差的平方; 一爲四個朱實, 即兩個以勾股爲邊的長方形分成的四個直角三角形。



圖六. 即方之



圖七. 環而共盤



圖八. 外半之

在商高的弦圖構造過程中, 可以在圖二中找到朱實四 (如圖六所示), 若將圖六中的左下長方形裁下, 按圖七所示拼合, 則立得中黃方。

將環繞中黃方的四個以勾股爲邊的長方形分別“外半之”, 則立得趙爽的弦圖 (見圖八)。

商高弦圖的構造步驟次遞爲

既方之 → 外半之 → 環而共盤

趙爽弦圖的構造步驟次遞爲

既方之 → 環而共盤 → 外半之

兩者殊途同歸。應該說, 趙爽創造的弦圖, 是通過對商高答辭的研究與詮釋而補充發揮的。筆者以爲, 若將趙爽的注釋與弦圖同商高的答辭貫通分析, 那麼以上就商、趙勾股定理之證明的疏解便呈現一條清晰的邏輯鏈。

四. 劉徽的出入相補

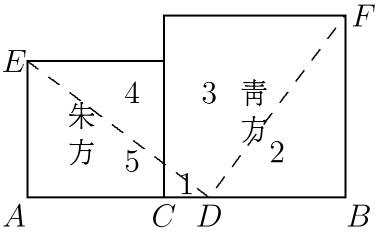
「九章算術」句股章的第一個公式即句股定理:“句股各自乘, 並而開方除之, 即弦。”

劉徽對此術的注文, 給出了一個語焉未詳的證明:

> 句自乘爲朱方, 股自乘爲青方, 令出入相補, 各從其類, 因就其余不移動也。合成弦方之冪, 開方除之, 即弦也。[8]

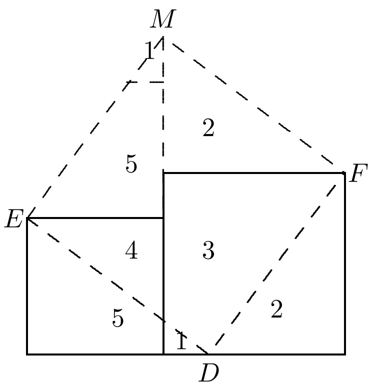
由於劉徽的"出入相補"過於簡約, 因此, 其弦方如何拼合而成, 恐難以獲得公認的答案。

筆者認爲, 劉徽的方法不同於商高與趙爽, 且應比他們的弦圖簡單。其證明過程或許如下所述:



圖九. 幷朱方與青方

先將勾 (AC) 股 (BC) 各自乘之積並列如圖九, 在 AB 上取一點 D, 令 $DB = AC =$ 勾, 連接 DF、DE, 直角 $\triangle AED$ 與 $\triangle DFB$ 皆以勾股爲直角邊, 朱方與青方被分割成五塊。



圖十. 出入相補

其朱 5 與青 1 合成一類, 青 2 自成一類, 出入相補如圖十, 朱 4 與青 3 不移動, 於是合成弦方 $EDFH$。由此證明, 弦方=勾方+股方。

五. 結語

有關商高的生平, 我們知道的很少, 過去通常可以引徵的僅有趙爽注中的一條文字:"商高, 周時賢大夫, 善算者也。"

因此, 清代以來, 人們常將其視爲傳說中的人物。筆者1987年協助業師李繼閔教授編寫「陝西地方科技志古代篇, 數學」時, 曾遍覽陝西各地方縣志有關部分, 從「中國方志從書. 商南縣志」卷八"人物志"中查獲一條有關商高生平的記載:

> [周]商高, 黃帝之昆孫。以地得姓。周初封子男于商。精數學,「周髀」衍其說爲算經。「國語」曰司商。

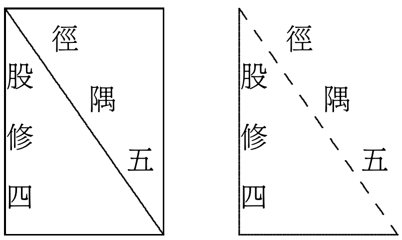
關於「商南縣志」及上述文字的作者及出處, 李繼閔教授有更進一步的考證。[5] 中國古代的地方志, 世代相傳, 十分可信, 商高爲西周初期 (約公元前十一世紀) 的數學家殆無疑問。

由於商高在勾股定理方面的創見, 堪稱爲有史以來世界文明中的第一位數學大師。

参考文獻

1. 陳良佐, 趙爽勾股圓方圖注之研究, 刊於「大陸雜誌」,1982年64卷1期,18-37頁。

2. 李國偉, 論「周髀算經」"商高曰數之法出於圓方"章, 刊於「第二屆科學史研討會彙刊」, 台灣,1991年7月,227-234頁。
3. 陳良佐, 周髀算經勾股定理的證明與出入相補原理的關係, 刊於「漢學研究」,1989 年第7卷第1期,255-281頁。
4. Cheng-Yih Chen(程貞一), A Comparative Study of Early Chinese and Greek Work On the Concept of Limit, 刊於 Science and Technology in Chinese Civilization, World Scientific, 1987, p.35-44.
5. 李繼閔: 商高定理辨證, 刊於「自然科學史研究」,1993年第12卷第1期, 29-41頁。
6. 周髀算經, 文物出版社,1980年3月, 據宋代嘉定六年本影印,1-5頁。



圖十一. 兩種"故折矩"

7. 陳良佐、程貞一與李國偉認爲"故折矩"是將以勾股爲邊的矩形折半, 如圖十一之左圖所示, 而李繼閔教授則主張此處的"矩"爲"矩線", 如圖十一之右圖,"徑隅五"是句股兩邊所夾直角 (即隅) 對應的虛線長度。按後者解釋"句、股與徑隅"更符合「周髀」本義, 因爲按周髀之法, 髀, 即表, 即股; 句即表端陽光投射的影長, 對直角三角形而言, 古人常以"句廣, 股修, 徑斜"表述,「周髀」稱"徑斜"爲"徑隅", 顯然並未將此弦實際畫出, 因此, 以虛線表示更爲妥當。另外, 按圖十一兩種"折矩"的方法, 均可通過"旣方之"而獲得圖二之大正方形, 但是, 下文中"兩矩共長"的兩矩便失去了根據, 而"半其一矩" 究竟是半勾方、股方還是以勾股爲邊的矩形, 亦難以選擇。
8. 「九章算術」, 錢寶琮校點「算經十書」, 上, 中華書局,1963年10月,241頁。

—本文作者任教於中國西安西北大學數學系—