淺談固定點定理及其應用

吳志揚

第一節　引言

這篇短文是根據作者在清華大學應用數學所通識課程的演講改寫而成的。在生活中身處逆境或危機時, 我們常自勉要能 ”以不變應萬變” 來應付危機。在數學的理論及應用中也常利用這個觀點 (或精神) 來了解一些複雜的現象。首先我們先簡要地說明數學是如何應用到各種不同領域, 這過程大概可用下面的流程圖來描述。

I、了解並描述實際問題 (包括各種工程、社會科學、經營、管理等等問題)	←	IV、解釋數學解答, 在實際問題的意義及考慮其合理性, 並加以應用
↓		↑
II、模型化爲數學問題 (例如: 圖論、方程、幾何、代數及結構等等)	→	III、解決該問題並得到解答, 無法得到精確解答時則考慮近似解。

現在讓我們舉一個大家熟知的例子來說明如何使用這個流形圖:

雞兔同籠問題: 雲林縣鄉下有位農夫養有一群雞和兎子, 某日突然下起西北雨, 農夫和他的兒子急忙把雞和兎子一起趕進籠子避雨, 因爲時間緊迫, 顧不得將他們分開, 所以農夫和兒子分別計算頭數與脚數。數得結果是共有1010個頭和2820隻脚, 那麼雞和兎子各有幾隻呢? 相信大家小學時就會處理這個

問題了, 現在我們試著用流程圖中的各步驟來解答這個問題。

I. 了解實際問題:

在此例子中, 我們關心的是雞與兎子的個數, 與問題有關的因素是脚數及頭數, 至於尾巴有多少就不是我們所關心的了。我們知道正常的雞有兩隻脚和一個頭, 而兎子有四隻脚和一個頭, 在此, 我們特別強調 ”正常” 兩個字, 因爲在實際的況狀下, 農夫所養的兎子可能有些是三隻脚的。這不是抬槓, 因爲雞與兎子數量太大, 那麼不正常的情況發生的機會也就提高了, 不信的話, 各位讀者到養雞場及養兎場看看就能了解了。記得幾年前有位仁兄講過一個政治笑話說, 以前第一屆老立委還沒退休, 立法院開會時常常從豪華轎車下來了三位老立委, 共有九隻脚。

II. 模型化為數學問題 (或建立數學模型)

就像自然科學或社會科學一樣, 要建立模型必須有一些假設 (當然, 假設必須經得起實驗或時間的考驗)。在此例子中, 我們不妨假設:

(A1) 每一隻雞有 2隻脚和 1個頭。

(A2) 每一隻兎子有 4隻脚和 1個頭。

讓我們再強調一次, 這兩個假設不一定是對的, 不過可以檢查每隻雞和兎子來確認。更重要的是我們也假設

(A3) 農夫與兒子都沒算錯。

要不然, 問題就大了。現在我們可以把這問題數學化了。

假設農夫有 x 隻雞和 y 隻兎子, 那麼我們根據 (A1), (A2) 和 (A3) 得到一個聯立方程組:

$$\begin{cases} x+y=1010 & (1) \\ 2x+4y=2820 & (2) \end{cases}$$

III. 解決數學問題

在中學時, 我們已經知道如何解決聯立方程組。實際解得:

$$x=610 \quad \text{及} \quad y=400。$$

IV. 解釋數學解答在實際問題的意義及考慮其合理性並加以應用

根據 (II) 及 (III) 我們知道共有 610隻雞及 400隻兎子。這結果蠻合理的, 如果得到的答案是 610 又 $\frac{1}{2}$隻雞, 那就奇怪了。不過從數學的眼光說一個方程組的解答是可以有分數的。

各位讀者試想, 如果農夫和兒子早先數的結果是頭有1010個, 脚有2821隻 (注意 2821是奇數), 那會如何呢? 顯然 (A1), (A2) 和 (A3) 不可能三個都同時成立吧! 不然在第 II 步驟時我們會得到下面的方程組

$$\begin{cases} x+y=1010 & (1) \\ 2x+4y=2821 & (2) \end{cases}$$

解得 $x=609.5$, $y=400.5$, 那麼這結果就解釋成雞有609又$\frac{1}{2}$ 隻, 而兎子有400 又 $\frac{1}{2}$

隻, 只有半個頭的兔子或雞可以活嗎? 這一點也不合乎常理, 所以不是有不正常的雞或兔子, 就是農夫或兒子數錯了, 而這些情況在實際上是常發生的。

各位讀者對數學如何應用的過程已經有了初步的了解, 在下一節我們將開始談一些固定點的現象。

第二節 模型化後的一些數學問題

在前節裡, 我們已經大略了解到如何應用數學去處理各種實際問題的過程, 在這節裡, 我們將舉出幾個常見的模型化後的數學問題。從工程、自然科學及社會科學, 甚至日常生活中的問題, 各自依據該領域的原理 (Principle) 所建立的數學模型, 可說是各色各樣, 在此我們大概列舉下列四種問題:

(a) 方程問題: 求解 $f(x_1, x_2, \dots x_k) = 0$。

(b) 極值問題 (或最佳化問題): 求 $f(x_1, \dots, x_k)$, 在 $x_1, x_2, \dots$ 和 x_k 滿足特定條件下的最大值或最小值。

(c) (偏) 微分方程問題: 了解各種微分方程解的性質, 或者求出它們的解函數。

(d) 矩陣問題: 求一個方形矩陣 A 的冪矩陣 A^k。(例如: Markov Chain 等等)

這些問題各自有它們自己的數學理論, 在本文中我們主要是用一個共同的觀點來描述如何處理這些看似各不相關的課題, 這個觀點即是固定點理論。爲了避免過於複雜的討論, 我們只討論一個變數的問題。相信讀者也能從這個基本的情況, 了解到它們的相通性及一般性。

首先, 我們先說明一下, 在很多情況下問題 (b) 可以轉換成問題 (a)。一個變數的問題 (b) 具有下面的形式:

問題 (b): 當 x 落在區間 $[a, b]$ 裡, 求 $f(x)$ 的極值。

在此, 我們考慮函數 $f(x)$ 是可微分的, 那麼, 從微積分課裡我們知道, 處理問題 (b) 就相當於了解函數 $f(x)$ 的奇點問題, 即求解 $f'(x) = 0$, 這就歸結到問題 (a) 了。接著我們來審視一下問題 (a), 即:

問題 (a): 當 $x \in [a, b]$ 時, 求解 $f(x) = 0$。

當函數 $f(x)$ 是連續時, 我們有以下一個關於解的存在定理:

存在定理: 如果函數 $f(x)$ 是連續的, 且 $f(a)$ 和 $f(b)$ 是異號 (即 一正一負), 那麼, 存在有一數 x_0 介於 a 和 b 之間, 使得 $f(x_0) = 0$。

各位讀者不要小看這個定理, 雖然它淺顯易懂, 但它的應用極廣, 即使在很高深的數學理論中, 也常可見到它的身影。舉個例子來說, 任意給定一個三角形和一條直線, 那麼一定存在一條平行於該線的直線, 將此三角形分成面積相等的兩個區域。各位讀者, 不妨試著用此存在定理, 推想看看。若相信這是對

的, 那麼也請試著用直尺和圓規來找出這條平行線。

另一方面各位可能會問函數 $f(x)$ 一定是連續的嗎? 從筆者的經驗來說, 與自然界或各領域有關的函數十之八九不是連續的就是片段連續的。至於當 $f(x)$ 不是連續時, 那要求解 $f(x) = 0$, 幾乎是沒有一般性的方法。或許各位讀者可以想想看!

現在我們打算換一個角度來討論求解的問題, 首先我們分析一下什麼是解呢? 如果我們將此函數 $f(x)$ 當成一個映射 (變換), 那麼它將區間 $[a, b]$ 映射至實數集 R 。

求解 "$f(x) = 0$" 就相當於問那些 $x_0 \in [a, b]$ 在變換後會對應到值 0。

從這個觀點來看 "求解 $f(x) = 0$" 與 "求解 $f(x) = a$" (a 是個常數) 在本質上並無不同。倒是那些在變換之下是不動的點 x_0, 即 $f(x_0) = x_0$, 反而顯得特殊。從這個固定點的觀念來探討求解問題 $f(x) = 0$, 我們可以考慮函數 $g(x) = x + \varepsilon f(x)$, 其中 ε 是個很小且不為零的實數。

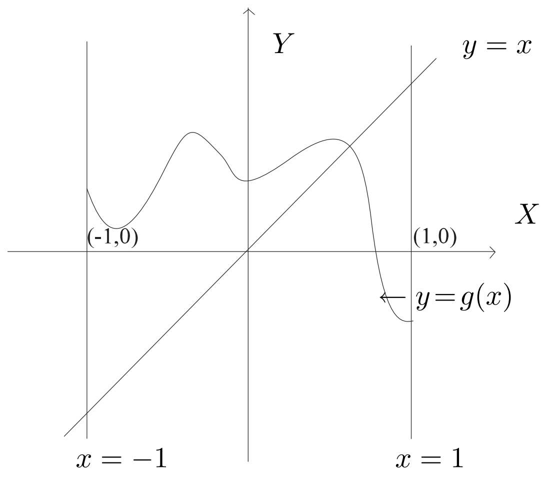
問題 (a): 求解 $f(x) = 0$。

就相當於

問題 (A): 找函數 $g(x)$ 的固定點。

為了方便我們可以假設定義域 $[a, b] = [-1, 1]$, 只要實數 $\varepsilon \neq 0$ 夠小, 那麼函數 g 就是個從 $[-1, 1]$ 到 $[-1, 1]$ 的映射。上面提到的存在定理也就等價於固定點定理: 任何連續函數 $g : [-1, 1] \to [-1, 1]$ 必定有固定點, 即存在點 $x_0 \in [-1, 1]$ 使得 $g(x_0) = x_0$。

從圖形來看, 即 $y = g(x)$ 的軌跡, 必然與直線 $y = x$ 相交。



關於問題 (c) 及 (d), 也可以用固定點的理論來探討, 詳細情況我們留到第四、第五節再談。

第三節　空間決定了固定點的存在

從上一節裡, 我們了解到極值問題與求解問題, 本質上都是找固定點的問題, 在這一節裡, 我們將更深入地探討固定點理論的一些重要內涵。

首先回顧一下連續函數 $g : [-1, 1] \to [-1, 1]$。關於函數 g 有兩件事是非常重要的:

1. 函數 g 的定義域和值域一樣, 也就是空間 $[-1, 1]$。
2. 連續函數g 是一個從空間 $[-1, 1]$ 到它自己的映射。

這兩個不同的東西 - 空間與映射 - 對函數 g 來說是最重要的。在這一節和下一節中, 我們將分別從空間和映射的觀點來探討固定點的存在問題。首先我們回顧一下上一節得到的固定點定理。

固定點定理: 任何連續函數
$g:[-1,1]\to[-1,1]$ 必定有一固定點。

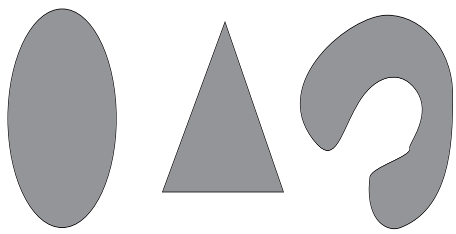
因爲對每一個函數 g 從空間 $[-1,1]$ 到它自己的連續映射都會有固定點, 所以, 具有固定點的性質主要是來自空間 $[-1,1]$ 本身的結構, 而非函數 g 所引起的。譬如空間 $(-\infty,\infty)$ (開集合) 就沒有這個性質了。各位讀者只要考慮函數 $g(x)=x+1$ 就知道了。另外, 我們舉個小朋友常玩的遊戲來進一步說明:

有十位小朋友, 各自坐在自己的位子上, 當老師吹一聲哨子, 大家就再找個位子坐, 大家可以了解的是, 不一定有小朋友會坐在同一位子, 也就是說, 空間 (十個位子) 在變換下 (換位子) 不一定會有固定點。

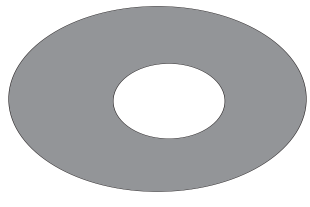
當我們考慮實際問題時, 與問題相關的因素往往不止一項, 所以將其模型化爲數學問題時, 變數 (variable) 就可能不止一個, 因此, 我們也就必須考慮高維度 (例如: 二百維度或二仟維度) 的空間 R^n 了。一般不了解數學或數學應用的讀者, 可能常感困惑地以爲我們只生活在三維的空間 R^3 裡, 爲什麼需要討論高維度呢? 各位讀者, 必須了解在五維度空間裡, 考慮的是有五項變數 (因素), 至於這五項變數所代表的意義是與你所關心的問題有關, 例如: 五種不同物品的價格等等, 考慮五維度空間 R^5, 並不表示我們就必須生活在五度空間裡。剛才所提的固定點定理在高維度時也有類似的結果, 這就是有名的 Brouwer 固定點定理了。

Brouwer 固定點定理: 任何連續函數 $g:D_n\to D_n$ 必定有一固定點。其中 $D_n=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbf{R}^n \mid |x_i|\le 1, i=1,2,\ldots,n\}$ 是 R^n 中的立方體。

同樣地, 固定點的性質是空間 D_n 所與生俱來的。至於固定點的位置則與函數 g 有很大的關聯。要證明這個結果, 必須用到蠻現代的數學知識, 不是一般讀者可以了解的, 所以, 我們在此也不便詳細說明, 以免把大家搞得頭昏腦脹。特別値得一提的是, 不只空間 D_n 有固定點的性質, 只要是它的連續變形也同樣具有這個性質。例如下面這三個在平面上的圖形, 它們是 D_2 的連續變形:



但下面的圖形不具有這個性質



現在我們利用 Brouwer 固定點的定理來說明我們中學時所熟知, 卻不懂得證明的代數基本定理。

代數基本定理: 每一個多項式至少有一複數根, 也就是說, 任何多項式 $P(x)=0$ 至少有一複數解。

表面上看這個定理與我們上面所談的固定點理論一點相似性也沒有, 這種現象對很多讀者來說是不陌生的, 很多人因爲看不出實際問題與數學理論的關聯, 所以不了解數學的有用性及重要性, 而常常用不屑的態度質問數學工作者, "數學有什麼用?" 這實在是很可笑也很悲哀的事啊!

現在言歸正傳, 應用固定點定理要注意的事有二: 第一是須建構一個好的空間 (domain), 第二要有一個從此空間到它自己的連續映射。在代數基本定理的敍述中, 我們想找一個複數解 (注意: 它也可以是實數!), 所以應該從複數平面上去找這個空間 (定義域)。考慮多項式。

$$P(X)=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+\ldots+a_nX+a_0.$$

爲了方便, 我們可以假設 $a_n=1$, 並取常數 $R=2+|a_0|+|a_1|+\ldots+|a_n|$, 那麼, 圓盤 D

$$D=\{z \mid |z|\le R\}.$$

是複數平面的一個子集, 讀者很容易看出它是在 Brouwer 固定點定理中空間 D_2 的連續變形, 所以, 圓盤 D 也具有固定點的性質。接著我們考慮下面函數 g, 它是從 D 到它自己的連續變換:

$$g(z)=\begin{cases} z=\dfrac{P(z)}{Re^{i(n-1)\theta}}, \\ \qquad |z|\le 1 \quad \text{且} \quad z=|z|e^{i\theta} \\ z-\dfrac{P(z)}{Rz^{n-1}}, \\ \qquad 1\le |z|\le R. \end{cases}$$

我們很容易驗證出函數 g 是連續的, 並且當 $|z|\le R$ 時, $|g(z)|\le R$ 所以 g 是個從圓盤 D 到它自己的連續映射。根據 Brouwer 固定點定理, 我們可以在圓盤 D 中找到一點 z_0, 使得 $g(z_0)=z_0$。代入函數 g 的表示式, 不難推出 $P(z_0)=0$。所以代數基本定理是對的。

各位讀者相信聽過 "數學王子" 高斯這個人, 他在現代物理、數學、天文及地理都有很傑出的貢獻, 代數基本定理就是他的博士論文的主要內容之一。不過, 上面所提的形式是用現代的言語來表現的。在高斯 (1777-1855) 年青時還沒有虛數的概念, 這概念是他後來才提出的。請問各位讀者, 如果不用複數, 那麼代數基本定理要如何表達呢? 各位不妨試試看。

第四節 映射決定了固定點的存在

在上一節裡我們說明了有些空間本身就具有固定點的性質, 而有些空間卻不具有, 但這並不表示任何連續函數作用在這些空間就一定沒有固定點, 事實上, 只要所談的函數 (映射) 夠好的話, 也一樣會有固定點。在本節所要探討的好函數是收縮映射 (contraction mappings)。在精確地描述這類函數前, 我們先看看下面的例子來體會一下。

例子: 考慮 R 是所有實數的集合, 我們給定兩個映射 f 和 g, 如下:

$$f(x)=x+1, \quad x\in \mathbf{R}.$$

$$g(x)=\frac{x}{2},\quad x\in\mathbf{R}.$$

很明顯地, 映射 f 沒有固定點, 而映射 g 有一固定點 0, 即 $g(0)=0$。我們來想想是什麼性質造成映射 g 有固定點而映射 f 卻沒有呢? 從幾何 (或距離) 的觀點來說, 對任何兩個實數 x 和 y, 簡單的計算給出

(1) $|f(x)-f(y)|=|x-y|$。 且

(2) $|g(x)-g(y)|=\frac{1}{2}|x-y|$。

在中學時, 我們知道兩數相減的絕對值可以代表爲這兩數在直線 R 上的距離, 所以 (1) 式和 (2) 式告訴我們, 映射 f 對直線 R 的作用是保距的, 而映射 g 的作用卻使距離減半。也就是說 g 是個收縮的映射。給定兩個實數 (點) x 和 y, f 作用在 x 和 y 上 k 次後的距離, 仍然是 x 和 y 的距離, 即

(3) $|f^k(x)-f^k(y)|=|x-y|$

而對映射 g 來說, $g^k(x)$ 和 $g^k(y)$ 的距離卻越來越近, 即

(4) $|g^k(x)-g^k(y)|=\frac{1}{2^k}|x-y|.$

所以大家可以了解 (或相信), $g^k(x)$ 會趨近於一個定數 x_0 (在這例子中 $x_0=0$), 且 x_0 是 g 的固定點。

事實上這個例子的性質有其一般性, 這就是有名的收縮映射原理。

收縮映射原理: 如果 X 是一個完備的距離空間 (例如: 有限維的 R^N 及無限維的巴氏空間等), 而 T 是從 X 到它自己的收縮映射, 亦即任意兩點 $x, y\in X$, $T(x)$ 和 $T(y)$ 的距離小於 x 和 y 的距離乘於一固定正數 $\alpha<1$。那麼, 可以得到

(1) 映射 T 有一個唯一的固定點, 我們記作 x_1^*, 即 $T(x^*)=x^*$。

(2) 給定任一點 $x_0\in X$, $\|T^k(x_0)-x^*\|\le\alpha^k\|x_0-x^*\|$, 在此, 記號 $\|x-y\|$ 代表 x 和 y 在X 中的距離。

這個原理在應用上非常重要, 因爲從任何點 x 出發, 每經過一次映射那麼 $T(x)$ 就向唯一的固定點 x^* 靠近一點, 並且 $T^k(x)$ 以指數的速度趨近 x^*。通常在處理一個數學化後的實際問題時, 起先我們並不知道其解答的位置。通常給定一個起始點 (initial point), 然後透過映射, 譬如使用 Algorithm 去求解, 跑一個 iteration 就得到另一個點 x_1, 經過 k 次後, 得到 x_k, 我們希望幾次之後就得到答案。但從實際或理論上來說這是不太可能的。所以, 退而求其次希望 x_k 以很快的速度趨近我們所要的答案, 並且能估算出 x_k 與解答 x^* 的可能最大誤差。在微積分課裡, 我們知道用牛頓法來求解 $f(x)=0$ 就是一個相當令人滿意的 Algorithm 了。

接著, 我們談一下如何用收縮映射原理來找出一個微分方程的解。首先在使用這個原理時, 也有兩件事必須注意: 第一我們必須考慮一個適當的空間 X, 第二要構造出一個自然的收縮映射 T, 並且 T 和 X 必須巧妙的配合。如果空間 X 太小了, 那麼 $T(X)$ 可能就不會落在 X 裡面。如果太大了, 映射 T 就很難會是收縮的, 這些都是應用收縮映射原理的困難所在, 所以往往只有專家才能掌握得很好。

考慮微分方程:

$$(*) \qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x), \quad x \in [0,1] \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

我們希望找到一個函數 $y = y(x)$ 滿足方程式 $(*)$, 在適當的條件下, 解函數是存在的, 然而在應用上, 我們往往也需要知道解函數 $y = y(x)$ 本身或至少得到它的近似解。上面談到用收縮映射原理時, 有兩樣東西要注意, 即空間 X 及映射 T。

在這個問題裡, 我們考慮 X 是所有在 $[0,1]$上的連續函數 g 而映射 T 是給定如下:

$$T(g)(x) = \int_{x_0}^{x} f(s, g(s))ds + y_0, \ x \in [0,1]。$$

所以, 函數 $T(g)(x)$ 具有性質:

(1) $T(g)(x_0) = y_0$。

(2) $\|T(g_1)(x) - T(g_2)(x)\| \le \alpha \|g_1 - g_2\|$

在適當條件下, 常數 α 是個小於 1 的正數, 這兒 $\| \ \|$ 代表 sup norm。所以 $T: X \to X$ 是一個收縮映射。因此, 根據收縮映射原理, 映射 T 有一固定點 (函數), $y^* \in X$ 使得 $T(y^*) = y^*$, 也就是

(3) $T(y^*)(x) = \int_0^{*} f(s, y^*(s))ds + y_0 = y^*(x)$

微積分基本定理告訴我們, 式子 (3) 可以得出

(4) $\dfrac{dy^*}{dx} = f(x)$。

所以 y^* 就是解函數了, 更重要的是, 收縮映射原理也告訴我們, 如果我們從任意一個函數 g 出發 $T^k(g)$ 就以指數的速度趨近解函數 y^*, 所以利用電腦程式來計算, 我們可以計算出 $T^k(g)(a)$ 並估算出 $T^k(g)(a)$ 與 $y^*(a)$ 的可能誤差了。有了這些就能用以了解相關微分方程 $(*)$ 的實際問題了。

第五節　矩陣的計算及特徵向量

在前兩節裡, 大家已大致了解到固定點理論的兩個主要內涵: 好的空間本身決定固定點的存在及好的映射也可決定是否有固定點。並且也明白了很多問題, 即使外在的形式或表達的方式很不同, 可是其數學的本質卻可能是一致的。在這一節裡, 我們也利用固定點的觀念來說明一些矩陣的計算。

在數學各種理論中, 微積分與矩陣理論可說是當代應用最廣的兩門學問, 相信各位讀者對它們都不陌生。其中關於矩陣的應用, 最常遇到的情況就是計算一個方形矩陣 A 的冪矩陣 A^k , 也就是第二節所談到的問題 (d)。

首先我們舉一個較實際的問題來說明爲什麼需要計算冪矩陣 A^k, 譬如, 我們想了解台灣地區未來幾年人口可能分布百分比的情況。爲了方便起見, 我們假設現在 (1995年) 大台北地區 (新竹以北) 的人口占台灣總人口數約 35%, 想要了解十年後該地區的人口是總人口的百分之幾? 大家都知道大台北地區交通及居住環境已相當飽和, 品質也很差, 所以越來越多人願意搬到大台北以外的地區生活。爲使討論簡易起見, 我們不妨假說:

(A1) 每年約有 2% 住在大台地區的人搬離該地區。

(A2) 每年約有 1% 住在大台北地區以外的人搬進大台北地區。

(A3) 出生率與死亡率對人口分佈的百分比影響微乎其微。

根據這些假設, 將此問題數學化後, 我們將得到以下的數學問題:

(1) x_n 代表 n 年後大台北地區的人口百分比。

(2) $A = \begin{pmatrix} 0.98 & 0.01 \\ 0.02 & 0.99 \end{pmatrix}$ 的變換矩陣。

(3) $\begin{pmatrix} x_n \\ 1-x_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 0.35 \\ 0.65 \end{pmatrix}$.

所以要知道 n 年後大台北地區的人口百分比 x_n, 就相當於計算變換矩陣 A 的冪次方 A^k。

關於冪矩陣 A^k 的計算, 大致分爲兩種情況, 由 k 值的大小來決定, 譬如: $k = 2, 3$ 甚至 10 以內, 利用矩陣的乘法直接計算 A^2 和 A^3 等等比較省時也較方便, 但當 k 值很大時 (相對於矩陣的維度 n 而言), 那麼就必須考量新的處理方法, 常用的方式是將矩陣三角化, 甚至能夠的話就對角化, 也就是說找一個可逆的矩陣 B 使得$B^{-1}AB$ 變成三角矩陣或對角矩陣。

矩陣的找法必須用到特徵向量 (Eigenvector) 的觀念即找非零向量 v, 使得 $Av = \lambda v$。換句話說, 就是要找出各個在變換 A 之下不動的方向 v, 即 Av 和 v 同方向。如果 A 可以對角化的話, 那麼矩陣 B 的各個行向量就是互爲線性獨立的特徵向量 (不變的方向) 了, 這就是固定點的觀點在矩陣理論中最重要且基本的應用。

現在我們試著找出上面例子中矩陣 A 的特徵向量: 從 $Av = \lambda v$, 我們知道合成矩陣 $(A - \lambda I)$ 將向量 v 映射到零向量, 所以 $A - \lambda I$ 的行列式就等於零, 利用這概念, 我們可以從 $\det(A - \lambda I) = 0$, 推出 $\lambda^2 - 1.97\lambda + 0.97 = 0$, 解得 $\lambda = 1$ 或 0.97。由此, 不難得到兩個根所對應的特徵向量。

(4) 當 $\lambda = 1$ 時, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$,

(5) 當 $\lambda = 0.97$ 時, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

所以 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ 且 $A = B \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.97 \end{pmatrix} B^{-1}$。由此得到

$$\begin{pmatrix} x_n \\ 1-x_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (0.97)^n \end{pmatrix} B^{-1} \begin{pmatrix} 0.35 \\ 0.65 \end{pmatrix}.$$

代入 $n = 10$, 解得 $x_{10} = \frac{1}{3}(1 + (0.97)^{10}(0.05))$, 這大約是 34.6%。所以在 (A1)、(A2) 及 (A3) 大致成立之下, 十年後大台北地區的人口約佔台灣總人口的 34.6%, 比現在的百分比 35%, 稍爲下降一點點, 所以十年後, 除非政策上有重大的改變, 否則大台北地區的人口擁擠程度並不會有太

大的改善。各位讀者實在應該認眞考慮是否搬到中南部求發展。

第六節 結語

在本文中, 我們簡單地介紹了數學應用的流程, 並利用固定點的觀點來探討很多不同形態的數學問題。最後想再一次提醒各位讀者, 利用數學處理各種實際問題時, 必須根據各領域的有關學說、理論、事實甚至“假設” 來建立數學模型及問題, 在這過程中, 可能本身就無法掌握所有可能的相關因素, 所以數學解答也不必然是實際問題的解答, 因爲, 第一, 我們的假設不一定永遠成立, 第二, 即使所有假設都成立並且數學問題求解的過程也沒有錯誤, 但可能問題出在各相關學說或理論所建立的模型與實際狀況有所差距。雖然有這兩個可能的缺失, 利用數學來處理各種問題的重要性仍然不可小覷, 例如: 選舉前的民意調查等等。有了這些了解, 相信各位讀者以後聽到專家學者的話時, 大可不必全然接受, 反倒要了解他們的模型、理論及假設後, 再做獨立思考和判斷。這正是大家所熟知的「盡信書, 不如無書」的道理了, 這個觀點也是本文所要表達的主要觀念之一。

附記: 非常感謝中正大學數學系助理馬雪珠小姐的繕打及校對。

—本文作者任教於國立中正大學數學系—