數學發現中的想像

朱 茱

想像是數學思維的基本要素, 同時又是導致科學發現的思想基礎。著名科學家愛因斯坦 (Einstein,1879-1955) 曾經說過「想像力比知識更重要, 因爲知識是有限的, 而想像力概括著世界上的一切, 推動著進步, 並且是知識進化的源泉。嚴格地說, 想像力是科學研究中的實在因素。」[1] 美國數學家 N. 維納 (Wiener,1894-1964) 也曾說過:「就我而言, 最有用的資質, 乃是廣泛持久的記憶力, 以及猶如萬花筒一般的自由想像力。這種想像力本身或多或少會向我提供關於極其複雜的思維活動的一系列可能的觀點。」[2] 在探索性的思維中, 經過類比、歸納和聯想, 可以依據事物之間的某些方面的相似與關聯, 進而推測其他方面可能存有相似與關聯之處。對此經過超脫、昇華, 即可能產生想像, 充分發揮數學想像力, 可以激發人們提出新的追求, 立志攀登新的高峰。

一. 數學想像的層次

對於數學想像的能力, 由淺入深可以劃分爲若干個層次, 不同的層次相應地決定了數學想像所能涉及的範圍和效果。這些層次爲:

1. 第一層次是幾何思維

幾何學以平面和空間圖形爲研究對象, 其中的圖形都是理想化抽象, 但其直觀特徵仍然很明顯, 人們看到幾何圖形, 就可以直接聯想到現實事物, 從幾何思維中即可進而體會到具體與抽象的基本關係。法國數學家 R. 托姆 (Thom,1923–) 是菲爾茲獎獲得者, 他曾說過:「由日常思維過渡到形式思維, 中間最自然是通過幾何思維了, 人類思維的歷史就是如此。」[3] 幾何思維是一種最直接的形象思維, 形象思維是右腦的功能。右腦思維的發散性特徵較強烈, 數學上的新思想、新概念和新方法, 大都來源於這種發散思維。

2. 第二層思維是類幾何思維

這是借助於幾何空間關係而進行想像的一種形象思維。它雖然沒有幾何思維那樣具體和直觀, 但卻可以形成與幾何思維相類似的形象思維。例如, 非歐幾何的空間關係、高維空間關係、泛函空間關係等, 都可以運用類幾何思維進行想像。在這些空間中, 可以在不同的意義上類似地定義「點」、「直線」、「平面」等概念, 運用通常的歐氏幾何方法, 即可把幾

何思維中所積累的認識, 推廣到更爲廣闊的領域。

類幾何思維是幾何思維的變形和推廣, 它具有較高的抽象性, 運用類幾何思維需要擺脫直觀上的局限性。例如, 利用類幾何思維, 通過解析幾何的方法, 可以把抽象幾何空間問題, 轉換爲代數和分析問題。

類幾何思維在數學發展中扮演著重要的角色, 它是幾何學與其他數學分支在思想方法上相互滲透的中介環節。非歐幾何的歐氏幾何模型的發現, 就是依靠類幾何思維的力量。當時, 克萊因、龐卡萊和貝爾特拉米等人利用一些巧妙的約定, 把非歐幾何中那些直觀上看來格格不入的空間關係, 利用類幾何思維, 轉換爲歐氏幾何中的普通定理, 並由此而完成了非歐幾何理論相對相容性的證明。這種數學想像過程, 有時被人們稱之爲「翻譯」。

3. 第三層次是數覺

所謂數覺, 即是對各種數量關係及其重新組合過程的形象化感覺。這種感覺更爲抽象、更爲朦朧, 更富有神秘色彩。例如, 在坐標軸上, 當動點從坐標1處移動到坐標原點0時, 它即是通過了無窮可數點集

$$\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\}$$

中的一切點, 這個無窮可數點集即是數覺的想像。印度數學家 S. 拉馬努眞 (Ramanujan,1887-1920) 憑藉數覺曾想像出很多數學定理, 有一次他的老師英國著名數學家 G.H.哈代 (Hardy,1871-1947) 乘車去看他, 汽車的牌號是1729, 拉馬努眞想了一下, 馬上就說: 這是能用兩種方法表示爲兩個整數立方和的最小整數, 即 $1929 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$。1913年, 他在寫給哈代的信中, 提出120條公式, 在他離開人世的56年之後, 美國賓夕法尼亞大學教授安德羅又在他的遺物中發現一個筆記本, 其中記有600多條公式, 這些公式都是由他的數覺想像而發現的, 其中有些公式的證明至今尙未被其他數學家所發現。

二. 數學想像的基本類型

實驗心理學的研究表明: 人們獲得的知識1.5%來自於觸覺,11%來自於聽覺, 83%來自於視覺, 其餘來自於嗅覺和味覺。從生物學角度來看, 數學想像大致可分爲視覺想像、聽覺想像和觸覺想像三種。然而, 這三種基本類型有時也很難加以區分。有些數學家也可以兼有幾種想像能力, 並在不同時期、不同問題上各有所側重。法國著名數學家 J.S 阿達瑪 (Hedamard,1865-1963) 在「數學發明創造心理學」一書中寫道:「實際上他們所有的人 ··· 不僅迴避使用理性語言, 也迴避使用代數的或精確的符號 ··· 他們使用豐富的想像。」J.S 阿達瑪把這種想像稱爲有意識的數學思考過程中的潛意識流, 認爲這種現象雖然難以描述, 但實際上確乎存在。現在對於視覺想像、聽覺想像和觸覺想像分別討論如下:

1. 視覺想像

視覺想像是人們比較熟悉的想像活動, 在對歐氏幾何的視覺想像中, 比較困難的問題, 就是解幾何題時對於輔助元素 (點、線、面等) 的添加。這時必須首先在頭腦中想像出它的存在, 並預測出該輔助元素在構造已知信息與未知信息之間的邏輯關係時, 是否眞有價值。

在類幾何思維中, 視覺想像需要借助放邏輯思維來塡補直觀上的缺陷。非歐幾何學的建立, 即來自於 N.I. 羅巴切夫斯基 (Iobatchevsky,1793-1856) 對於非歐空間的想像, 正是因爲如此, 他又把自己所發現的這種新幾何學, 稱之爲「想像幾何學」。並且提出:「在觀測不足的情況之下, 應當憑理智來設想, 想像幾何學可以用於被觀測到的世界之外以及分子引力範圍之內。」[5] 拓撲學亦稱「橡皮幾何學」它具有許多直觀性質。隨著這門學科的進一步發展, 逐步發現有許多拓撲性質也是難以用直觀來把握的。例如, 在三維歐氏空間中就做不出「克萊田 (Klein) 瓶」和「米爾諾 (Milnor) 怪球」對比, 數學家們則堅持認爲需要用視覺想像來處理它們。

法國數學家 H. 龐卡萊 (Poincare,1854-1912) 把存在於人腦中的各種數學思想和概念, 叫做「觀念原子」, 他認爲這群帶勾的「觀念原子」平時掛在牆上, 開動大腦機器之後, 成群結隊的「觀念原子」在空中翩翩起舞, 並且相互組合成爲新的「觀念原子」。龐卡萊對於「觀念原子」的這種描繪, 也是一種視覺想像。

2. 聽覺想像

聽覺想像是數學想像中比較玄妙的一種類型。美國數學家 S.烏拉姆 (Ulam) 在介紹數學家 J. 馮.諾伊曼 (Von Neumann,1903-1957) 的思想特徵時曾經說過:「假如你一定要把數學家分成兩類 (如龐卡萊所建議過的) —有視覺直觀的和聽覺直觀的—那麼約翰尼 (馮.諾伊曼的愛稱) 也許屬於後者。然而, 他的「聽覺直觀」大概是非常抽象的。」[6] 被稱爲計算機之父的馮諾伊曼在「論數學」一文中, 對於數學領域中人類智能的性質問題則這樣寫道:「討論任意領域中的智能活動的性質, 是一個困難的任務, 對處於人類智能中心領域的數學就更是如此。」

3. 觸覺想像

在數學想像中最爲玄紗的, 要屬觸覺想像了。它的重要性越來越引起數學家們的注意, 看來在發展三維以上的形象思維時, 觸覺想像是不可缺少的。美國數學家 H. 魏依曾經指出:「從心理學的角度來看, 眞正的幾何直觀也許是永遠不可能弄明白的, 以前它主要意味著是三維空間中的形象的瞭解力。現在高維空間已經把比較初等的問題基本上都排除了, 形象的瞭解力至多只能是部分的或象徵性的, 某種程度的觸覺想像也似乎牽涉進來了。」[8] 美國布朗大學數學家 T. 班喬夫 (Banchoff) 和計算機科學家 C. 斯特勞斯 (Strauss) 設計出在三維空間內外移動的四維超立方體的計算機生成的運動圖象。人們坐在計算機控制台前, 使用一組按紐, 即可以獲得各種角度的超立方體的三維投影圖。下面的圖一和圖二就是由 T. 班喬夫和 C. 斯

特勞斯作出的, 這乃是從幾個角度觀察複指數函數 (一個四維對象) 所獲得的圖像。

三. 數學想像獲得成功的前提

概括地說, 數學想像獲得成功的基本前提有五, 現在分別闡述如下:

1. 具備一定的數學基礎知識

進行數學想像是一門高超的藝術, 只有在堅實的數學基礎之上, 才能對於現實問題有所超脫、昇華、改組以至扭曲和變形。進行數學想像除了數學基礎知識而外, 還需要其他學科甚至是多種學科知識做爲基礎。只有在更寬闊的領域之上, 利用較大的知識跨度, 數學想像才能振翅高飛, 並且通過想像把表面上互不相關的問題, 從本質上找出其間的聯繫。然而, 只依靠零星的貧乏的知識, 就企圖獲得重要的數學想像, 其成功的概率幾乎等於零。K.F. 高斯 (Gauss, 1777-1855)、N.I. 羅巴切夫斯基 (Lobatchevsky, 1793-1856), D. 希爾伯特 (Hibbert, 1862-1943) 等大數學家都是在雄厚的數學基礎知識之上, 才能施展才華, 使自己的想像得以自由馳騁的。

2. 要培養高層次的數學想像力

不同層次的數學想像, 所涉及的範圍和效果迥異。以非歐幾何的發現爲例, 意大利數學家 G. 薩開里 (Saecheri, 1667-1722) 和德國數學家 H. 蘭伯特 (Lambert, 1728-1777) 遠在十七世紀和十八世紀, 就曾從試證第五公設中發現了與直觀相矛盾的結果, 及至十九世紀, 德國數學家 F.K. 須外卡特 (Schweikart) 和 F.A. 塔烏里努斯在獲得與薩開里等人相類似的結果之後, 則推斷這些結果可能屬於一種「星際幾何」。這兩位數學家雖然都達到了與 C.F.高斯 (Gauss, 1777-1855), N.I. 羅巴切夫斯基 (Lobetchevsky,1793-1856)、J. 鮑利耶 (Bolyal, 1802-1860) 在研究非歐幾何時的相同起點上, 但卻失去了創立非歐幾何學的機會, 其根本原因, 即在於他們的數學想像力還未能達到類幾何思維的水平。

3. 數學想像的本質就在於它的自由

大數學家 G. 康托 (Cantor,1845-1918) 主張數學和其它領域的區別在於它可以自由地創造自己的概念, 亦即是說數學想像可以自由發展。他利用自由想像把無限理論發展到令人眩暈的高度。康托喜歡使用「自由數學」這個名詞, 來取代通常所說的「純粹數學」。1883年, 他曾經說過:「數學在它自身的發展中完全是自由的, 對它的概念的限制只在於: 必須是無矛盾的, 並且與先前由確切定義而引進的概念相協調 $\cdots$ 數學的本質就在於它的自由。」[9]

在數學發展史上, 一些有重大成就的數學家, 都特別注意自己的文學藝術修養, 並以此來培養自己的自由想像的能力和習慣, 例如法國數學家 A.L. 哥西 (Cauchy 1789-1857) 從小就注意文學藝術課的學習, 以致後來他在數學分析的嚴格化方面, 做出了

重大貢獻。英國數學家布羅諾夫斯基也曾指出:「所有偉大的科學家都在自由地運用他們的想像, 並且聽任他們的想像得出一些狂妄的結論, 而不叫喊『停止前進』[10]」。由此可見, 提倡自由想像, 對於數學的發展具有重要價值。

4. 數學想像時宜陷入於沉思狀態

人們長期專注於某個問題, 就會造成想像的一定深度, 這種心理現象, 一般稱爲沉思。如果數學想像時陷入於沉思狀態, 將會更有成效。有人在回憶起愛因斯坦陷入於創造性沉思之中進行科學想像的情景時, 曾經這樣寫道: 「他常常一言不發, 獨自凝思, 在思索一個問題時, 往往兩眼發直, 來往於室中, 像害了一場熱病似的, 連飲食也要送到研究室中。」其實, 在科學史上, 曾經陷入於高度沉思狀態進行科學想像的, 何止是愛因斯坦一人! 許多數學家爲了解決一個難題, 常常都是「獨上高樓, 望盡天涯路」張開想像的翅膀, 任意翱翔!

美國數學家 N. 維納 (Wiener,1894-1964) 曾經這樣說過, 他的數學想像在「受外界干擾最小的時刻進行得最好, 而這往往又是在睡眠初醒的時候。其實, 很可能在夜間某個時刻, 即已經經歷了對於建立我的思想所必須的思考過程。我可以肯定, 這種思考過程部份地是在睡眠狀態之中以夢的形式進行的, 這種思考如果處於等待入睡的催眠狀態, 則更爲有效。」[11]

5. 學術爭論亦能激勵數學想像力

由於各個數學家有著不同的知識背景, 不同的觀察角度以及不同的思維方法, 通過學術交流和學術爭論, 可以相互補充, 相互激勵, 可以使以錯誤知識和可疑推理爲依據的數學想像得到澄清, 可以使追蹤錯誤線索的盲目狂熱得到遏制。法國數學家 J.S. 阿達瑪 (Hedamard,1865-1963) 曾經說過: 優秀的數學家經常會犯錯誤, 但他們能很快發現並糾正錯誤。然而, 發現錯誤和糾正錯誤的有效途徑, 則是通過學術討論。一些測試表明, 當以小組形式進行學術討論時, 成年人的數學想像力, 可以提高 66-93%。其原因則是除小組成員之間相互啓發之外, 他們之間的相互競賽也可以使成年人或兒童的思維效率大爲提高。[12]

四. 數學想像的作用及其局限性

數學想像的特點是神馳萬里, 思接千載, 海闊天空, 自由創造, 越是離奇古怪的想像, 越能導致極有價值的科學成果。爲了說明想像在數學發展中的實際作用, 下面我們來引證美國數學家 M. 克萊因的一段話:「J. 瓦里斯 (Wallis) 在他的「代數」裏把高維空間看成是『自然界裏的怪物, 它比希臘神話中獅頭羊身蛇尾的或半人半馬的妖怪還難以想像。』··· J. 奧扎南 (Oznam) 指出過, 一個多於三個字母的乘積將是『有多少字母就有多少維數』的一種度量,『但這只能是一種想像, 因

爲在自然界裏, 我們並不知道任何一個多於三維的量』[13] 關於高維空間的數學想像, 曾有很多大數學家誤認爲是連幻想也是不能想像的, 但後來卻終於被數學界所接受。

充分發揮數學想像的作用, 在一些高度抽象的數學領域中, 經過數學家的巧妙構思, 肯定能夠想像出許多全新的數學結構。M. 克萊因曾經指出「那些在眞實世界裏沒有直接對應物的概念之被引進並逐步被接受, 確實迫使人們承認數學是一種人爲的並且多少帶有任意性的創造物, 而不僅僅是從自然界裡引導出來的本質上是眞實事物的一種理想化。但是隨著這種認識的深化, 帶來了更加意義深遠的發現 —數學並不是關於自然的一堆眞理」[14]。

但是, 數學想像的作用, 仍然是有局限性的。因爲在數學想像中, 有者可能會被事實所否定, 有者可能科學價值並不大。因此, 對於數學想像既要自由發揮, 但也不可信馬由韁。要經常對數學想像進行評估, 隨時檢查和糾正已被證實是錯誤的想像。劍橋大學心理學教授 F. 巴特利特 (Barltett) 曾經提出「測定智力技能的唯一最佳標準可能是檢測並摒棄謬誤的速度。」

數學想像與數學直覺之間的關係是比較密切的, 複雜的想像已經具備很多直覺的色彩, 例如其中的「漸悟」和「頓悟」已屬於直覺思維的範疇。W.I.B. 具弗里奇著「科學研究的藝術」一書中第五章爲「想像力」, 第六章爲「直覺」。他在第五章開端時寫道:「本章所包括的很多材料都應視爲與『直覺』有關, 而下一章的內容的大部份也同樣適用於『想像力』。」[16]

注釋

1. 愛因斯坦文集, 商務印書館出版, 1976年第一卷, p.284。
2. 數學史譯文集續集, 上海科學技術出版社,1985年, p.54。
3. R.Thom, 新數學是教育和哲學上的錯誤嗎? 數學譯林, 1980年2月。
4. 李學數, 數學和數學家的故事, 香港出版,1980年, p.46。
5. 解恩澤、趙樹智, 數學思想方法縱橫論, 科學出版社出版, 1987, p70。
6. 數學史譯文集, 上海科學技術出版社出版, 1981年, p.91。
7. 鄧東皋、孫小禮、張祖貴, 數學與文化, 北京大學出版社出版, p.28。
8. 陳省身, 從三角形到流形, 自然雜誌, 1979年, 第8期。
9. M. 克萊因, 古今數學思想, 北京大學譯, 上海科學技術出版社出版, 1984年, 第四册, p.105。
10. 周昌忠, 創造心理學, 中國青年出版社出版, 1983年, p.213。
11. 數學史譯文集續集, 上海科學技術出版社出版, 1985年, p.55。
12. A.F. 奧斯本, 創造性想像, 中國發明者基金會, 中國預測研究會, 1985年, p.75。
13. 書名同 [9], p.102。
14. 書名同 [9], p102-103, p.106。
15. W.I.B. 貝弗里奇 (Beveridge), 科學研究的藝術, 陳捷譯, 科學出版社出版, 1979年, p.63。
16. 書名同 [15], p.56。

—本文作者任教於中國安徽省阜陽師範學院數學系—