數學美賞析(下)

譚建國

D. 方法美

在數學方法、解答方面, 數學的美具有什麼特點呢?

優美的解答應該使我們驚訝, 應該是出乎意料的。但是數學推理的美不能只用意外性來解釋。如果一個學生對一道習題, 想不出公式化的常規方法來解答, 只是勉勉強強地想出一種冗長的繞道的解法, 雖然這種解法大家完全沒有想到, 但是這個解法給人帶來的最多只能是感動, 而絲毫不能給人美的感受。

能給人優美感的數學方法與解答, 除了不尋常性以外, 還應該具有直觀性 (某種意義上也就是簡單性)。可以說, 方法美的主要特徵就是意外性 (新奇性) 和簡單性。

簡單性的含義如前文所述, 而新奇性則來源於數學思想的獨創性和數學方法的新穎, 它體現了數學理論或方法中的藝術因素。掌握這種藝術靠直覺。方法上的新奇往往要同時引入相應的新概念。由於對新奇性的評價與審美心理因素關係十分密切, 所以, 對一種新的理論或全新的方法的美學價值的看法總是存在爭議的, 例如, 對數學定理的機器證明就是如此。

關於方法之美我們在前文已經接觸過一些, 如“理論美”中的例4, 下面再通過分析一些例子, 對方法美作一番巡視。

(一) 數學思想方法的幾次重大轉折

歷史表明, 數學的發展, 不僅表現爲量的積累, 而且還表現爲質的飛躍。下面將論述的數學思想方法的四次重大轉折就充分說明了這一點。

1. 從算術到代數

算術和代數, 作爲最基礎而又最古老的兩個分支學科, 有著不可分割的親緣關係。算術是代數產生的基礎, 代數是算術發展到一定階段的必然產物。從算數發展到代數, 是人們對數及其運算在認識上的突破, 也是數學在思想方法上的一次重大轉折。

在算術解題法中, 未知數是不允許作爲運算的對象的, 它們沒有參加運算的權利。而在代數解題法中, 所列出的方程作爲一種條件等式, 已是由已知數和未知數構成的有機統一體。在這個統一體中, 未知數和已知數有著同等的權利, 即未知數在這裡也變成了運

算的對象, 它們不再是消極、被動地靜等在等式的一邊, 而是和已知數一樣, 可以接收各種運算指令, 並可以依照某種法則從等式的一邊移到另一邊。解方程的過程, 實質上就是未知數和已知數進行重新組合的過程, 也是未知數向已知數轉化的過程。

解方程是古典 (經典) 代數最基本的內容。方程在數學中占有重要的地位, 它的出現不僅極大地擴充了數學應用的範圍, 使得許多算術解題法不能解決的問題能夠得以解決, 而且對整個數學的進程產生巨大的影響。特別是數學中的許多重大發現都與它密切相關, 例如, 對二次方程的求解, 導致虛數的發現; 對五次和五次以上方程的求解, 導致群論的誕生; 對一次方程組的研究, 導致線性代數的建立; 應用方程解決幾何問題, 導致解析幾何的形成; 等等。

顯然, 代數解題法 (相對於算術解題法) 更具有新奇性和簡單性 (算術解題法需要更強的技巧)。

2. 從常量數學到變量數學

算術、初等代數、初等幾何和三角, 構成了初等數學的主要內容。它們都以常量即不變的數量和固定的圖形爲其研究對象, 因此這部分內容, 也稱爲常量數學。運用常量數學可以有效地描述事物和現象相對穩定的狀態。可是, 對於描述運動和變化, 卻是無能爲力的, 於是便產生了從量上描述事物的運動和變化規律的數學部分 — 變量數學。從常量數學到變量數學, 是數學在思想方法上的又一次重大轉折。

變量數學產生的兩個重要步驟都是在十七世紀完成的, 因此十七世紀也就變成了常量數學向變量數學轉變的時期。變量數學的產生, 有著極重要的意義, 其具體表現可概括爲以下兩個方面。

首先, 變量數學的產生, 使數學自身在思想方法上發生了重大的變革, 由此帶來整個數學面貌的根本性改觀。通過這次變革, 常量數學的許多分支學科, 諸如代數、幾何、三角和數論等, 由於變量數學的滲透而在內容上得到了極大的豐富, 在思想方法上發生了深刻的變化。例如, 可把解方程理解爲求函數的零點; 借助分析的方法率先給出了代數基本定理的嚴格證明等等。通過這次變革, 新的數學分支雨後春筍般地湧現出來。諸如解析數論、微分幾何、微分方程論、積分方程論、級數論、差分學、函數論等。總之, 從變量數學產生後, 變量數學的思想方法很快就在整個數學中占據了主導地位, 不要說分析學和幾何學, 就是代數學也一樣, 由文字式的變換和解方程爲內容的初等代數發展到以代數系統的結構爲內容的近世代數, 變量數學的思想已滲透其中, 以各種“運動”(“變動”) 構成的各類具體的代數系統構成近世代數的一個重要的部分, 如置換群, 關係半群, 算子代數等; 另外, 抽象代數系統的結構的刻劃也須借助於其上的若干特殊的“運動” — 同態, 同構等, 讓系統“動”起來, 在“動”中把握它的本質特性。

其次, 變量數學的產生, 使自然科學描述現實物質世界的運動和變化過程成爲可能。數學在自然科學各部門的應用範圍得到了空前的擴展。

變量數學的方法與常量數學的方法相比, 更具有新奇性 (如"線"是"點"運動的結果) 和簡單性 (如求平面曲線所圍成的面積)。

3. 從必然數學到或然數學

從必然數學到或然數學, 是數學思想方法的又一次重大轉折。所謂必然數學, 是指描述和研究現實世界的必然現象及其規律的那部分數學, 它包括通常的算術、三角、幾何、代數、微積分、微分方程論、積分方程論和函數論等分支學科。必然數學在科學技術、社會實踐以及日常生活中有著廣泛的應用, 成爲人們認識和改造世界的有力工具。然而, 在研究和解決現實世界大量存在的偶然現象中的量及其關係問題上, 必然數學就無能爲力了, 需要創造新的數學方法。於是, 一個新的數學領域 — 或然數學便被開拓出來了。

由於隨機現象在現實世界中大量存在著, 因此隨著科學技術和社會實踐的發展, 以概率論爲基礎的或然數學很快地蓬勃發展起來, 並越來越顯示出它的巨大威力。

首先, 或然數學與必然數學、自然科學與社會科學相互作用產生出許多新的學科, 如平穩隨機過程理論、馬爾科夫過程論、多元分析、試驗分析、統計物理學、統計生物學、統計醫學和概率邏輯等。

其次, 或然數學的理論和方法, 在科學技術、國防、工農業和經濟各部門得到廣泛的應用, 特別是在電子技術、自動控制、氣象預報、地震預報、地質勘探、企業管理、公共事業以及國防中的防空、巡邏搜索等部門已經取得明顯的社會效益。

容易理解, 以概率論爲基礎的或然數學其方法與必然數學相比是新奇的, 相對所要研究、考察的數學對象, 其方法又是簡單的。

4. 從明晰數學到模糊數學

人們在社會實踐和科學研究中遇到的各種量, 依其界限是否分明可分爲這樣兩類: 一類是明晰的, 另一類是模糊的。用於描述明晰量及其關係的變化規律的數學稱爲明晰數學。明晰數學是研究明晰量的有力工具, 但對模糊的量它就不適用了。人們在尋找處理模糊量及其關係變化規律的數學方法過程中, 創立了一門新的數學分支學科 — 模糊數學。模糊數學的產生, 是數學思想方法的又一次重大轉折。

模糊數學決不是把已經很精確的數學變得模模糊糊, 而是用精確的數學方法來處理過去無法用數學描述的模糊事物, 因爲在現實世界裡如果要想絕對地精確是辦不到的, 而我們也只能是把事物的不精確程度降低到無關緊要的水平罷了。模糊數學的出現, 給我們研究那些複雜的, 難以用精確的數學描述的問題帶來了方便而又簡單的方法。國際上有人說它是"異軍突起"。也正是因爲這點, 模糊數學才能滲透到各個領域裡去, 並且顯示出強大的生命力。

模糊數學雖然只有二十多年的歷史, 從理論上還遠遠談不到完善, 但對於它的研究, 無論基礎理論還是實際應用, 仍然得到了很大的發展。

在理論研究方面, 首先, 模糊集合概念本身不斷得到擴展, 產生出許多不同類型的模

糊集合, 如 L 一模糊集合、R 一模糊集合、Z 型集合和 n 級模糊集合等。其次, 模糊數學的內容日漸豐富。所研究的課題已涉及到廣泛的範圍, 如模糊數、模糊關係、模糊圖、模糊向量、模糊關係方程、模糊映射及變換、模糊概率、模糊判斷、模糊規劃、模糊邏輯、模糊語言、模糊識別和模糊控制等等。

在應用研究方面, 模糊數學的思想與方法正在廣泛滲透到科學和技術的各個領域, 如物理、化學、生物學、醫學、心理學、氣象學、環境科學、管理學、經濟學、情報學、語言學、邏輯學、系統論、信息論、控制論以及人工智能等。同時, 在農業、林業、建築、採礦、冶金、地質、機器檢修等許多國民經濟領域都已取得初步的成果。模糊數學的理論和應用研究相結合, 是模糊數學發展的一個重要課題。

人類對現實世界"量"規律的探索, 是一個永無完結的認識過程。在未來數學發展的進程中, 還會出現新的重大轉折。特別是當代電子計算機的發展, 給數學的思想方法帶來了巨大的沖擊, 傳統的單純"人腦"支配"手工操作"的數學研究, 開始由"人–機" 系統來代替, 數學機械化的思想已初露端倪。可以預想, 由於電子計算機的進一步發展, 必將使數學在思想方法上發生根本變革, 並由此引起數學新的重大轉折。

(二) 逆向思維方法

逆向思維是相對於慣常思維而言的一種思維形式。所謂慣常思維, 就是通常所說的習慣性思維, 它的基本特徵是因循已有的思路去考慮和思索問題, 這種思維形式反映了思維過程的連續性、漸近性和聯結性, 是思維慣性的表現。逆向思維則是發散思維的一種, 它的基本特徵是, 從已有思路的反方向去考慮和思索問題, 這種思維形式反映了思維過程的間斷性、突變性和反聯結性, 是對思維慣性的克服。利用逆向思維得到的結果顯然具有某種新奇性。

慣常思維對於數學研究是不可缺少的, 沒有它, 就沒有知識的穩步增長和理論體系的鞏固、完善; 同樣, 逆向思維也是不可忽視的, 因爲沒有它, 就難以擺脫已有數學觀念、理論框架的束縛, 許多具有突破性的重大數學概念、數學理論也就難以產生出來。具體說來, 逆向思維在數學研究中的作用, 主要表現在下面幾個方面:

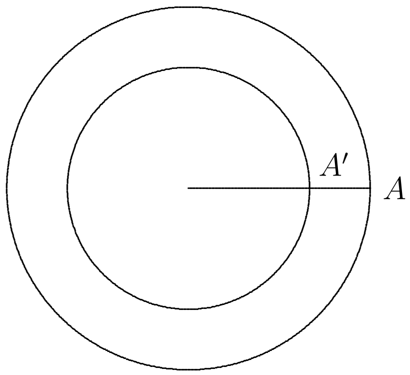
(1) 有利於克服慣常思維的保守性, 開拓新的數學領域;
(2) 有利於糾正慣常思維所造成的錯誤認識, 開闢數學新方向;
(3) 有利於排除慣常思維過程中出現的困難, 開通新的思路。

下面給出一些利用逆向思維的例子。

1. 集合論的創立

我們知道, 集合論建立的關鍵, 就在於承認無限集合的存在以及它和它的子集可以建立起元素間的 $1-1$ 對應關係。可是, 對這個關鍵問題, 慣常思維的結果長期以來一直是錯誤的。早在公元前四世紀, 希臘學者亞里士多德 (Aristotle) 就曾考慮過整數集合

$\{1,2,3,\ldots\}$, 他承認整數有無窮多個, 但不承認它們可以作爲一個整體而存在。到了中世紀, 數學家和哲學家又發現了不少的東西。例如, 兩個周長不等的同心圓, 可通過半徑使圓周上的點構成 $1-1$ 對應的關係, 即對大圓上的任意一點 A, 總有小圓上的一點 A' 與之對應, 反之亦然。但由於受有限集合傳統觀念的束縛, 他們抹煞了"整體可以和部分構成元素之間的1-1對應"的事實。甚至到了十九世紀中葉, 大多數數學家對無限集合的認識還是錯誤的。他們囿於有限集合的觀念, 認爲整體在任何情況下, 都不可能與它的部分在數量上處於同等的地位。



歷史上第一個打破有限集合觀念的框架, 敢於對無限集合進行逆向思維的是捷克數學家波爾查諾 (Bolzano, B.)。他不僅承認無限集合的存在, 而且把無限集合作爲數學的對象來加以研究。他明確提出, 無限集合的部分可以等價於整體, 無限集合有其自身特殊的結構, 這種結構與有限集合有著質的不同。波爾查諾的思想是革命性的, 也是與傳統數學觀念背道而馳的。正是這種反傳統的逆向思維, 爲後人研究無限集合開闢了新的方向, 他本人也就由此成爲集合論的先驅者。

沿著波爾查諾所開闢的新方向繼續前進的是德國著名數學家康托爾 (Cantor,Georg Ferdinand Ludwig Philipp), 他發展了波爾查諾的思想, 明確提出了研究無限集合的主要方法 — $1-1$ 對應, 提出了一連串新的概念: 極限點、導集、可列集、連續集等, 並且用"基數" 這一概念區分和描述了無窮集合的等級。康托爾正是由於徹底背叛了兩千多年來人們在無限集合問題上的傳統思維方式, 把長期以來顚倒了的事實又重新顚倒了過來, 所以才成功地開闢出數學的一個新領域 — 集合論。

隨著集合論向數學各分支學科的全面滲透, 它逐漸成爲全部數學的基礎。

2. "四色問題"的機器證明

"四色問題"亦稱爲"四色猜想"。它是指: 用四種顏色就可以把所有地圖塗上色, 使得具有共同邊界的國家 (地區) 染有不同的顏色。這問題最早是由德國數學家麥比烏斯 (Möbius, August Ferdinand) 於1840年提出的。1852年, 英國青年數學家弗南希斯, 格思里 (Francis Guthrie) 在對英國地圖著色時重新提出了這一問題, 並寫信告訴他哥哥弗雷德里克 (Frederick Guthrie)。弗雷德里克企圖從數學上給予證明, 但沒有成功, 於是便請教他的老師、著名數學家德·摩根 (De Morgan,Augustus)。德·摩根絞盡腦汁, 同樣沒能給出證明。他只好寫信給在都柏林的著名數學家哈密頓 (Hamilton, Sir William

Rowan), 請他加以研究。哈密頓思考這問題達十三年之久, 直到去世仍無任何進展。

1878年, 著名數學家凱萊 (Cayley, Arthur) 認識到這問題非同尋常, 把它提交給倫敦數學學會。"四色問題" 由此便被數學界所周知。開始, 數學家們對這問題的難度估計的並不充分, 有的甚至把它看得十分簡單。然而, 一百多年來, 許多數學家認眞研究了它, 結果都白費力氣了。數學家希伍德 (Peray John Heawood) 曾堅持奮鬥了六十年之久, 他雖然成功地證明了 "五色猜想" 是對的, 但他卻沒能判斷出 "四色猜想" 的眞僞。於是人們開始認識到這個貌似容易的題目, 其實是一個可以與費爾馬大定理比美的難題。

到了本世紀七十年代, 某些深有卓見的數學家指出: "四色猜想" 可能是一個正確的定理, 但它需要用一種數學中前所未有的不同方法來論證, 這個論證是不能單獨用人力來完成的。於是, 有人開始轉向電子計算機, 試圖借助機器的力量給出問題的答案。1976年, 美國伊利諾 (Illinois) 大學的數學家阿佩爾 (K.Appel) 和黑肯 (W.Haken) 等人, 就是在這個方向上取得成功的。按照他們設計的程序, 計算機運行了1200多個小時, 作了兩百億個邏輯判斷。1977 年, 在一次數值數學與計算機會議上, 有人又宣布了一個比較簡單的證明, 但也要用去50小時。如果有一個具有足夠迅速和準確判斷力的人來完成這項工作, 大約要花費30萬年。(參見 [14]、[18])

這項工作最重要的意義, 不在於證明了四色定理, 而在於運用電子計算機完成了這件人沒有能完成的事情, 提供了用計算機研究數學的範例。它的美學價值就在於, 方法的新奇性與 (相對) 簡單性 — 歷時124年、經過許多數學大家的艱苦努力未能完成的世界難題, 引入計算機後, 終於如願以償!並將開闢一個數學研究的新時代。

從相反的方向進行思考, 往往導致某種意想不到的後果。這正是逆向思維的重要功能之所在。然而, 並非所有的逆向思維都是富有成果的。這是因爲逆向思維本身具有很大的不確定性; 自然, 也並非所有逆向思維的成果都是美的, 因爲方法之美除了新奇性之外, 還必須具有簡單性的特徵。

(三) 遞歸模式

"遞歸模式" 是數學上的一種十分重要的解題模式, 在用其它的解題方法遇到困難的時候, "遞歸模式" 有可能幫助我們迅速地掃除障礙。事實上, 應用得十分廣泛的數學歸納法, 採用的就是 "遞歸模式" 的推理。在數論中舉足輕重的 "輾轉相除法"、"無窮遞降法" 以及高階行列式求值時的 "遞推展開" 等等, 都可以看作是 "遞歸模式" 的體現。

例: 求 $S_k(n)=\sum_{i=1}^n i^k$, k 與 n 都是自然數。

我們採用 "遞歸模式" 來求解。

先從比較簡單的情況考慮起:

當 $k=1$ 時, $S_k(n)$ 即 $S_1(n)=1+2+\cdots+n$。

求 $S_1(n)$, 可以利用 "對稱性原理", 將兩個順序完全相反的 $S_1(n)$ 相加, 再把和除

2。

$$
\begin{array}{rl}
 & S_1(n) = 1+2+\cdots+n \\
+) & S_1(n) = n+(n-1)+\cdots+1 \\
\hline
 & 2S_1(n) = (n+1)+(n+1)+\cdots \\
 & \qquad +(n+1) \\
 & \qquad = n(n+1)
\end{array}
$$

故 $S_1(n)=\frac{n(n+1)}{2}$。
當 $k=2$ 時, $S_k(n)$ 即 $S_2(n)=1^2+2^2+\cdots+n^2$。

以上所用"對稱性原理"對於 $S_2(n)$ 已經行不通了。爲了尋找一種對一般 $S_k(n)$ 普遍適用的辦法, 讓我們再來看看還有沒有別的辦法也能求出 $S_1(n)$。

注意到我們剛才求出的 $S_1(n)$ 的表達式 $S_1(n)=\frac{n(n+1)}{2}$ 是 n 的二次式, 如果我們能夠找到 $S_1(n)$ 中的通項 n 與 n 的二次式之間的某種聯繫, 也許就可以指望這種聯繫幫助我們求出 $S_1(n)$。這使我們想起了恆等式

$$(n+1)^2-n^2=2n+1$$

依次令 $n=1,2,3,\cdots$ 就得到如下 n 個等式

$$
\begin{aligned}
2^2-1^2 &= 2\times 1+1 \\
3^2-2^2 &= 2\times 2+1 \\
4^2-3^2 &= 2\times 3+1 \\
\cdots &= \cdots \\
(n+1)^2-n^2 &= 2n+1
\end{aligned}
$$

將此 n 個等式兩邊分別相加, 即得

$$(n+1)^2-1^2=2S_1(n)+n$$

故 $S_1(n)=\frac{n(n+1)}{2}$。
以上方法不難用於求 $S_2(n)$, 只需由恆等式

$$(n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1$$

依次令 $n=1,2,3,\cdots$ 得到

$$
\begin{aligned}
2^3-1^3 &= 3\times 1^2+3\times 1+1 \\
3^3-2^3 &= 3\times 2^2+3\times 2+1 \\
\cdots &= \cdots \\
(n+1)^3-n^3 &= 3n^2+3n+1
\end{aligned}
$$

再將此 n 個等式兩邊分別相加, 得

$$
\begin{aligned}
&(n+1)^3-1^3 \\
&= 3S_2(n)+3S_1(n)+n
\end{aligned}
$$

而 $S_1(n)$ 已知, 故

$$S_2(n)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)。$$

完全仿照以上的作法, 我們可以求得

$$
\begin{aligned}
&(n+1)^{k+1}-1 \\
&= C_{k+1}^1 S_k(n)+C_{k+1}^2 S_{k-1}(n)+\cdots \\
&\quad +C_{k+1}^k S_1(n)+n
\end{aligned}
$$

上式建立起了 $S_k(n)$ 與 $S_{k-1}(n)$、$S_{k-2}(n)$、$\cdots$、$S_1(n)$ 之間的遞推關係, 只要我們知道了 $S_1(n)$、$S_2(n)$、$\cdots$、$S_{k-1}(n)$ 的值, 馬上就可以求得 $S_k(n)$ 的值。於是問題得到解決。

"遞歸模式"的最大優點是運算與證明的程序性很強, 非常便於計算機處理。所以在現代數學中,"遞歸模式"日益顯示出它的重要性。

對數學之美的巡視到這裡就要告一個段落了。我們看到, 數學中也處處充滿了美, 只要用心去體驗、去尋找, 必能滿意而歸。

最後, 我要向對於這次探討給予了極大支持和幫助的戴正德教授致以衷心的感謝! 郭聿琦教授對本文的修改提出了許多建設性的建議, 並親自加以指導, 在此也表示最誠摯的謝意。

主要參考書目

1. 美學教程編寫組: 美學教程, 中國社會科學出版社, 1987年1月。
2. 高爾泰: 美是自由的象徵, 人民文學出版社, 1986年12月。
3. 張相輪、凌繼堯: 科學技術之光 — 科技美學概論, 人民出版社, 1986年12月。
4. 周義澄: 科學創造與直覺, 人民出版社, 1986年6月。
5. 姜念濤: 科學家的思維方法, 雲南人民出版社, 1984年5月。
6. 周忠昌: 創造心理學, 中國青年出版社, 1983年5月。
7. H. 加登納: 智能的結構, 光明日報出版社, 1990年9月。
8. M. 克萊因: 古今數學思想,(1-4冊), 上海科學技術出版社, 1979年10月。
9. 中國大百科全書總編輯委員會數學編輯委員會: 中國大百科全書 (數學卷), 中國大百科全書出版社, 1988年11月。
10. 梁宗巨: 世界數學史簡編, 遼寧人民出版社, 1980年8月。
11. 解恩澤、趙樹智等: 簡明自然科學史手冊, 山東教育出版社, 1987年7月。
12. L.A. 斯蒂恩: 今日數學 — 隨筆十二篇, 上海科學技術出版社, 1982年8月。
13. 解恩澤、趙樹智: 數學思想方法縱橫論, 科學出版社, 1987年6月。
14. 張奠宙、趙斌: 二十世紀數學史話, 知識出版社, 1984年2月。
15. E.T. 貝爾: 數學精英, 商務印書館, 1991年7月。
16. 徐本順、殷啓正: 數學中的美學方法, 江蘇教育出版社, 1990年7月。
17. 徐利治、王前: 數學與思維, 湖南教育出版社, 1990年1月。
18. 張光遠: 近現代數學發展概論, 重慶出版社, 1991年12月。
19. 孔慧英、梅智超: 現代數學思想概論, 中國科學技術出版社, 1993年12月。

—本文作者任教於中國雲南大學數學系、基礎數學研究所—