正四面體能填滿空間嗎?

王爾山

拙文《圓周不能鋪滿平面, 卻能充填整個空間》[4], 主要討論用一維的圓周充填三維的空間, 其中也談到一維的圓周“差一點”就可以充填二維的平面, 這裡充填元素 (圓周) 和被充填的對象 (空間, 去掉一點的平面) 的維數都不相同。

本文將討論維數相同的充填問題。讀者將會看到, 中學立體幾何的知識可以用來解決大學科學研究的問題。

大家知道, 直線是一維的, 具有長度的最簡單的幾何對象是線段, 很容易將直線分割成許多線段, 或分割成許多一樣長的線段, 直線的同維分割問題太簡單了, 但我們還是不要忘記它。

正三角形可以鋪滿平面

平面是二維的, 具有面積的最簡單的幾何對象是三角形, 顯然平面可以輕而易舉地分割爲許許多多的三角形。

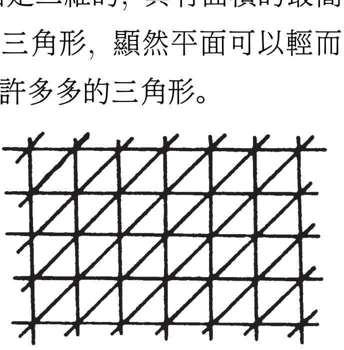

圖 1

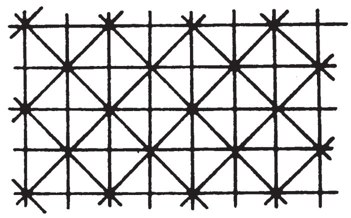

圖 2

怎樣分割比較好呢? 當然是分割越均勻越好, 首先看圖1和圖2兩種方案, 在這兩種方案中, 所有三角形都是全等的等腰直角三角形, 看起來是夠均勻的了, 美中不足的是, 每個三角形本身不夠“均勻”, 兩條邊較長, 一條邊較短。

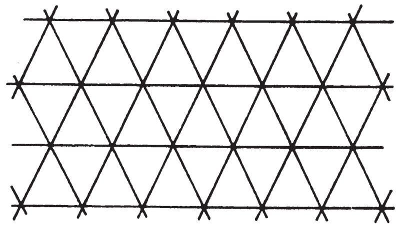

圖 3

三邊都相等的三角形是正三角形, 稍動一下腦筋, 你馬上會說, 平面可以分割爲大小

相等的正三角形, 的確, 圖3就是一種方案, 這種分割就十分均勻了。

正四面體可以把空間填滿嗎?

空間是三維的, 具有體積的最簡單的幾何對象是四面體, 一個四面體有四個頂點, 四個三角形側面和六條稜 (圖4), 空間也可以很方便地分割爲許許多多四面體, 圖5就是方案之一: 首先, 我們把空間分割爲一個個大小一樣的正立方體, 圖上畫出了其中一個, 即 ABCD-EFGH, 將它劈開兩半, 得到兩個直三稜柱, 其中一個是 ABC-EFG, 這個直三稜柱可以很容易地再被分割爲三個四面體: $ABCG$, $ABFG$ 和 $AEFG$。

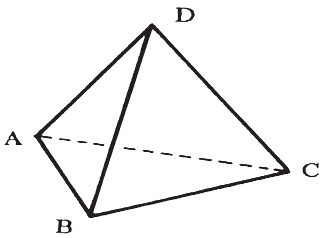

圖 4

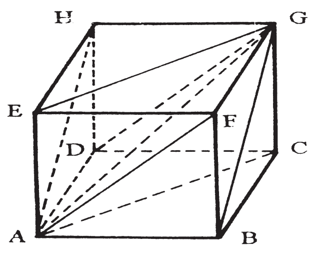

圖 5

簡言之, 一個正立方體可分割成六個四面體, 如果每個正立方體都這樣做, 整個空間就被分割爲許許多多四面體了, 換句話說, 四面體可以充塡整個空間。

四邊相等的四面體是正四面體, 仔細觀察圖5, 你會發現, 雖然正立方體被分割爲體積相等的六個四面體, 但其中沒有一個四面體是正四面體, 這實在是有點遺憾。

那麼, 能不能用大小相等的正四面體塡滿空間呢? 這是辦不到的, 下面, 讓我們看看爲什麼會這樣。

算一下正四面體的二面角

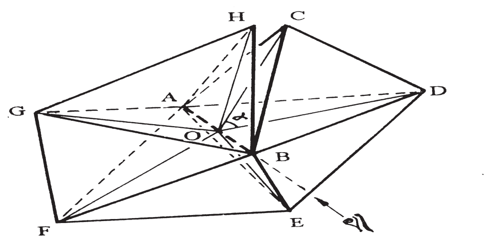

圖 6

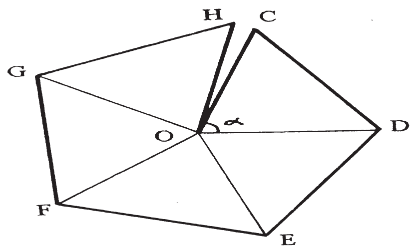

圖 7

首先讓我們想一想, 如果空間能被分割爲大小一致的正四面體, 情形應該是怎樣的呢? 假設如圖6, $ABCD$ 是其中一個正四面體, 那麼緊挨著它的一個面 ABC, 應該還有一個正四面體 $ABCE$, 再看正四面體 $ABCE$, 緊挨著它的 ABE 面, 就應該有一個正四面體 ABEF, 繼續下去, 挨著正四面體 ABEF 的 ABF 面, 就應該有一個正四面

體 $ABFG\ldots$. 這樣一個緊挨一個排下去, 最後應該正好回到 ABD 這個面, 一點也不能有差錯, 否則就會留下空隙或發生重疊, 而這都是不允許的。

假如你覺得圖 6 不容易看淸楚, 不妨嘗試沿著 BA 方向看它的側面, 這樣就得到它的側視圖 (圖 7), 在這個圖裡, AB 稜重合爲一點 O, 如果像上面所說的一個緊挨一個, 最後正好回到 ABD 這個面, 那麼就應該有 $\alpha = \angle DOC = \angle COE = \angle EOF = \cdots$, 即 α 應當能整除 $360°$。這個 α 就是正四面體相鄰兩個面之間的二面角。

實際上 α 有多大呢? 假設正四面體的邊長是 a, 在圖 7 中就有: $CD = a$, $OC = OD = (\sqrt{3}/2)a$, 這時你很快可以算出 $\cos\alpha = 1/3$, 查一下表, 知道 α 大約是 $70°32'$, 不難看出, 五個 α 略小於 $360°$, 而六個 α 則比 $360°$ 大得多, 換言之, 無論怎樣也拚不出一個 $360°$ 來。

這就證明, 把空間分割爲大小相等的正四面體是不可能的。

問題的應用價值

以上的立體幾何討論, 有什麼實用價值呢? 原來, 在最近十多年裡才發展起來的單純不動點算法 (Simplicial Fixed Point Algorithms), 就牽涉到上述的空間分割問題, 運用單純不動點算法, 可以解決許多用以往方法難以解決或不能解決的所謂高度非線性應用數學問題[5]。

如果在平面上採用這種計算方法, 首先要把平面分割成許許多多三角形; 而要在空間中運用這種方法, 就必須先把空間分割成許許多多四面體, 分割越均勻, 計算的效率就越高。平面是很容易均勻分割的, 圖 3 就是一種方案。於是就有人研究空間能否也分割得如此均勻。上面就證明這是不可能的。這麼一來, 科研人員就不再爲追求將空間分割爲正四面體的方案而空耗精力。目前, 人們普遍採用圖 5 的分割方案。

這眞是一個發人深省的例子: 中學的立體幾何竟然可以解決大學的科學研究問題, 如果能在中學階段就注重打好各方面的基礎, 只要善於應用, 那麼終生都將受益無窮。

這裡, 我們就給對空間分割問題有興趣的讀者提兩個問題, 試試你們的空間想像力和邏輯推理能力:

1. 你能不能用五個四面體塡滿一個正立方體?
2. 你能不能證明至少需要五個四面體才能把一個立方體塡滿?

事實上, 三維空間中的單純不動點算法, 在可能的情況下, 都採用把一個立方體分割爲五個四面體的最"經濟"的剖分方法, 五個已經是最小的數目了, 更少是不可能的。

参考文獻

1. 王則柯, 單純不動點算法基礎, 中山大學出版社, 廣州, 1986。
2. 王則柯, 經濟均衡理論與算法, 科學出版社, 北京, 1994。
3. Todd, M.J., The Computation of Fixed Points and Applications, Springer Lecture Notes in Econ. and Math. Systems 124, 1976。

4. 王爾山, 圓周鋪不滿平面卻能充填整個空間, 數學傳播, 十八卷第三期, 65-68, 1994。
5. 王則柯, 多項式方程求根的魔術植物栽培算法, 數學傳播, 十七卷第三期, 20-25,1993。

—本文作者任教於中國廣州市中山大學—