

機械振動的一些現象和數學問題

陳 鞏

一. 簡介：常微分方程的振動系統

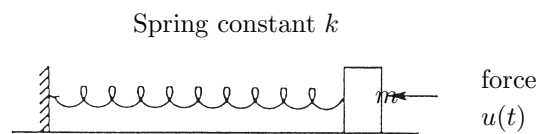
機械振動是我們日常生活中經常體驗到的一種運動。譬如說，我們看到樹葉在和風吹拂下，來回地搖曳。我們搭汽車通過崎嶇的路面時，可感到自己隨著車身上下擺動。我們沈醉於優美的小提琴的演奏曲中，它是由琴弦振動所發出的音波。像這些林林種種的例子，實在太多了。我們可以總結一句話：在巨觀 (macroscopically) 的世界裡，任何具有彈性及質量的物體，都會作機械振動。事實上，在微觀 (microscopically) 的世界裡，次原子的質點也具有量子力學的波動性質，這些性質基本上算是振動運動。因此自然界裡的物理系統與工程機械一樣，都會振動。在本文裡，作者想從振動力學數學模型的一些方程式及它們的解，來說明一些機械振動的現象，以增加讀者在學習工程及物理上，對這一方面的瞭解。

學習數學的人喜歡嚴格性。因此我們首先想到的問題，就是什麼是所謂的「機械振動」。要給它一個嚴格的定義並不容易。不過我們可以籠統的說，機械運動是具有某種週

期性，類似於波動，並牽涉到能量傳遞的運動。自從十六世紀的啓蒙時代開始，科學家及數學家就開始對振動運動有了興趣。在這一方面，最早有所建樹的是英國大科學家虎克 (R. Hooke, 1635–1703)。他是有名的虎克定律 (發明於 1660 年) 的發明人，比牛頓 (1643–1727) 出生略早；在科學上也貢獻卓著。虎克在研究彈簧的振動時，寫下了有名的簡諧運動方程式

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = u(t), \quad t > 0. \quad (1)$$

這裡 m 表示彈簧所懸的質量， k 為彈簧的彈性係數， $x(t)$ 為彈簧在 t 時的位移， $\ddot{x}(t)$ 為 $x(t)$ 的二階時間導數，也就是加速度； $u(t)$ 為外力。請見圖一。



圖一. 簡諧運動

方程式 (1) 是一種基本的常微分方程。當外無力， $u(t)$ 恆為零時，它的解可寫出如下：

$$x(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t, \\ \omega_0 = \sqrt{k/m}, \quad C_1, C_2 \text{ 為常數} \quad (2)$$

這個結果非常漂亮。它顯示出簡諧運動是週期性的，其週期為 $2\pi/\omega_0$ 。但是後來的人逐漸發現有點問題。因為 (2) 告訴我們，振動運動產生後，它就會永無休止的繼續振動下去。你曾經親眼見過一個彈簧永遠振動不停嗎？不可能！也就是說，(2) 與我們的實際觀察不合。當然，這個問題還是出在 (1)，因為虎克所取的數學模型太簡單了，以致有些要緊的物理因素沒有考慮到；其中之一就是摩擦力，造成能量耗損。因此，讓我們在方程式 (1) 中，加入 $u(t) = -2\gamma\dot{x}(t)$ ，意即摩擦力與速度成正比，但方向相反。這項一般稱為阻泥。從而得到

$$m\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + kx(t) = 0, \quad t > 0. \quad (3)$$

方程式 (3) 的解為

$$x(t) = e^{-\gamma t}(C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t), \quad t > 0, \quad (4)$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m} - \gamma^2}, \quad \gamma > 0, \quad \gamma^2 < \frac{k}{m}.$$

上式告訴我們當時間 t 增大時，位移依指數衰減至零。因此 (4) 式的解就合乎實際得多了。然而微分方程 (3) 所代表的數學模型，仍有一個缺點，即它尚未考慮到其它外力作用。在很多實際的情況下，外力的作用是週期性的。因此我們把方程式 (3) 再改進為

$$m\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + kx(t) = F \cos(\omega t + \phi). \quad (5)$$

這方程式的通解為

$$x(t) = e^{-\gamma t}(C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t)$$

$$+ \frac{F}{m\sqrt{(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \cos(\omega t + \phi - \delta) \quad (6)$$

當時間增加時， $e^{-\gamma t}(C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t)$ 項很快即衰減至零，故只剩下 $F \cos(\omega t + \phi - \delta) / [m\sqrt{(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}]$ 。這項除了相差 δ 以外，頻率 ω 並沒有改變，但振幅卻變了。我們定出

振幅放大率

$$= \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right)^2 + 4\left(\frac{\gamma}{\omega_1}\right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 \right]^{-1/2} \quad (7)$$

它具有這樣的特性：若是系統中沒有阻泥，即 $\gamma = 0$ ，且外力的頻率 ω 與系統的頻率 ω_1 一致的話，則放大率為無限大。因此就算一開始系統的振幅很小，經過這週期性外力作用後，振幅會趨於無限大。這就是所謂的共振現象。它在振動力學的理論及應用上，佔了極重要的地位。

一般而言，除非在理想的狀況下，阻泥系數 γ 是不會等於零的。不過，只要 γ 相當小，而且外力頻率 ω 也相當接近系統的自然頻率 ω_1 的話，那麼放大率是相當可觀的。這種性質也給我們在工業上很好的應用。譬如說，在電子學裡的 $R-L-C$ 電路，它滿足的振盪方程式

$$\frac{1}{C}\ddot{I}(t) + R\dot{I}(t) + LI(t) = I_0 \cos(\omega t - \delta), \quad (8)$$

$I(t)$ = 電路在時間 t 的電流

基本上就跟方程式 (5) 類似。要是 (8) 式右邊表示著的是透過天線感應線圈所接收的無

線電波信號的微小感應電流，那麼這個 $R - L - C$ 電路就可把無線電波信號放大，再透過麥克風，到可聽的地步。這就是收音機了。

以上的方程式 (5) 與 (8)，右邊稱為輸入，而方程式的解為輸出。這輸入與輸出之間的關係是線性的，譬如說，輸入增加三倍，則輸出也必會增加三倍。但是很多振動現象不是線性的。一個很簡單的例子，就是單擺運動，其方程式為

$$m\ell^2\ddot{\theta} + mg\ell \sin \theta = 0, \quad (9)$$

$\ell =$ 擺長， $m =$ 擺錘質量， $g =$ 重力加速度， $\theta =$ 單擺與垂直線的夾角。這裡 $mg\ell \sin \theta$ 是一非線性項，因此對方程式 (8) 那樣的線性方程式的解法與理論就不適用於 (9)。一般非線性振動的二階常微分程式可寫為

$$m\ddot{x}(t) + \phi(\dot{x}(t)) + f(x(t)) = F \cos(\omega t + \psi) \quad (10)$$

的形式。此處的 f 或 ϕ (二者至少有一) 是非線性的函數。一個很有名的例子，是 van der Pol 的方程式，它是在廿世紀初葉，由荷蘭科學家 van der Pol 在研究加有柵極真空管的控制電路上，所提出的一個數學模型：

$$m\ddot{x}(t) + [-\alpha\dot{x}(t) + \beta\dot{x}(t)^3] + kx(t) = 0, \quad (11)$$

$$t > 0, m, \alpha, \beta, k > 0.$$

(在 (11) 式中，我們假設右端項，即輸入信號，為零。) 對 (11) 式所代表的振動系統而言，它在時間 t 的能量為

$$E(t) = \frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2 + \frac{1}{2}kx(t)^2. \quad (12)$$

因此它對時間 t 的變化率為

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(t) &= [m\ddot{x}(t) + kx(t)] \dot{x}(t) \\ &= [\alpha\dot{x}(t) - \beta\dot{x}(t)^3] \dot{x}(t) \\ &= \alpha\dot{x}(t)^2 - \beta\dot{x}(t)^4. \end{aligned} \quad (13)$$

這個結果告訴我們

$$\frac{d}{dt}E(t) \begin{cases} \leq 0, & |\dot{x}(t)| \geq \sqrt{\alpha/\beta}, \\ \geq 0, & |\dot{x}(t)| \leq \sqrt{\alpha/\beta}. \end{cases} \quad \text{如果} \quad (14)$$

這個特性，告訴我們 $|\dot{x}(t)|$ 不能增得太大，因為它太大了，就會使 $E(t)$ 減小，也就會使 $|\dot{x}(t)|$ 減小。反之， $|\dot{x}(t)|$ 也不能太小，因為這樣會使能量 $E(t)$ 增大。這種自動調節的功能，在所謂伺服機械(servomechanism) 或自動控制系統的設計上，非常有用。譬如說，我們可以利用這個性質，用來作電子電路的保護設計，使電路上的電流，不超過荷載範圍，以免電路有燒毀之虞。(13) 及 (14) 所具有的特性，數學家稱為「自發振盪」(self-excited oscillation)，意味著這種振盪系統能夠自我維持，在一定的振幅內，振盪不息。廿世紀的大數學家龐卡瑞 (Henri Poincaré) 證明了 van der Pol 方程式 (11) 的解，一定趨近於週期函數。最近二十年來，在所謂動力系統 (Dynamical Systems) 的研究上，我們對 (11) 又有嶄新的瞭解；即在 (11) 式右邊加入輸入項後：

$$\begin{aligned} m\ddot{x}(t) + [-\alpha\dot{x}(t) + \beta\dot{x}(t)^3] + kx(t) \\ = F \cos(\omega t + \delta), \end{aligned} \quad (15)$$

如果 F 及 ω 取值在某些範圍內，則 (15) 式之解會具有混沌(chaos) 現象。這在目前算是時髦的研究課題之一。

二. 偏微分方程的振動系統

上節所提到的常微分方程的振動數學模型，在研究連續體力學 (continuum mechanics) 裡的振動現象，是不夠用的。這時，要用偏微分方程式才可把振動過程用數學描述出來。我們先來看一個簡單的振動弦方程式的例子。(這個方程式也稱為波動方程，是應用數學中最基本的方程式之一。)

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0, \quad (16)$$

$$t > 0, \quad 0 < x < L,$$

$u(x,t)$ = 在位置 x ，時間 t ，弦的垂直位移，

$$u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, \quad (17)$$

L = 弦長。

在 (17) 中的兩個關係，稱為邊界條件。它的物理意義為弦的兩端點是固定的。我們試試找找看方程式 (16)、(17) 的解，用 $u(x,t) = \psi(t)\phi(x)$ (所謂分離變元法) 代入 (16)，得到

$$-\frac{\phi''(x)}{\phi(x)} = -\frac{\psi''(t)}{\psi(t)}. \quad (18)$$

因 x 與 t 兩變元互相獨立，上式要成立的話，若且唯若左右都等於某常數 ω^2 ，故得

$$\begin{cases} \phi''(x) + \omega^2 \phi(x) = 0, & 0 < x < L, \\ \phi(0) = \phi(L) = 0. \end{cases} \quad (19)$$

方程式 (18) 只有在 $\omega^2 = n^2 \pi^2$ 時，有非平凡解：

$$\phi(x) = c \sin(n\pi x/L),$$

$$c \neq 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

這樣子的解，稱為方程式 (18) 或 (16) 的特徵函數(eigenfunctions)。由 (18) 也可看出來， $\psi(t)$ 的解為

$$\psi(t) = d_1 e^{in\pi t} + d_2 e^{-in\pi t},$$

故

$$u(x,t) = c \sin(n\pi x/L) \times [d_1 e^{in\pi t} + d_2 e^{-in\pi t}] \quad (20)$$

為 (16) 的解。這樣的解是具有單一 (特徵) 頻率的，即 $n\pi$ 。把全部這的解加起來，我們即得到一個方程式 (16) 及 (17) 的通解

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (d_{1n} e^{in\pi t} + d_{2n} e^{-in\pi t}) \sin \frac{n\pi x}{L}$$

這就是一個富里哀級數。

特徵函數的物理意義與共振現象有關。這怎麼講呢？我們從兩種角度來看。

第一個：對於波動方程(16)而言，不管邊界條件如何，只要滿足波動方程的函數就稱為波動函數。譬如 $e^{ik(t-x)}$ 與 $e^{ik(t+x)}$ 就是。 $e^{ik(t-x)}$ 是一個向右傳遞的波，而 $e^{ik(t+x)}$ 是一個向左傳遞的波。我們可以把 (16) 的解寫為 $u(x,t) = c_1 e^{ik(t-x)} + c_2 e^{ik(t+x)}$ 。但因弦本身的長度有限，所以這兩個向右及向左傳播的波會碰到邊界而反射。我們利用 (17) 的邊界條件得

$$c_1 e^{ik(t-x)} + c_2 e^{ik(t+x)} = 0,$$

當 $x = 0$ 及 $x = L$ 成立。故

$$\begin{cases} c_1 e^{ikt} + c_2 e^{ikt} = 0, \\ c_1 e^{ik(t-L)} + c_2 e^{ik(t+L)} = 0. \end{cases}$$

從而得

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0, \\ c_1 + c_2 e^{i2kL} = 0, \end{cases} \quad (21)$$

以致

$$e^{i2kL} = 1, \quad \text{即 } kL = n\pi, \\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (22)$$

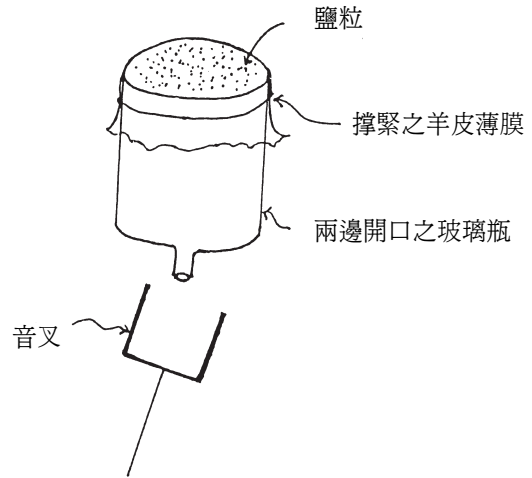
大家可以看出來，(21) 與 (22) 可以推到 (20)。這告訴我們說，特徵函數所具有的頻率，恰能使波從 $x = 0$ 至 $x = L$ 傳遞再反射回 $x = 0$ 後，相位角不變。故波動得以來回傳遞，而不因相位差重疊而消滅。這與第一節中所討論的共振現象基本上類似。

第二個角度：我們以小提琴為例。要是小提琴只有弦而沒有音箱的話，那麼撥弦所彈奏的曲子，聲音是非常弱的。但是附上了音箱，樂曲的聲音就清晰悅耳可聞了。可見音箱有放大音量的效果，這就是共振現象。

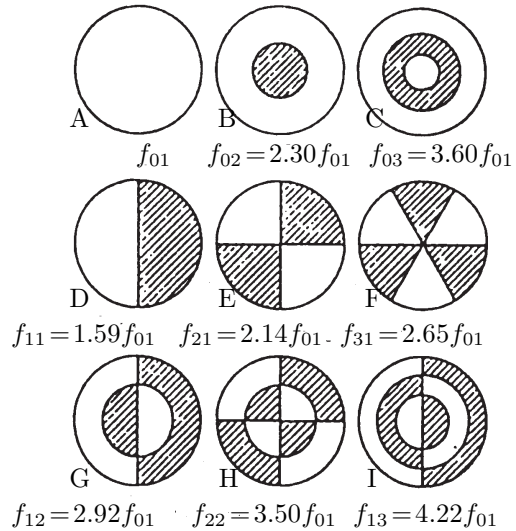
從這裡看來，小提琴音箱的製造，就是一門相當大的學問了。不論從材料或形狀上，都必須講究，使它能夠發出它特有的音色。因此你聽小提琴演奏時，可以知道彈的不是胡琴。所謂音色，就是音箱對不同頻率的音波，有不同的放大率，然後產生的和音效果。目前小提琴音箱的形狀，是音匠們幾百年來憑其經驗不斷改革演進而成。

到了十九世紀，聲學也隨著其它物理科學，有了長足的進展。德國的大數學物理學

家 H. Helmholtz 在 1885 年，出版了在聲學方面的首本鉅著，書名是「論音感」(On the Sensations of Tone)。它裡面有提到一個鑑定音波頻率的古老辦法：用一張薄膜罩在一個去底的瓶子上，周圍用線綁緊（見圖二）。在薄膜上灑鹽，然後用不同頻率的音叉在瓶口附近敲，使音波傳入瓶內。



圖二. 音叉實驗



圖三. Helmholtz 在他書中所畫的節線形狀 (其排列順序應以最低頻率倍數為準，即 A,D,E,B,F,G,H,C,I)

如此，我們會發現在某個特定頻率下，薄膜上的鹽粒會全部被震下來。這就是最低的特徵頻率。若頻率繼續加高，則鹽粒又不為所動。但高到某一程度，鹽粒又被震了下來，但不是全部，沒震下的形成一條直線，稱為節線。這時的頻率就是次低的特徵頻率。重複這個實驗，讓頻率不斷上升，我們就會得到不同形狀的節線及共振頻率，見圖三。

從這個實驗，我們得知共振現象並不是對任何頻率都會發生，它只會發生在某些特殊的頻率，這些特殊的頻率就跟特徵值 (eigenvalue) 和特徵函數 (eigenfunction) 有關，在數學上稱為特徵值問題 (eigenvalue problem)，就是我們下一節的主題。

我們在本節提到的 (空間) 一維波動方程 (16)，在高維度的空間裡，它可推廣為 N 維空間的波動方程

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \Delta u(x, t) = 0, \quad (23)$$

這裡 $x = (x_1, \dots, x_n)$ 是 N 維空間的位置向量，而 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_N^2}$ 是 N 維空間的拉普拉斯算子 (Laplacian)。我們再提幾個常見的機械振動中的偏微分方程：

(結構力學中的振動樑方程式)

$$\rho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (L = \text{樑長}) \quad (24)$$

(量子力學中的薛汀格方程式)

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - i\hbar \Delta u(x, t) = 0, \quad x = (x_1, \dots, x_n). \quad (25)$$

(電磁學中的馬克斯威爾方程式)

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{E}(x, t)}{\partial t} - \nabla \times \vec{H}(x, t) = 0, \\ \frac{\partial \vec{H}(x, t)}{\partial t} + \nabla \times \vec{E}(x, t) = 0, \end{cases} \quad (26)$$

$x = (x_1, x_2, x_3)$ 。

(結構力學中的薄板方程式)

$$\rho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + D \Delta^2 u(x, t) = 0,$$

$$x = (x_1, x_2), \quad \Delta^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right)^2. \quad (27)$$

(結構力學中的圓柱形薄殼方程式)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x, s, t)}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v(x, s, t)}{\partial x \partial s} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u(x, s, t)}{\partial s^2} + \frac{\nu}{a} \frac{\partial w(x, s, t)}{\partial x} = 0, \\ \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u(x, s, t)}{\partial x \partial s} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v(x, s, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x, s, t)}{\partial s^2} + \frac{1}{a} \frac{\partial w(x, s, t)}{\partial x} = 0, \\ \frac{h^2}{12} \Delta^2 w(x, s, t) + \frac{1}{a} \left[\frac{1}{a} w(x, s, t) + \frac{\partial v(x, s, t)}{\partial s} + \nu \frac{\partial u(x, s, t)}{\partial x} \right] + \frac{1-\nu^2}{Eh} m \frac{\partial^2 w(x, s, t)}{\partial t^2} = 0. \end{cases} \quad (28)$$

(固體力學振動方程式)

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \nabla (\nabla \cdot \vec{u}(x, t)) \\ - \mu \nabla \times \nabla \times \vec{u}(x, t) \\ - \rho \frac{\partial^2 \vec{u}(x, t)}{\partial t^2} = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

方程式 (26) 可看作是 (24) 在二維空間的推廣；順便一提。當然，以上所提的僅算是很少數的例子。譬如說，光是殼的方程式，就還有球形薄殼、錐形薄殼，和圓柱形 (非薄) 殼等。其它像地震波傳遞的方程式等等，相當複雜，我們無法在此一一敘述。

三. 特徵值問題

我們來看看高維空間的波動方程 (23), 在二維 ($N = 2$) 的情況下, 它是一個振動薄膜的數學模形, 就是圖二音叉實驗的例子。我們現在將時、空二變元分開: $u(x, t) = e^{i\omega t}\phi(x)$ 代入 (23) 中, 得到 (所謂 Helmholtz 方程)

$$\Delta\phi(x) + \omega^2\phi(x) = 0, \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega, \quad (30)$$

此處 Ω 代表薄膜靜止時所佔區域。因薄膜邊緣定位, 故邊界條件為

$$\phi(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad \partial\Omega \text{ 為 } \Omega \text{ 的邊界。} \quad (31)$$

這樣 (30) 及 (31) 便成爲一個特徵值問題: 把所有的 ω 值找出, 使 (30) 及 (31) 具有非零解 $\phi(x)$; $\lambda = \omega^2$ 稱爲是特徵值, $\phi(x)$ 是特徵函數, 而 ω 爲特徵頻率。

另一方面, 我們看 (25), 若將分離變元寫爲 $u(x, t) = e^{-i\omega t}\phi(x)$ 代入, 則得

$$\Delta\phi(x) + \hbar\omega\phi(x) = 0. \quad (32)$$

故 (32) 與 (31) 基本類似。因此薛丁格方程式的特徵函數應與波動方程者完全相同, 也即是說它們顯出有「波動」的特性。事實上, 這是誘導薛丁格當年以方程式 (25) 來建立量子力學的數學基礎的主因之一, 因爲他從 de Broglie 的物質波實驗, 獲知物質具有波動性之故。在 (32) 中的特徵值 $\hbar\omega$, 稱爲是

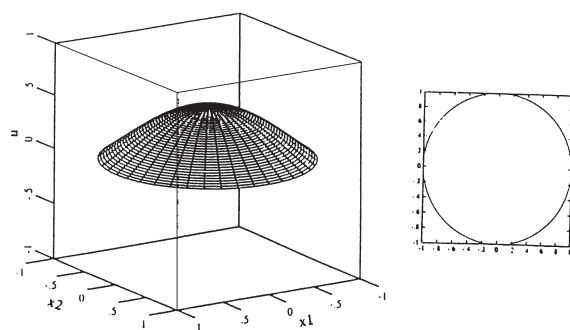
電子的能階, 而特徵函數 $\phi(x)$ 則對應於電子的分佈狀態。

當 Ω 爲單位 (即半徑爲 1) 圓盤時, 我們可以用極坐標把 (30), (31) 的解決定。它們由低頻往高排, 順序排列如表一所示:

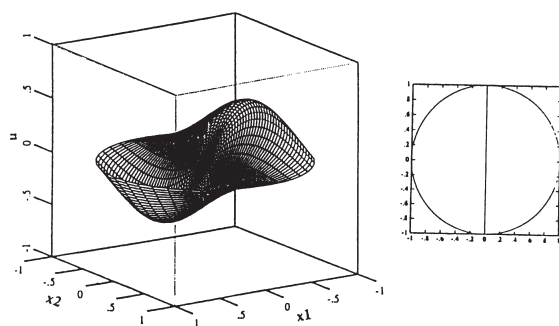
特 徵 函 數	多重性
$J_0(2.4048r)$	1
$J_1(3.8317r)e^{\pm i\theta}$	2
$J_2(5.1356r)e^{\pm i2\theta}$	2
$J_0(5.5201r)$	1
$J_3(6.3802r)e^{\pm i3\theta}$	2
$J_1(7.0156r)e^{\pm i\theta}$	2
$J_4(7.5883r)e^{\pm i4\theta}$	2
$J_2(8.4172r)e^{\pm i2\theta}$	2
$J_0(8.6537r)$	1
$J_5(8.7715r)e^{\pm i5\theta}$	2

表一. 單位圓盤上 Δ 的特徵函數 (邊界條件爲零)

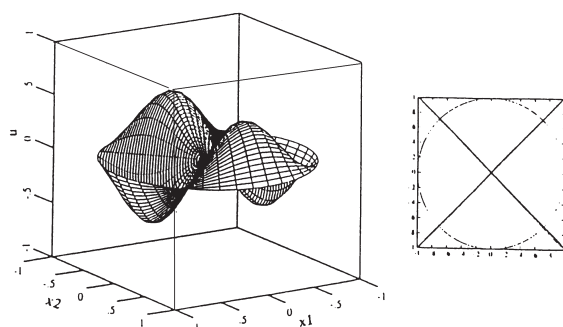
這裡的 J_n 是 n 階的 Bessel 函數, r 爲半徑, θ 爲角。而多重性, 係指對某一頻率, 譬如說 3.8317, 會有兩個不同的特徵函數, 一個是 $J_1(3.8317r)e^{i\theta}$, 而另一爲 $J_1(3.8317r)e^{-i\theta}$ 。我們把它們的圖形示於圖四至圖十三中。讀者可將這些圖形右邊的節線圖, 與 H. Helmholtz 所繪的圖三中所示節線相比較。



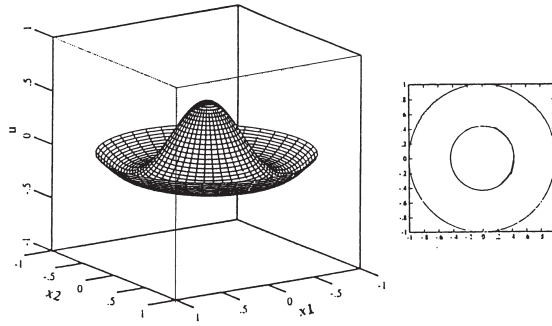
圖四. 圓盤上第一個特徵函數 $J_0(2.4048r)$



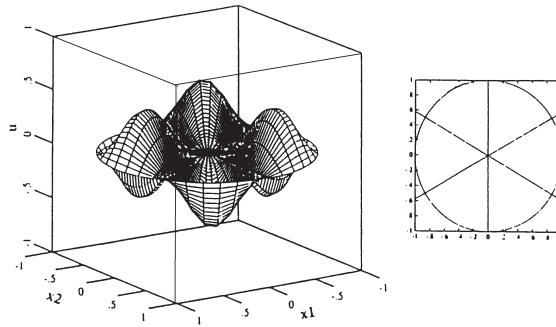
圖五. 圓盤上的第二個特徵函數 $J_1(3.8317r)e^{\pm i\theta}$ 的實部



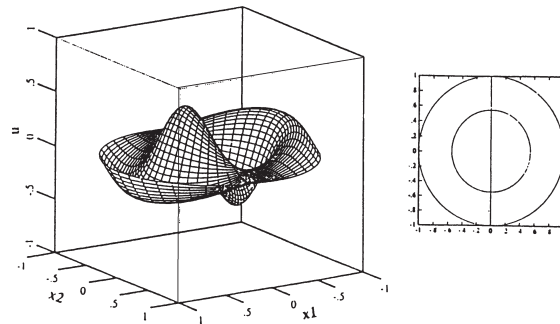
圖六. 圓盤上的第三個特徵函數 $J_2(5.1356r)e^{\pm i2\theta}$ 的實部



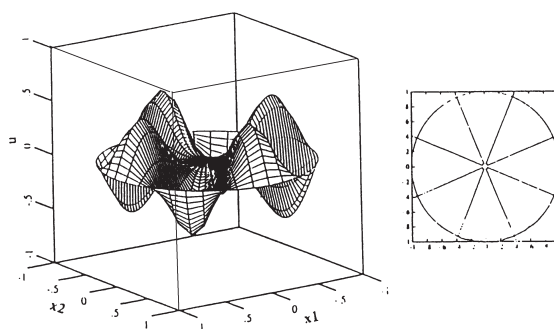
圖七. 圓盤上的第四個特徵函數 $J_0(5.5201r)$



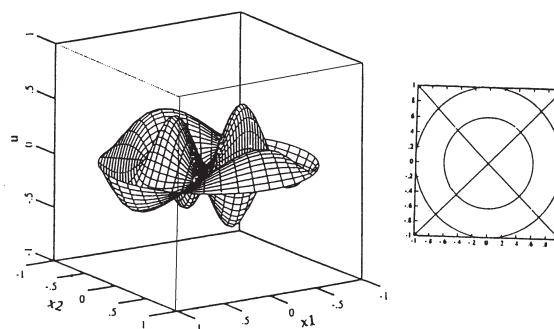
圖八. 圓盤上的第五個特徵函數 $J_3(6.3802r)e^{\pm i3\theta}$ 的實部



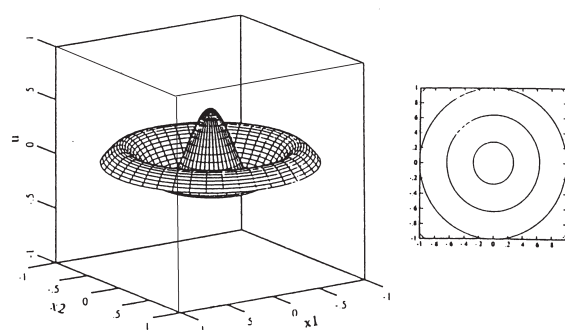
圖九. 圓盤上的第六個特徵函數 $J_1(7.0156r)e^{\pm i\theta}$ 的實部



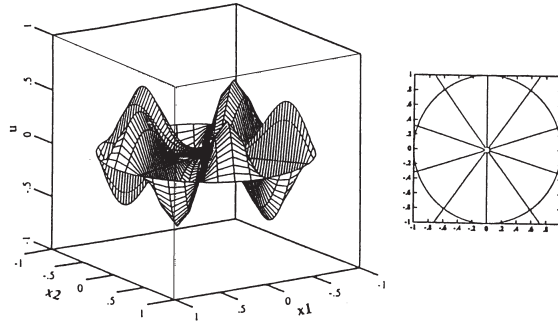
圖十. 圓盤上第七個特徵函數 $J_4(7.5883r)e^{\pm i4\theta}$ 的實部



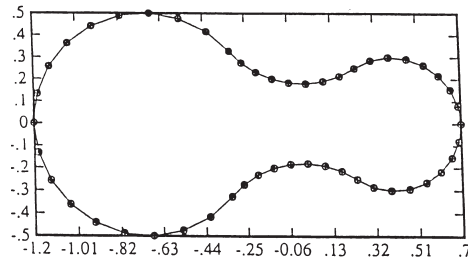
圖十一. 圓盤上第八個特徵函數 $J_2(8.4172r)e^{\pm i2\theta}$ 的實部



圖十二. 圓盤上第九個特徵函數 $J_0(8.6537r)$



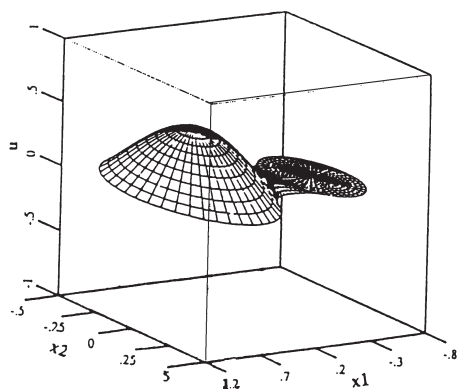
圖十三. 圓盤上第十個特徵函數 $J_5(8.7715r)e^{\pm i5\theta}$ 的實部



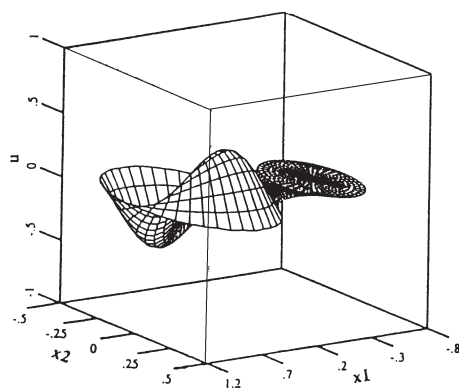
圖十四. 一個小提琴形狀的區域 (邊界分割成 50 份, 用以進行邊界元素計算)

i	$\lambda_i = \omega^2$
1	21.0606
2	49.7440
3	55.5648
4	59.2180
5	118.3052
6	155.8094
7	164.3584
8	212.9246
9	214.5384
10	235.7697

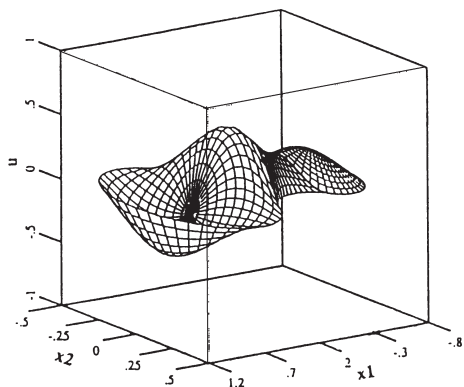
表二. 在小提琴形狀區域上 Δ 的邊界元素計算所得之特徵值 λ (邊界條件為零)



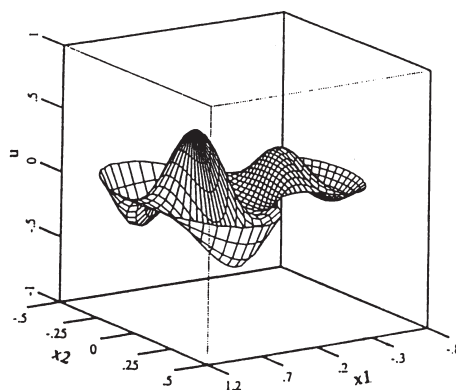
圖十五. 小提琴區域上 Δ 的第一個特徵函數



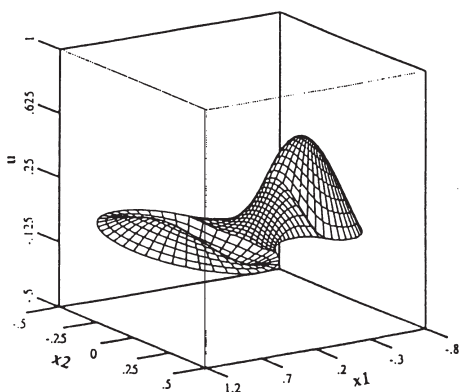
圖十八. 小提琴區域上 Δ 的第四個特徵函數



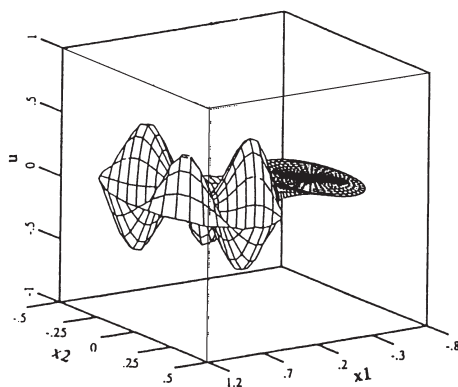
圖十六. 小提琴區域上 Δ 的第二個特徵函數



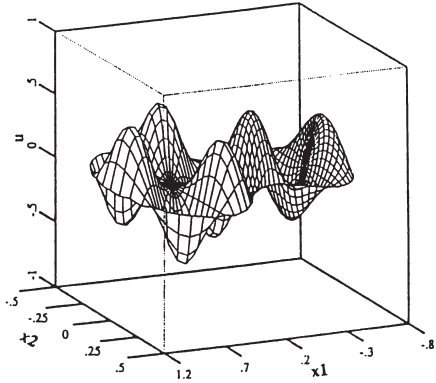
圖十九. 小提琴區域上 Δ 的第五個特徵函數



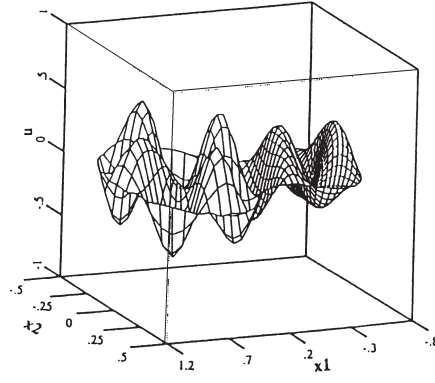
圖十七. 小提琴區域上 Δ 的第三個特徵函數



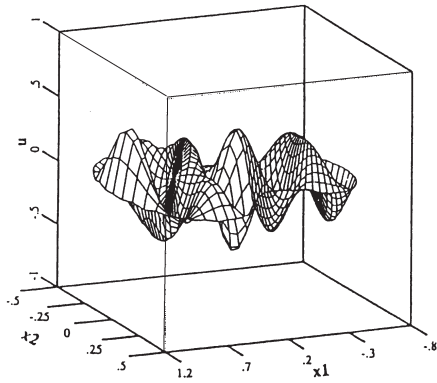
圖二十. 小提琴區域上 Δ 的第六個特徵函數



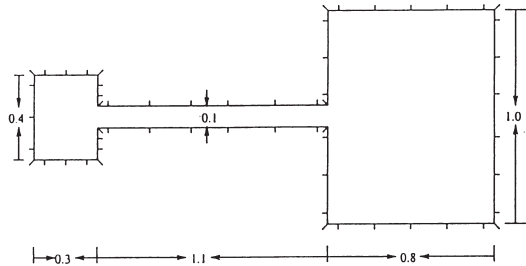
圖二十一. 小提琴區域上 Δ 的第七個特徵函數



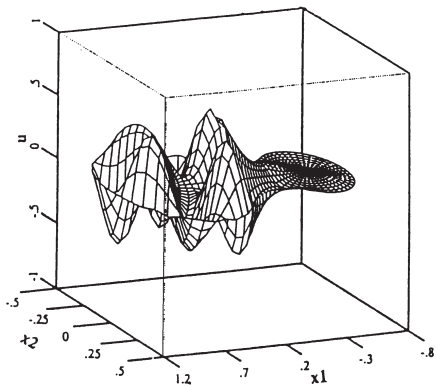
圖二十四. 小提琴區域上 Δ 的第十個特徵函數



圖二十二. 小提琴區域上 Δ 的第八個特徵函數



圖二十五. 一個啞鈴形的區域, 其邊界分割為 59 份, 以行邊界元素法計算



圖二十三. 小提琴區域上 Δ 的第九個特徵函數

i	$\lambda_i = \omega^2$
1	25.0907
2	54.7484
3	70.7229
4	100.5261
5	103.8032
6	146.2646
7	146.6854
8	163.4051
9	172.0753
10	177.0784

表三. 在啞鈴形狀區域上 Δ 的邊界元素計算所得之特徵值 λ (邊界條件為零)

當 Ω 不是像圓形、矩形、橢圓形等的規則區域時, 則無法把特徵函數用分離變元法完全解出。這時怎麼辦呢? 我們只好依賴解偏微分方程的數值方法, 藉計算機之力求出數值解。數值方法如差分法、有限元素法及邊界元素法等, 基本上均可用, 不過其中以邊界元素

法解 (30)、(31) 較好做。這是筆者與同事周建新教授所發展的, 細節請參考我及他合著一書

G. Chen and J. Zhou, "Boundary Element Methods" Academic Press, London, 1992

中。以下, 我們舉出兩個不規則區域 Ω 的例子, 並附其特徵函數經計算得出的圖形, 供大家參考。

第一個是像小提琴或胡琴形狀的區域, 見圖十四, 我們在用邊界元素計算的時候, 把邊界的曲線分割成 50 段。在曲線的曲率較大之處, 分割得稍微密一些。這樣用邊界元素法算下去, 得出了十個特徵頻率 (見表二) 及十個特徵函數圖形 (見圖十五至二十四)。

第二個是像啞鈴形狀的區域, 見圖二十五, 它是由右邊的一個大房間, 以長廊通到左邊的小房間構造而成。我們在用邊界元素計算的時候, 將邊界分割成 59 份線段。所得出的 10 個特徵值, 請見表三中。我們也畫出 13 個特徵函數的圖形, 請見圖二十六至三十八中。

計算機所繪圖形給我們在研究數學、物理或工程時, 直覺上幫助非常大。譬如說, 我們來看圖四, 十五, 及二十六。這三個圖都是最低頻率的特徵函數, 它們具有什麼樣的共同特點呢? 即是函數值都是正的。這是偏微分方程理論裡的一個基本定理。事實上, 僅有這個特徵函數是具有這個性質的。其他的特徵函數在 Ω 上取值, 必定有正有負。因此, 這個最低頻的特徵函數, 它在振動力學上的意義也就特別要緊, 由於它振動時, 所有點的運動都是同相的, 使它的振幅大, 破壞力高的緣故。

我們再來看次低頻的特徵函數, 見圖五、十六及二十七。這三圖具有任何共同特性嗎? 是的, 它們都只有一條節線:

1. 這條節線的兩端點都在 $\partial\Omega$ 上。(請比較圖七。它也僅有一條節線, 可是那節線是條封閉曲線, 沒有端點。)
2. 這條節線把 Ω 分成兩部份, 一邊特徵函數的值是正的, 另一邊是負的。

以上這兩個性質, 我們是否也可以數學嚴格證明? 迄今為止, 很多名數學家嘗試過, 可是都沒有做出來。這是偏微分方程裡的一個有名的未解決的問題, 稱為節線臆測 (The nodal line conjecture)。當然, 你要是做出來的話, 在數學上就有了一個可以長久留名的貢獻。

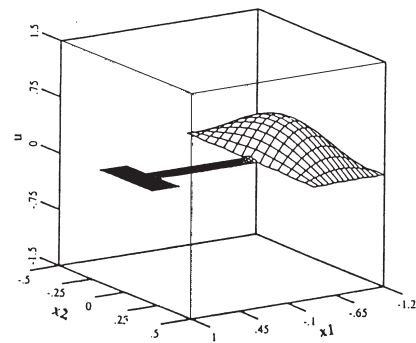
我們本節裡的剩下篇幅, 來討論一下圖二十六至三十八裡顯示的特徵函數。我們可以把波動方程 (23) 想像成在啞鈴區 (圖二十五) 中傳遞的聲波, 因為聲波的運動是滿足波動方程的。

在頭幾個低頻率的特徵函數裡, 見圖二十六至三十二, 我們可以看到聲波的振動或傳遞均限於右邊的大房間內。在走廊上及小房間內, 一點振動都看不出。在那些地方的振動完全為零嗎? 不然, 事實上在那裡仍有極小的振動。只是振動量微乎其微 (譬如說, 與右邊大房間其量之比, 為 $1:10^4$), 在圖形上完全看不出來罷了。這種現象, 在量子力學上也有它的特殊意義, 稱為是隧道現象 (tunneling), 在表面物理 (surface physics) 及電子顯微鏡的設計上很要緊。(見前段方程式 (30) 至 (32) 中說明, 因薛汀格與波動方程之特徵函數是相同的。)

直到了第八低的頻率, 見圖三十三, 我們才見到小房間開始振動, 然而走廊上及大房間幾乎是靜止的, 與第二十六至三十二圖成明顯的對比。我們稱這種現象為 個別振動現象 (separate vibration)。

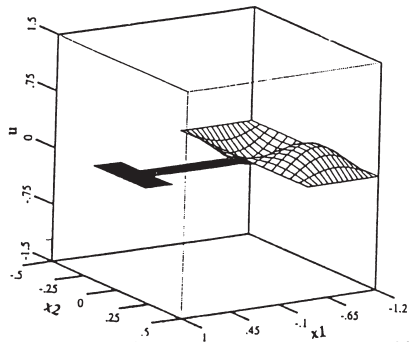
我們在此順便提一下偏微分方程理論中有名的 Holmgren 定理。這定理很粗淺的敘述如下。假設 Ω 為一連通區域, 而 u 為 Ω 上某線性偏微分方程的解。若 u 在 Ω 的子區域 Ω_1 上恆等於零, 則 u 在整個區域 Ω 上恆等於零*。根據 Holmgren 的定理, 我們可知在圖二十六至三十二中, 即使在圖形中極平坦的部份, 解也不應為零, 只是微乎其微罷了。

在圖二十六至三十三中, 個別振動現象發生的主要原因, 係由於在大、小房間產生的振動波, 其波長超過走廊的寬度, 以致被走廊卡住, 不得通過。(這種現象, 可以明顯地在走廊口上觀察到。) 到了頻率增高, 波長縮短時, 我們開始見到了波逐漸透過走廊, 傳遞起來。見圖三十六至圖三十八。當然, 我們可以推想到更高的頻率, 大小房間的振動波都可穿過走廊互相傳遞, 不會再有個別振動現象出現。

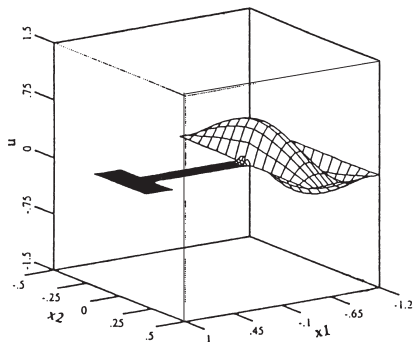


圖二十六. 啞鈴區域上 Δ 的第一個特徵函數

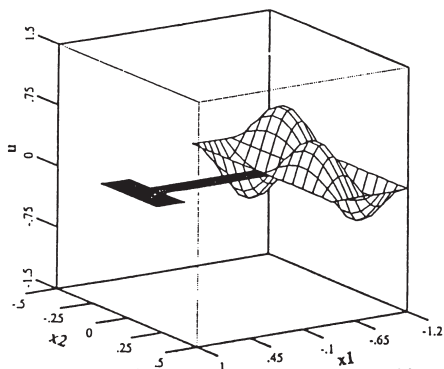
*這定理成立的條件, 事實上還需要 $\partial\Omega$ 及這偏微分方程的係數無限「光滑」。僅此略提。



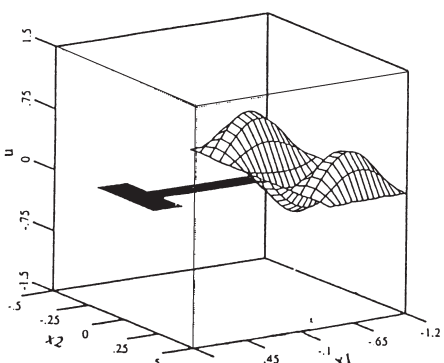
圖二十七. 啞鈴區域上 Δ 的第二個特徵函數



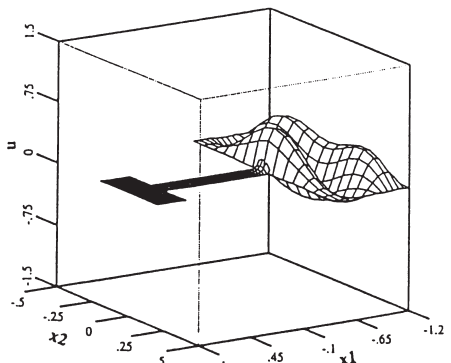
圖二十八. 啞鈴區域上 Δ 的第三個特徵函數
(請注意橫向波試圖通過走廊, 但因波長太大, 被廊口扼住。)



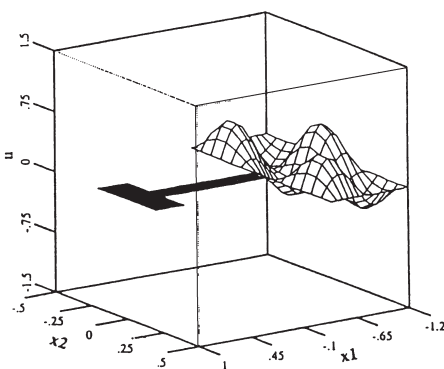
圖二十九. 啞鈴區域上 Δ 的第四個特徵函數



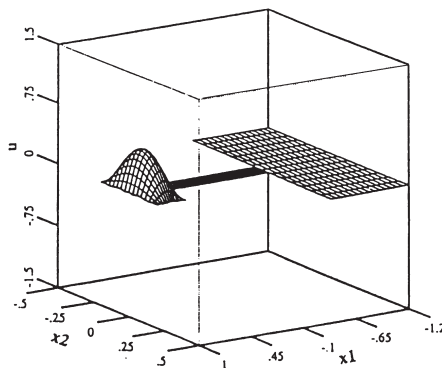
圖三十. 啞鈴區域上 Δ 的第五個特徵函數



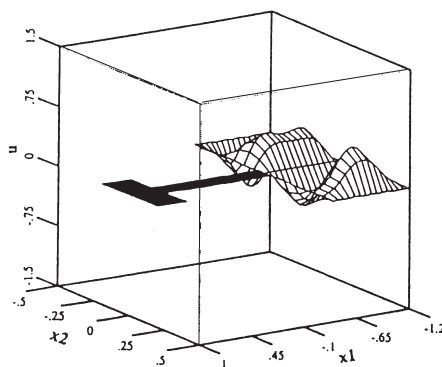
圖三十一. 啞鈴區域上 Δ 的第六個特徵函數



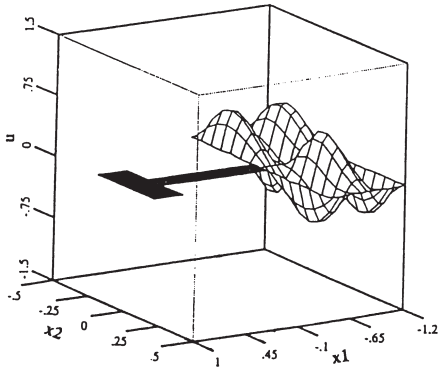
圖三十二. 啞鈴區域上 Δ 的第七個特徵函數



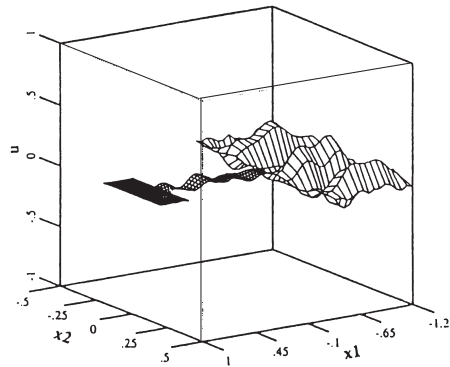
圖三十三. 啞鈴區域上 Δ 的第八個特徵函數。
左邊小間首次開始有顯著的振動。



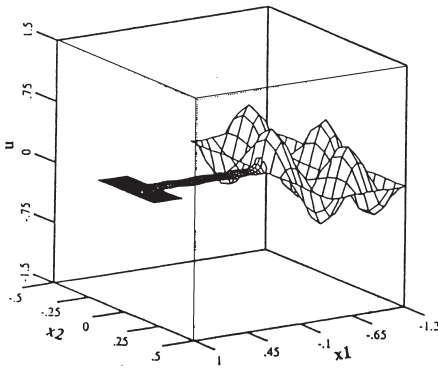
圖三十四. 啞鈴區域上 Δ 的第九個特徵函數



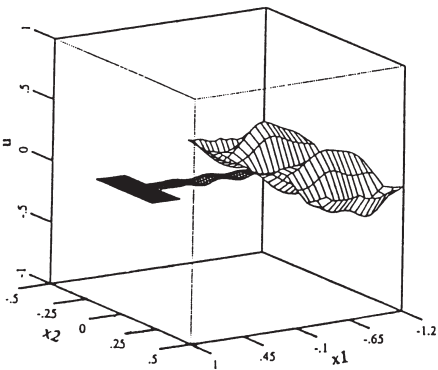
圖三十五. 啞鈴區域上 Δ 的第十個特徵函數



圖三十八. 這是一個較高頻率的特徵函數 (其順序不詳)。此時可見走廊上所振動之幅度甚大。



圖三十六. 啞鈴區域上 Δ 的第十一個特徵函數請注意, 可看到走廊上有輕微的波動。



圖三十七. 啞鈴區域上 Δ 的第十二個特徵函數。這時可見走廊上波動更為明顯。

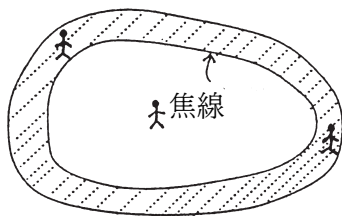
四. 具有物理意義的異常形狀特徵函數

英國名數學物理學家瑞雷爵士 (Lord Rayleigh) 在1910年研究圓形區域上聲波傳遞的時候, 發現了一個有趣的現象: 在某些高頻率時, 聲波好像是繞著圓周傳播, 有如一球沿著圓周滾動一樣。因此, 你若靠著牆邊 (以該頻率) 細語, 你的朋友在房間的另一頭, 耳朵靠著牆可以聽到你講的話, 而站在房子中間的朋友卻聽不到你講的話。瑞雷爵士稱呼這種現象為沿牆細語波 (whispering gallery mode)。

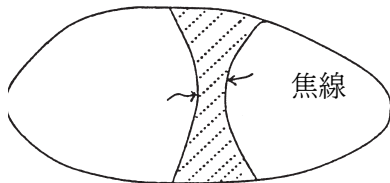
到了1960年, 美國名應用數學家凱勒 (J.B. Keller) 及同事 Rubinow 研究波動方程的特徵函數時, 發現瑞雷爵士所提的沿牆細語波, 不但對圓形區域成立, 在任何 (無角的) 凸形區域上也有。見圖三十九所示。凱勒他們又發現了, 在凸域上, 還有另外一種波, 它好像是一個球, 沿著凸域上最短徑向的附近, 來回反彈運動, 如圖四十所示。他們稱這種波為 彈球波 (bouncing ball mode)。

沿牆細語波及彈球波這兩種波，不但顯出波動性質，同時也具有質點的性質，因為它們好像顯現一個球在滾動或者反彈。這樣看來，它們不是具有了波動及質點的雙重特性，與量子力學中的物質波動雙重性(matter-wave dualism) 相合嗎？

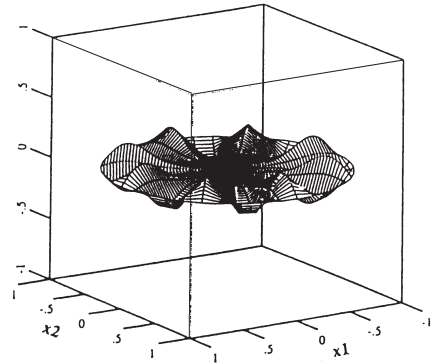
筆者與同事周建新教授研究波動方程的特徵函數時，實際觀測到瑞雷及凱勒等人所提到的上述兩種波動現象。現把它們分別附在圖四十一及圖四十二中，以嚮讀者。同時，我們也觀測到所謂波的焦聚現象 (focusing)，即有如凸面鏡那種聚光性。在圓上，見圖四十三中，大家可見到該特徵函數顯現出波動在圓心附近形成高峰，其強度為他處的數倍。圓心即是焦點，而我們稱呼這種波為焦聚波 (focusing mode)。



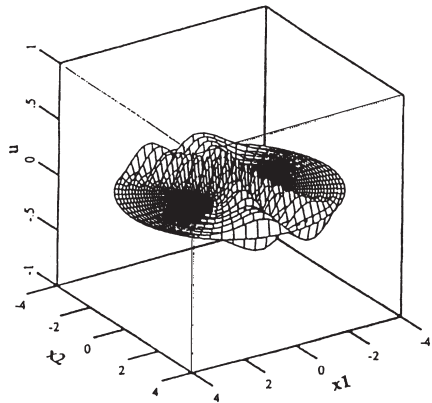
圖三十九. 沿牆細語波繞邊而傳播，靠牆的兩人可以聽得見，而房中間的人卻聽不見



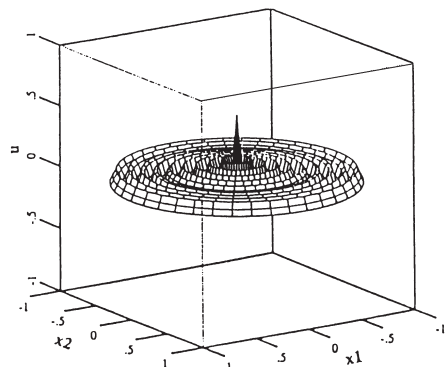
圖四十. 彈球波的傳播，好像一個球沿著短徑向，來回反彈



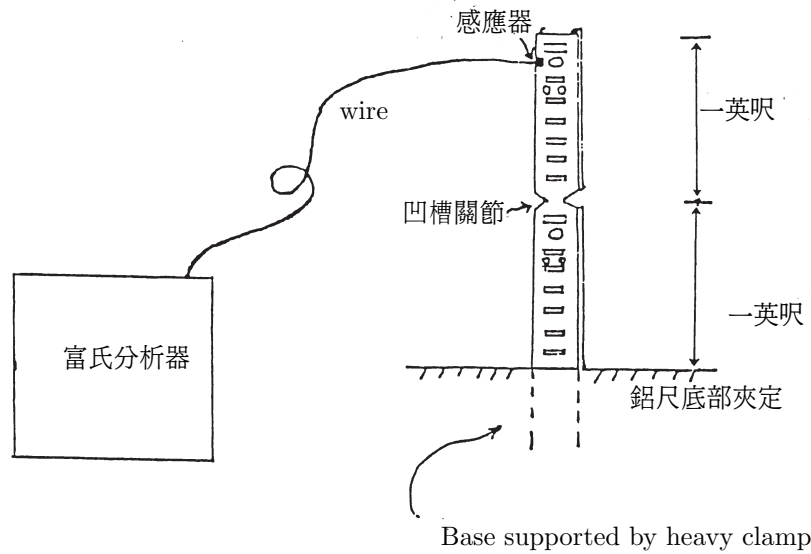
圖四十一. 這是 Δ 在圓盤上的一個特徵函數 $J_8(12.2251r) \cos 8\theta$ (零邊界條件)。它是一個沿牆細語波的實例。



圖四十二. 這是 Δ 在橢圓上的一個特徵函數 (零邊界條件)。它是彈球波的實例



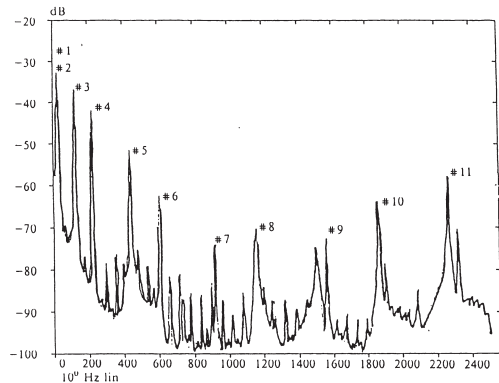
圖四十三. 這是 Δ 在圓盤上的一個特徵函數可見其中心高度比他處高出數倍。這是焦距波的實例



圖四十四. 在凹槽關節的鋁 (振動樑) 振動實驗裝置

五. 一個振動樑的實驗

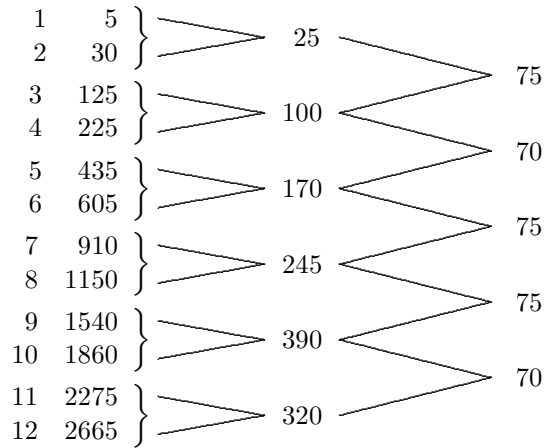
爲了瞭解一些實際的振動現象，讓我們來看看一個振動的實驗及測量*。取一根鋁尺，在中點附近挖下凹槽。把鋁尺的一頭穩穩的夾定桌邊，另一頭上附了一個很小的感應器(sensor)，它基本上是個應變測量儀(strain gauge)；振動的信號，由感應器測出，通過電線，輸入富氏分析器(Fourier analyzer)。見圖四十四。在富氏分析器內，計算機施以快速富氏變換(fast Fourier transform)，可把振動訊號，轉換爲富里哀級數，即可把所謂光譜(spectrum)，也就是特徵頻率顯示出來。見表四。



圖四十五. 在凹槽鋁尺振動的功率光譜

圖四十五所示的即是鋁尺的功率光譜(power spectrum)：振幅大的，所顯示的譜點位置較高。我們從圖四十五中，可見到算出的頭十一、二個頻率，分別以數字標出。它們的值，見表四。以赫茲(Hertz)爲單位。

*取材自筆者與 S.G. Krantz, D.L. Russell, C.E. Wayne, H.H. West 及 M.P. Coloman 合著一文中，見下詳。



表四. 鋁尺的頭十二個特徵率 (由圖四十五量出)

在表四中，左邊第二行所列的特徵頻率，顯不出什麼規則性。可是我們把這些值，兩兩差分，得到左邊第三行的值。然後再差分一次，即得表四右邊第一行之值，近於常數。這與理論 * 上的估計是相合的。這理論上所用的偏微分方程的數學模型，即是振動樑方程式(24)，由十八世紀的兩位大數學家歐拉 (Euler) 及貝努里 (Bernoulli) 提出的。

在做實驗中，我們必須要把感應器稍微調整幾次位置，然後再把所測之頻率值相加平均起來，才能得到較正確的結果。這樣做的目的，是要避免感應器的位置正好放在節點上。因節點是不動的，這樣就會錯過了一些重要訊息。

大家也可看出，在圖四十五中，有許多尖點的頻率沒有歸入表四中。這是因為這些尖點所對應的，不是樑的垂直運動，而是扭轉

(torsion) 運動。其振幅較垂直運動小，且不包含在樑方程式 (24) 的數學模型中，故不討論。

當頻率愈高時，牽涉到的測量雜音干擾愈大。像圖四十四中所示實驗做於 1987 年，當時用最先進的富氏分析器及感應器，僅可測出十幾個特徵頻率。近幾年，在精密儀器的發展上，有了長足的進展。Strain gauge 已由雷射振定儀 (laser vibrometer) 取代。不過這種新儀器很敏感，操作及實驗狀況控制就複雜多了。特徵函數的圖形，一部份也可由干涉儀 (interferometer) 測定畫出。不過畫特徵函數，最好的辦法還是用數值方法，如筆者在第三節所示。因此，現代的工程學者，經常要設下數學模型，以使用數值方法及電腦來達成研究。總之，新的方法及儀器日新月異，與 Helmholtz 在第二節所提 1885 年書中敘述的音叉實驗，有天壤之別了。

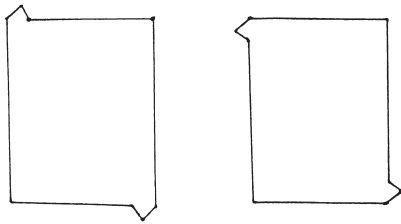
六. 繼續談一些數學問題

我們再繼續談一些與振動有關的數學理論上問題。我們在本文第二、三兩節所提到的特徵值與特徵函數的問題，是所謂的正問題 (direct problem)，即給了一個區域 Ω ，試決定拉普拉斯算子 Δ 在其上的特徵值及特徵函數。我們現在來考慮一個反問題 (inverse problem)，譬如說，我們若已經知道 Δ 的全部特徵值，那麼我們是否可以決定區域 Ω 的大小形狀？另外一個不同的說法：若有兩個

* 見筆者與 S.G. Krantz, D.L. Russell, C.E. Wayne, H.H. West 及 M.P. Coleman 合著之文「Analysis, designs and behavior of dissipative joints for coupled beams」, SIAM J. Appl. Math. 49(1989), 1665-1693。

區域 Ω_1 和 Ω_2 ，具有完全相同的特徵頻率。那麼 Ω_1 和 Ω_2 是否也完全一樣？這個問題，是由美國名數學家 Mark Kac 在 1966 所提出來的：「我們是否可聽出鼓的形狀？」(Can we hear the shape of the drum?)

大小鼓都打，大鼓聲音低沈，即最低特徵頻率值較小，故可立即分辨何是大鼓，何是小鼓。可是要是鼓形不規則的時候，就很難講了。上段所提的問題，一直沒有解決。但在 1992 年，有三位數學家 * 發表一文，說是若 Ω 是多邊形的話，以上的問題答案是否定的，他們造出了一個反例，見圖四十六所示。但當 Ω 的邊界是光滑的話，他們的數學方法就不適用。這問題仍無解決。



圖四十六. 兩個多邊形區域，不相同，而特徵頻率卻全部相等

我們現在列出幾個基本的數學式子給大家看。我們將 Δ 的特徵值，由小到大，一一排列下來， $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$

，則可得

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\text{小於}\lambda\text{的特徵值數目}}{\lambda} = \frac{\Omega\text{的面積}}{4\pi}, \quad (33)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \underset{\sim}{\text{漸近於}} \frac{\Omega\text{的面積}}{4\pi t} - \frac{L}{8} \sqrt{\frac{1}{\pi t}} + \frac{1}{6}(1-r), \quad (34)$$

這裡 L 表示 Ω 週邊的長度， r 表示 Ω 中所含的洞的數目。第一個式子係由荷蘭名物理學家 Lorentz (也就是首先研究相對論的人) 在研究黑體輻射時，由物理現象推出。他在一次去德國哥廷根 (Göttingen) 大學演講時提出。當時本世紀最偉大學數學家之一希爾伯特 (Hilbert) 在座，認為此一問題太難，恐怕五十年內都無法做出來。但在 1913 年的時候，希爾伯特的門生 H. Weyl 把 (33) 完全證出。Weyl 也因此嶄露頭角，終成為大數學家。

在 (34) 的右邊漸近展開式，頭兩項已證明無誤，但第三項迄今尚無人證出。由 (33) 及 (34) (的右邊前兩項)，我們可以推出，若有一區域 Ω ，它的特徵頻率與圓盤的特徵頻率完全相同的話，那麼 Ω 也一定是圓的。可是其它的形狀下，就不敢保證了。譬如說，在 1964 年，美國數學家 Milnor 造出兩個 16 維空間的圓環體 (Tori)，使得它們的拓樸結構不同，但是它們的特徵頻率確是完全相同的。

* 見 C. Gordon, D. Webb and S. Wolpert: 「Isospectral plane domains and surfaces via Riemannian orbifolds」, *Inventiones Math.* 110(1992), 1-22.

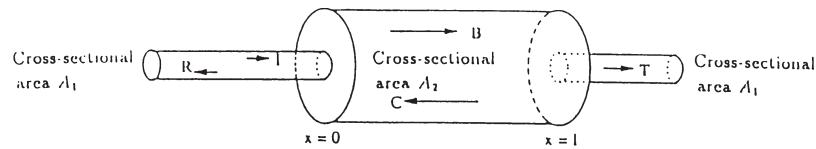
七. 振動力學的一些應用

末了, 我們舉幾個振動力學應用的例子。

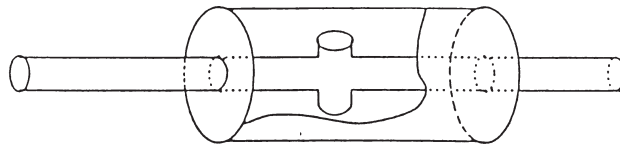
(1) 減音器

汽車或摩托車排氣管的減音器原理, 就是利用聲波重疊中和的原理而製。見圖四十七。在排氣管上, 我們加入一段粗大的部份,

當汽車馬達音波傳播到此時, 一部份會繼續向下游透射 (即 T), 另一部份則被反射 (即 R)。透射波與反射波相重疊, 因為相位角不同, 使振幅降低, 故造成噪音衰減。但這種作法, 對某些頻率噪音有效, 對其他則無效, 故其效果不是最好的。



圖四十七. 最簡單的排氣管減音器



圖四十八. Helmholtz 共振腔減音器

有一個改進的辦法, 是在排氣管上挖幾個大小不同的孔, 外面加一段封閉的粗管罩住, 如圖四十八所示。這些開口形成共振腔, 有如圖二音叉實驗效果一樣, 對某些頻率的音波 (即引擎噪音) 產生共振, 能量由空氣分子振動的音波能量, 轉化為減音器的振動, 變成熱能耗散。這樣消滅的噪音頻帶較寬, 效果更佳。

(2) 隱形飛機及潛艇

偵測飛機及潛艇, 主要靠雷達 (電磁波)

及聲納 (音波)。因此, 若能減少飛機或潛艇對電磁波或音波的反射, 則不易被雷達或聲納所測尋。現代新的隱形飛機或潛艇的設計, 係根據兩種原理, 一為減少散射截面積 (scattering cross section), 譬如將機身及機翼合起來設計得很扁平, 因此總反射面積減少, 使反射波大量降低。另一辦法為將機身及機翼尖銳的邊緣處, 磨得光滑, 這樣也會有減少反射的效果。對於潛艇, 在外殼上, 還可塗好幾層吸音漆, 以吸收聲納發出的音波。

現代美國隱形飛機製造的技術, 已可達

到這個地步：當你在雷達銀幕上偵測到飛機來襲時，飛機已經飛到你的頭頂投彈了。

(3) 超高級摩天大樓

我們可以把摩天大樓簡化想像為滿足像方程式 (24) 那樣的振動樑。當大樓愈高時，就好像樑愈長，它的最低共振頻率值就愈小，因此就容易受到地震波、強風等的影響，引起共振，使大樓有遭摧毀之虞。當然，有一個基本的辦法，就是把大樓蓋得基底寬大而堅厚，增加安全係數。可能的缺點是成本太高，而且不易有流線形吸引人的外貌。

現代的土木工程師、力學及應用數學家已有一些辦法將振動力學的理論，配合偏微分方程的控制理論，設計出一些像 TMD (Tendon Mass Damper) 的阻泥器，使超高摩天大樓在地震的防害上，達到很好的效果。使建築物裡的感應器，一偵測到地波震波來襲，即可自動控制，將大振幅的頻率波有效衰減。

在這一方面的研究，現仍不斷的進行中。大家可由 1995 年初日本神戶大地震所摧毀的恐怖性，知道在這方面研究的重要性。

本文所附的圖形，大部份係由筆者與周建新教授合著書 (上、下冊) 中取用：

G. Chen and J. Zhou, "Vibration and Damping in Distributed Systems, Vol. 1: Analysis, Estimation, Attenuation, and Design", CRC Press, Boca Raton, Florida, 1993;

"... , Vol. 2: WKB and Wave Methods, Visualization and Experimentation", CRC Press, Boca Raton, Florida, 1993.

—本文作者任教於美國 Texas A&M University 數學系—