

高中生應該知道的積分與應用

石厚高

八十三年十一月十九日聯合報報導「一位國中學生數學考試三十八分竟然是全班第二高分，老師考倒了學生，卻可能因而扼殺了一位數學天才」該校另一位化學老師也誇口說「我出的試題，全校學生成績一定不會超過四十分，這樣的試題才有水準」實在是匪夷所思，這位老師太有「水準」了。

本次月考筆者命題，範圍是高三理科數學第三章全部「積分與應用」，高中生學積分的層次與大學生是有差距的，一想到有一千三、四百人要使用這份試題心頭就感沉重，考完馬上看考卷總算完成使命，把建中學生程度作適度表現，我不能說「佳評如潮」、「一片

叫好」只能說「幸未辱命」，中等學校不論月考、期考、模擬考的命題人只要不挨罵就很滿意了，要求大家叫好是很難的。我命題的原則是就課本的範圍命題，大家都講過的我才出，我沒有講過的要出一些，要用「妙招」、「令人厭惡的技巧」才能作的絕對不出，我講過別人沒講過的也不出，所以我教的班表現仍然是恰如其份，不會因為自己班的老師命題就表現的特別突出。考完我問學生有沒有看出是我命題，學生都很驚訝一致答以不知道。填空出了二十二格每格四分，共八十八分，計算題十二分。筆者所教二班共 99 名學生，各題答對人數如下

題號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答對人數	55	53	99	92	79	93	92	58	90	75
題號	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
答對人數	81	83	82	48	55	31	77	59	92	77
題號	21	22						1	2	3
答對人數	61	41						78	69	38

雖然只統計了兩個班，卻很可以看出來那些題目學生會作的多，那些題目學生會作的少。各班成績單都是交由導師發給學生，一考完我就有了自己兩個班的平均成績（低標準）69.48、68.82與高標準82.47，我又向各班導師要成績單，有了八、九班算一次，收集到十七、八班又算一次，一直到二十七個班全部收齊，高標準、低標準與自己班的都是十分接近，所以兩個班各題答對率與全年級不會有太大差距。

三年級參加考試人數是1372，不及格人數佔 $\frac{353}{1372} = 26\%$ ，接近四分之一好像是多

60.72	62.58	62.86	62.87	63.84	65.96	66.07	66.12	67.64
67.76	68.28	68.35	68.71	68.81	68.82	69.18	69.40	69.48
69.48	69.78	70.74	70.92	71.68	72.36	73.70	74.32	82.20

最高的82.20是資優班，二年半前高中聯考數學成績得120分的編進資優班，所以成績突出。少數班級的平均數遠低於全年級低標準，因為那些班級在高二升高三分組時多人轉往第三類組，第三類組考大學時要多考一科生物，不太有把握的不敢轉，所以分數就低了。有一年筆者教的兩個班在結算學期成績時，一個班成績在80分以上的有十幾個，另一班一個都沒有，建中沒有作能力分班，原因是一樣的。從各項統計數據可以看出來，這份試題把建中學生程度作了適度表現，有兩位老師對我說「命題成功」，另有幾位說改起來很愉快，高分不多，不及格的也不多，所以我把它寄給數播，願與同行共享。下面是各題出處與說明。

了一點，道理簡單，建中很有些「不到最後關頭決不輕言讀書」的學生，再看低於50分的只佔 $\frac{164}{1372} = 12\%$ 就很容易理解了。在60 - 79區間的佔 $\frac{615}{1372} = 45\%$ 比率是很大的，滿分資優生佔 $\frac{17}{1372} = 1\%$ 。低標準 $\frac{94125}{1372} = 68.60$ 高標準 $\frac{54737}{666} = 82.19$ 資深有經驗的老師都知道68.6的低標準是相當高的，與高標準82.19一對照可以看出來建中學生的成績是很不錯的。高三自然組有二十七班，我把二十七個平均數由小而大排列寫在下面，成績統計分佈表列在本文之末。

[甲] 出自課本，課本的函數是 $y = x^2$ 與 $y = x^3$ ，這裡只把函數改作 $y = 2x$ 求 (1) 上和 (2) 下和 (3) 曲線下方面積。

[乙] 求五個式子的極限，(4)、(5)、(6)、(7) 出自課本，(8) 題如果想到它是下列二式之積

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$\text{與} \quad \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

就很容易了。特別要提的是第 (5) 題，在習題討論時發現學生的作法是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \sqrt{\frac{n-3}{n+3}} - n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(\sqrt{\frac{n-3}{n+3}} - 1 \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(\sqrt{\frac{1 - \frac{3}{n}}{1 + \frac{3}{n}}} - 1 \right) = \infty \cdot 0 = 0$$

可是 ∞ (無限大) 是個符號不是個數, 如果它是個數就會得到不可思議的結果, 級數

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \dots$$

之和要多麼大就有多麼大, 也就是無限大, 設它的和是 a , 令

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \dots = a$$

故得

$$1 + 2(1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \dots) = a$$

所以

$$1 + 2a = a$$

故得 $a = -1$ 真是匪夷所思, 正確的作法見略解。

用這種方式解釋「無限大不是一個數」, 學生很容易接受。

[丙] (9)、(10)、(11)、(12)、(13) 求五個定積分之值, 第 (10) 題要小心把 x 分成正、負兩種情況來處理, 第 (13) 題數年前本校月考考過, 當時幾乎是全軍覆沒, 以後老師都補充了這類需要換變數 (change variable) 的題目, 應該不是難題。

[丁] 有三題要用微積分基本定理, (14) 很容易, (15) 要是了解連鎖原理作起來很快, 不用連鎖原理也可以作, (16) 題有些學生忘了 $2x$ 所以作錯了。

[戊] (17) 橢圓面積公式 πab 是常識, 這題是送分題, 不用作一看就會, 可是還是有人拿不到分數, (18) 取材自課本, 原題繞 x 軸旋轉, 此處繞 y 軸旋轉。

[己] (19)(20)(21) 取材自課本, 多數學生作對。

[庚] 如果把二圓 $x^2 + y^2 = 4$ 與 $x^2 + y^2 = 4x$ 所圍的公共區域繞 x 軸旋轉所得旋轉體之體積, 看成前者繞 x 軸旋轉所得旋轉體體積之二倍, 就比用後者簡單多了, 沒有想到這一點會很繁, 所以作對的不多。

計算題的 (1) 是送分題仍然有四分之一學生不會作, (2) 與 (3) 是要花些時間的, 尤其是 (3) 一不小心就把拋物線與圓的二切點誤作拋物線與 x 軸的交點, 既浪費了時間又沒有拿到分數。

試題設計時就考慮到考試時間 70 分鐘, (15)、(16) 沒有講過, 計算題的 (2) 與 (3) 較費時間, 四題共 16 分, 其它 84 分都是「平淡無奇、乏善可陳」, 也有老師說再多十分鐘計算題的 (3) 會有更多人作出來, 當然 80 分以上的與 100 分的也就多得多了。試題送往教務處之前我曾請陳麗如老師演算一遍, 她給予肯定評估。監考時沒有人提前交卷, 考到六十五分鐘時, 看看走廊只有兩個學生, 收考卷時沒聽到一迭聲的“完了!完了”這才放心, 看了自己兩班考卷頓覺輕鬆, 出這種全年級的試題壓力很大, 謝天謝地很可以輕鬆一陣

子不會輪到我命題了，謝謝陳老師演算本試題。大專教師出題不會這麼緊張，自己命題自己改卷，考卷不發給學生看，出了錯學生不敢講沒有人知道，命題高明也只有自己欣賞，如人飲水冷暖自知，是幸也是不幸。

這次考題與參考答案都是使用 WORD 5.0 製作，我對它一見鍾情，希望大家多多愛用，它一定是咱們學數學的設計的，真是「善體我意深得我心」，如果不信一試便知，聽說 Latex 與 AMI PRO 更好，不過我已經很滿意了。我在打考卷時積分符號、極限、直線段旁標以上下限有些困難，以往在 PC-XT 上使用的慧星一號 (CWI)，吳隆盛老師造了些符號給大家用很是享受，這部 PC-XT 自民國 76 年使用到 82 年，去年五月實在不勘使用所以又有了新的 486，可是 PC-XT 上 CWI 的吳氏造字拷到 486 硬碟上不能用，多方求助知道了 WORD 5.0 的大名，可是用起來不太靈光，使用手冊 (USER MANUAL) 總是語焉不詳，張系國作過一首打油詩「使用手冊就和房事一樣，好的手冊令你仙仙欲死；壞的手冊，總算聊勝於無」原來使用手冊都是一樣的，在打電話騷擾過賴敦生與王元坤兩位老師數次之後，「插入 → 物件 → equation」的要領弄清楚了，完成了這次考題謹此致謝。

區間	人數	每一*號表10人
0-4	1	
5-9	0	
10-14	0	
15-19	0	
20-24	10	*
25-29	11	*
30-34	9	*
35-39	29	***
40-44	68	*****
45-49	36	****
50-54	90	*****
55-59	99	*****
60-64	222	*****
65-69	121	*****
70-74	136	*****
75-79	136	*****
80-84	186	*****
85-89	75	*****
90-94	107	*****
95-99	47	*****
100	17	**
三年級總人數 1372		

作個總結，第 (1) 與 (2) 題約有一半的學生不會，並不是學生不知道“上和”與“下和”的定義，而是課本例題、習題裡求“上和”與“下和”的函數都是二次式與三次式，考題是一次式沒有見過，所以就手忙腳亂了。第 (3) 題就全體答對是因為直接從三角形區域求面積，沒有從“上和”與“下和”用極限來逼近。學生希望數學考題都是“見過的”或“作

過的”就得心應手，碰到沒見過的就拿不到分數了。所以 (1) 與 (2) 題的表現很是正常。

第 (5) 題不宜過度補充，如何使用泰勒展開式 (以及 l'Hospital's Rule) 來求不定型的極限，前者是高三下的教材，後者未列入中等教材。

第 (7) 題計算繁度較高，大部份學生都會，當然是學生絕對多數都記得

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad (1)$$

所以作對學生高達 92/99=93%，提到這類公式筆者就陣陣暖流湧遍全身，筆者讀高二時，課本有 (1) 與

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (2)$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (3)$$

其中 (2) 在初中已學過，可是沒有列出 $1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4$ ，我就用分項抵消法得到 $\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$ ，其中 $3n^2 + 3n - 1$ 裡的 -1 我不能接受以為作錯了，因為 (1)、(2)、(3) 裡的係數都是正整數，我驗算又一算再算，一直把 n 算到七十或八十已經不記得了，只記得沒有算到一百，愈算愈高興愈算愈有信心，後來在一本參考書裡找到這個公式和我的一樣，這才不往下作了。

一位太太自殺，一步步走向淡水河中央，河水太臭她又回來了，為甚麼呢？因為她先生有了外遇，那不是很平常的事兒嗎？她不能接受這個事實，因為她先生表現正常，按時回家吃飯也從不外宿，沒想到他居然在外面有個女人，絕對守規矩的模範學生居然逃課，

天哪天哪實在活不下去了，嘻嘻！這種事兒心理上早就應該有準備，我在三十八、九年前接受了 $3n^2 + 3n - 1$ 裡的 -1，後來在數學上又接受了很多大異常理的事實。

有的老師說第 (10) 題要根據 $x \geq 0$ 與 $x < 0$ 討論，四分之三以上的學生都會作，可見現在的學生對於 $y = |x|$ 的理解大都能掌握。可是本題如果改成

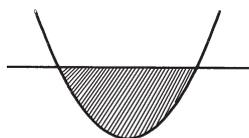
$$\int_{-1}^2 (x + |x - 1| + |2x + 3|)^2 dx$$

當然很多學生都不會作了，這一點數播讀者要能理解，這次考試的時間是七十分鐘，這題要分成幾個二次函數的定積分，要用多少時間，請大家試試。民國五十年大專聯考出了些絕對值的題目，三萬考生一萬零分，那時高中不教絕對值，打破歷年聯考記錄。

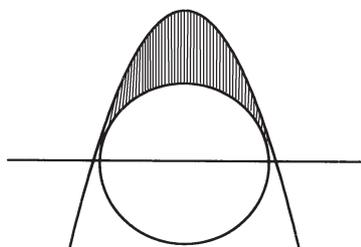
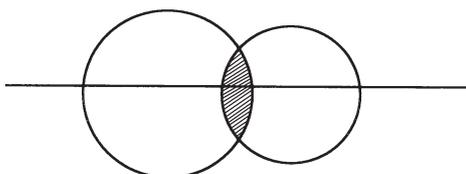
作函數 $y = |x - 1| + |x - 2|$ 的圖形，這種題目初一不能教、初二不能教、初三不能教、高一不能教、高二不必教、高三應該教，是數學老師應有的理念。為甚麼高二不必教？因為高二教每班五十名學生裡大約有二十五名可以立即接受，高三教理組學生可以全體接受，或至少四十五名左右接受沒有問題，那又何必在高二教呢。

學生對於求繞 y 軸旋轉的旋轉體體積不太會求，是因為課本裡只有繞 x 軸旋轉的旋轉體體積公式，沒有公式可代又沒有想到可以把 x 看作 y 的函數對 y 積分，所以不會的就很多了。

對於求封閉區域繞某直線旋轉所得旋轉體的體積，在形式較為簡單時都表現不錯，例如



如果形式較不規則或較複雜就不會作, 例如



好像是學生沒有畫圖或不會畫圖道理也很簡單, 自從民國五十四年數學教材歷經三次改革, 現行的這一套是民國七十三年升高一的學生開始啓用, 其中圓錐曲線作了很大的修正, 需要用到旋轉平移來化簡方程式的都刪去了, 也沒有含 xy 項的, 所以學生畫圖能力差是很正常現象。

七十六年筆者就感受到高三學生的三角很差, 不但基本運算不熟, 三角函數的圖形更是一團糟。數學本來就是學子夢魘, 三角更是夢魘裡的夢魘, 有太多的公式, 有些連背都背不下來。數學公式是不用背的, 只要會證明就記住了, 可是每班五十多名學生有一名去把公式證證就很高興了, 有二名就是豐收; 再看看高一課本, 以往三角在高一下學期要教一學期, 被修訂成只教一個月, 高中教師應該感受強烈, 有些事可以速成, 學問不能速成。數學老師的共同理念是要「教得少教得正常」, 那麼國文呢? 他們不一樣他們是要「教得多教得好」。

第 (14)、(15)、(16) 是微積分基本定理相當機械化的應用, 高中生對它是相當感冒的, 出上三題當然是聊備一格, 看看答對人數也是恰如其份。

有人說建中沒有以前好了, 更有人說建中沒落了, 都不是事實。民國四十七年台灣人口一千萬, 那時建中高三有七個班; 民國八十四年台灣人口二千萬, 建中高三有三十三個班。教育普及當然是好現象, 從高三全體 1372 名學生的成績分佈來看, 是個中間偏右的分配, 不是大家熟悉的常態分配, 對三年前以第一志願考進來的學生來說是很正常的。

附錄 1:

台北市立建國高級中學八十三年學年度第一學期高三自然組數學科期中考試題

填充題 每空格 4 分 88%

【甲】由直線 $y=0, y=2x$ 及 $x=4$ 所圍成的區域 S , 把原點至 $(4,0)$ 間的線段等分成 n 段, 過這些分點把 S 分成 n 個長條, 然後作出每個長條的上矩形與下矩形, (1) 求上和 (2) 求下和 (3) S 的面積

【乙】在 $n \rightarrow \infty$ 時 求下列各式之極限

(4) $\frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{n^2}$ (5) $n\sqrt{\frac{n-3}{n+3}} - n$ (6) $\sqrt{n}(\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2})$

(7) $\frac{1^3+2^3+3^3+\dots+n^3}{n^4}$ (8) $(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\dots(1-\frac{1}{n^2})$

【丙】求下列各定積分之值

(9) $\int_0^2 (2x+1)^2 dx$ (10) $\int_{-1}^2 (x+|x|+1)^2 dx$ (11) $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} dx$

(12) $\int_0^2 \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}} dx$ (13) $\int_1^2 x\sqrt{x^2-1} dx$

【丁】求下列各函數 $f(x)$ 之導函數 (14) $\int_x^1 \sqrt{1-t^2} dt (0 < x < 1)$ (15) $\int_1^{x^2} (t+2) dt$

設 $g(x) = x \int_1^x \frac{dt}{t} + 2x, x > 0$ 則 $xg'(x) - g(x) =$ (16)

【戊】橢圓 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 之面積為 (17) 繞 Y 軸旋轉所得旋轉體之體積為 (18)

【己】拋物線 $y = x^2 - 1$ 與 X 軸所圍區域為 T , (19) 求 T 之面積, 求 T 繞 (20) X 軸 (21) Y 軸 旋轉所得旋轉體之體積

【庚】二圓 $x^2 + y^2 = 4, x^2 + y^2 = 4x$ 所圍成的公共區域為 S , (22) 求 S 繞 X 軸旋轉所得旋轉體之體積

計算題 12%

拋物線 $P: y = -x^2 + k$ 與 圓 $Q: x^2 + y^2 = 1$ 切於二點, (1) 求 k 值 (4 分) (2) P 與 x 軸所圍區域之面積 (4 分) (3) P 與 Q 所圍區域繞 x 軸旋轉所得旋轉體之體積 (4 分)

附錄 2:

台北市立建國高級中學八十三學年度第一學期高三自然組數學科期中考答案

填充題

- (1) $16(1 - \frac{1}{n})$ (2) $16(1 + \frac{1}{n})$ (3) 16 (4) 1
(5) -3 (6) 2 (7) $\frac{1}{4}$ (8) $\frac{1}{2}$
(9) $\frac{62}{3}$ (10) $\frac{65}{3}$ (11) $2\sqrt{2} - 2$ (12) $\sqrt{13} - \sqrt{5}$
(13) $\sqrt{3}$ (14) $-\sqrt{1-x^2}$ (15) $2x(x^2 + 2)$ (16) x
(17) πab (18) $\frac{4\pi a^2 b}{3}$ (19) $\frac{4}{3}$ (20) $\frac{16\pi}{15}$
(21) $\frac{\pi}{2}$ (22) $\frac{10\pi}{3}$

計算題

- (1) $k = \frac{5}{4}$ (2) $\frac{5\sqrt{5}}{6}$ (3) $\frac{3\sqrt{3}\pi}{10}$