守恆律方程組簡介(II) —— 熵條件

陳宜良

一. 簡介

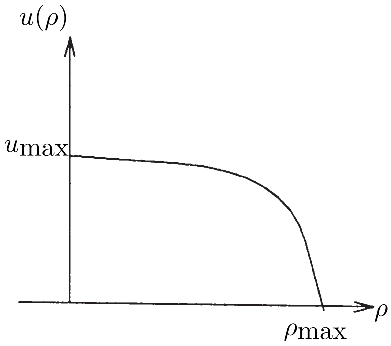
在前一講 (數學傳播第17卷第一期, 民國82年3月) 我們介紹了守恆律方程的來源, 並以車流問題爲例說明震波 (shock wave) 現象是此類方程的本質。在這一講中, 我們將要闡述震波理論另一個重要觀念–熵條件, 它與守恆律方程解的唯一性以及熱力學第二定律相關。我們將簡單地介紹熵條件的來源和它的一些推論。

二.熵條件的起源 — 不唯一性的困惑

首先我們注意的是守恆律方程組的光滑解是唯一的。這一點很容易由特徵線方法證得。但若考慮有不連續解 (弱解) 時, 則解不唯一。我們以車流問題爲例說明這個不唯一性的困惑。由前講中, 我們回憶車流問題之守恆律方程模型爲

$$\rho_t + f(\rho)_x = 0 \tag{1}$$

其中 ρ 爲車流密度, $f(\rho)$ 爲車流通量, $f(\rho) = \rho \cdot u(\rho)$, u 爲車速, $u(\rho)$ 的經驗方程如圖一。

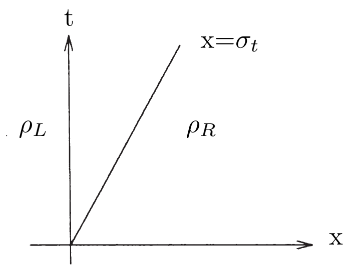


圖一

我們考慮下列黎曼初始條件:

$$\rho(x,0) = \begin{cases} \rho_L & x < 0 \\ \rho_R & x > 0. \end{cases} \tag{2}$$

由跳躍條件 [1]知, 不論 ρ_L, ρ_R 爲何時, 震波解 (如圖二)



圖二

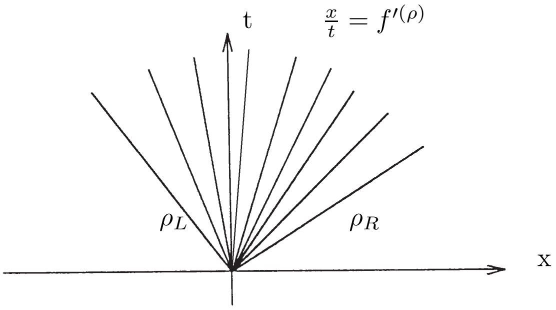
$$\rho(x,t)=\begin{cases}\rho_L & x<\sigma t\\ \rho_R & x>\sigma t,\end{cases} \tag{3}$$

永遠爲一弱解, 其中

$$\sigma=\frac{f(\rho_R)-f(\rho_L)}{\rho_R-\rho_L}$$

爲震波波速。當 $\rho_L<\rho_R$ 時, 這個震波解反映的是塞車現象。但當 $\rho_L>\rho_R$ 時, 這個震波解卻不是物理解, 因爲由直觀上, 我們知道前面車陣較後面稀疏時 (即 $\rho_L>\rho_R$) 是不會塞車的。這時, 眞正的物理解是稀疏波解 (rarefaction wave)(見圖三):

$$\rho(x,t)=\begin{cases}\rho_L & x<f'(\rho_L)\,t\\ \rho_R & x>f'(\rho_R)\,t\\ \rho & f'(\rho_L)\le \frac{x}{t}\le f'(\rho_R),\\ & \quad f'(\rho)=\frac{x}{t}.\end{cases}$$



圖三

它反映的是車陣由密漸疏的現象。前述討論說明了在 $\rho_L>\rho_R$ 時, 黎曼問題 (1)(2) 有兩組弱解: 一個是稀疏波解, 一個是震波解。事實上, 讀者很容易造出無窮多組弱解。這個不唯一性是守恆律方程的缺陷。因此, 我們須對震波解附加條件以篩選出具物理意義之解。比方說, 在車流問題中, 在震波 (ρ_L,ρ_R) 上, 我們可附加 $\rho_L<\rho_R$ 的條件, 也就是說, 只有在前方密度較後方高時才能有震波解。用這個外加條件我們可以解決前述的不唯一性困惑。這個條件是不內含在守恆律方程的, 我們稱之爲熵條件。在空氣動力學裡, 對應的熵條件爲: “氣體穿過震波時其熵要增加”, 更具體地說, 對前進震波而言, 氣體是由右方穿過震波, 因此其熵條件可寫爲 $S_L>S_R$, 其中 S 爲氣體的熵。對後退震波而言, 則對應之熵條件爲 $S_L<S_R$ 。

3. 一般的熵條件

前節所談的是熵條件的兩個特例。在震波理論中, 我們希望找到一個可適用於一般守恆律方程的熵條件。爲找尋此一條件, 我們先檢討爲何守恆律方程會有不唯一性的缺陷。我們以空氣動力學爲例, 較完整的數學模型是 Navier-Stokes 方程 ([2])

$$\begin{aligned}&\rho_t+(\rho u)_x=0\\&(\rho u)_t+(\rho u^2+p)_x=(\mu u_x)_x\\&E_t+((E+p)u)_x=(\mu u u_x+\kappa T_x)_x\end{aligned}$$

這裡, μ 爲黏性係數, κ 爲熱傳係數。方程右邊的項通常稱作黏性項。在常見的應用問題裡, μ,κ 之值均在 10^{-6} 左右, 因此在光滑解時, 黏性項可忽略。但在出現震波時, u_{xx},T_{xx} 變化均大, 此時黏性項則不能忽略, 它刻劃了氣體在穿過震波時, 如何因摩擦與熱傳而造成熵的增加。因此, 對空氣動力學而言, 熵條件背後的機制是黏性項, 是熱力學第二定律。

爲了將黏性項與熵條件的關係說明更清楚以及找一般方程的熵條件, 我們考慮有黏項的守恆律方程。我們仍以車流問題爲例, 爲了加入黏性項的考慮, 首先我們將模型中之 $u(p)$ 修改爲

$$u(\rho) \leftarrow u(\rho) - \varepsilon\frac{\rho_x}{\rho}, \quad \varepsilon > 0,$$

其中 $-\rho_x/\rho$ 的物理意義爲車陣隨 x 變化之膨脹率。因此 $-\varepsilon\rho_x/\rho$ 表示當車陣膨脹時 (即稀疏), 車速會稍微加快。反之, 則車速稍減。經修正後之模型爲

$$\rho_t + f(\rho)_x = \varepsilon\rho_{xx}, \qquad (3)$$

其中 $\varepsilon\rho_{xx}$ 即爲黏性項。我們想研究黏項在震波附近含有何種不屬於原守恆方程的訊息。爲此, 我們考慮 (3) 的行波解: 即 $\rho^\varepsilon(x,t) = \rho(\frac{x-\sigma t}{\varepsilon})$, 其中 $\rho(-\infty) = \rho_L$, $\rho(+\infty) = \rho_R$, (ρ_L,ρ_R) 爲一震波, 而 $\sigma = \sigma(\rho_L,\rho_R) \equiv (f(\rho_R) - f(\rho_L))/(\rho_R - \rho_L)$ 爲其波速。當 $\varepsilon \to 0$ 時, $\rho^\varepsilon \to (\rho_L,\rho_R)$ 。我們將 ρ^ε 代入 (3) 得

$$\rho'' = (f(\rho) - \sigma\rho)'。$$

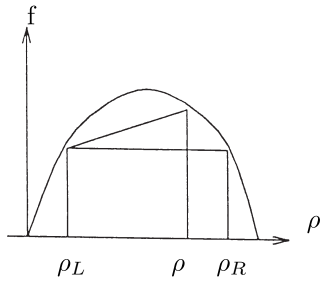
將此式積分一次, 並用 $\rho(-\infty) = \rho_L$ 得

$$\begin{aligned} \rho' &= f(\rho) - f(\rho_L) - \sigma(\rho - \rho_L) \\ &= F(\rho)。 \end{aligned} \qquad (4)$$

由跳躍條件可得 $F(\rho_L) = F(\rho_R) = 0$ 。讀者不難證得:(4) 有一解滿足 $\rho(-\infty) = \rho_L$, $\rho(+\infty) = \rho_R$ 的充分必要條件爲

$$\sigma(\rho_L,\rho) > \sigma(\rho_L,\rho_R) \quad \forall\rho \text{ 介於 } \rho_L,\rho_R \text{ 間} \qquad (E)$$

其幾何意義爲 f 在 ρ_L,ρ_R 上的割線斜率要小於 f 在 ρ_L,ρ 之割線斜率, $\forall\rho$ 介於 ρ_L,ρ_R 之間 (如圖四)。

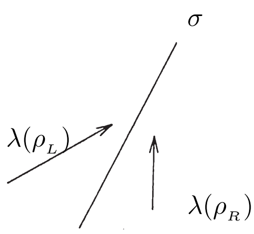


圖四

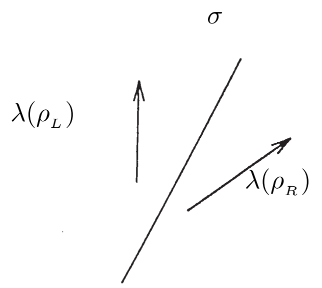
這是一個內含在黏性方程但卻不屬於原守恆律方程的性質, 這便是一個具一般性的熵條件, 是蘇俄女數學家 Oleinik 在50年代所提出的。Lax 對此條件有另一深入的看法, 他觀察震波速度與其左右兩邊特徵線速度的關係而提出下列熵條件

$$\lambda(\rho_L) > \sigma > \lambda(\rho_R), \qquad (L)$$

其中 $\lambda(\rho) = f'(\rho)$ 爲特徵速度。這個條件稱作 Lax 熵條件, 當 $f'' \neq 0$ 時, (L) 與 (E) 是等價的。(L) 的意義是特徵線僅允許穿入震波 (如圖五)



圖五



圖六

而不能由震波射出 (如圖六)。這個性質可推出所有特徵線均可回溯至初始時刻。由於特徵線是消息傳播的路徑, 因此在任何 $t>0$ 時刻之 ρ 的行為均可由 ρ 的初始值決定。這個性質稱作因果律 (Causality), 是熵條件的一個重要推論。

4. 由熵條件所得出之推論

下面一個定理是由熵條件所導出的另一重要定理。

定理一: ([3]) 考慮單守恆方程式

$$u_t+f(u)_x=0 \tag{5}$$

若 u, v 為滿足 (5) 與 (E) 的弱解, 則 u, v 滿足

$$\frac{d}{dt}\int |u(x,t)-v(x,t)|dx \le 0。$$

定理一的一個直接推論是下列唯一性定理。定理一的證明可直接用 (5) 與 (E) 證得。

定理二: (唯一性定理) 滿足守恆律方程 (5) 與熵條件之弱解可由其初始值唯一決定。

看到這裡, 讀者或許有一個疑問: 既然守恆律方程有缺陷, 何不就用含黏性項的守恆律方程呢? 如氣體方程中就用 Navier-Stokes 方程, 而不用 Euler 方程。回答此問題是, 除在邊界層與震波附近的極小的區域外, 附加熵條件的守恆律方程仍是相當精確的模型, 其解已經可以反映出主要的現象。而目前來說, 守恆律方程也確定較黏性方程來得容易解。

最後解的漸近行為也由熵條件推導出, 這方面結果容待第三講說明。

參考資料

1. 陳宜良, 守恆律方程組簡介, 數學傳播季刊第17卷第1期, 民國82年3月。
2. Courant and Friedrichs, Supersonic Flow and Shock Waves, Springer-Verlag, 1948。
3. Quinn, R, Solutions with Shocks: an example of an Li-contrction semi-group, Comm. Pure Appl. Math. 24 (1971) 125-132.

—本文作者任教於台灣大學數學系—