問題與方法:
「二階常係數線性非齊次常微分方程解法探討」

王中烈 · 楊玉坤 · 丁轉初

一. 緒 言

面對一則問題, 解決之道是尋找一個可行的解決方法。相同的方法可解不同的問題; 不同的方法可解相同的問題。這些方法中, 有的是具有一般性, 有的是具有特殊性。可是對於解一問題, 在衆多方法之中, 應有一基本方法。此之所謂「有法法有盡, 無法法無窮; 無法而有法, 從一以貫通。」(註: 此詩乃畫家劉子靜先生吟”習畫”五言絕句之一。)

舉例來說, 求解微分方程問題。解微分方程的基本方法是將方程中之已知函數與未知函數調配使能直接應用積分方法求得微分方程之未知函數, 此即所謂微分方程之解。具體範例: 求解二階常係數線性非齊次常微分方程問題。其解法常見的有: 常數 (或參數) 變値法, 微分算子法, 以及拉普拉斯 (Laplace) 變換法 (一特殊積分算子)。這三種方法的基本精神是相通的。誠然, 具有特殊性的微分算子法與拉普拉斯變換法涉及較高等分析與代數運算。事實上, 較一般性的常數變値法, 用到的分析與代數亦非初等。總之, 它們都不是直接應用微積分基本定理求解。微積分學乃解微分方程之基礎知識寶典。如能不預作其它假設, 僅用基本運算達到應用微積分基本定理而求得二階常係數線性非齊次常微分方程之未知函數解, 對於初學者應有一定的啓發與教益。這是本文試作之動機。因此, 在第二節中, 爲了使本文自給自足且可與下節結果比照申述, 先談問題及其常數變値法之來龍去脈。第三節, 提出該問題不預作任何假設之新解法。第四節, 不迴避虛數 i 之存在, 提供尤拉公式之證明及其應用。第五節, 以邊値問題作應用簡介格林函數 (Green's function)。第六節, 結論。

二. 常數變値法之回顧

考慮二階常係數線性非齊次常微分方程如下:

$$y'' + py + qy = f(t) \tag{1}$$

此處, 實數 p, q 與可積函數 (或連續函數) $f(t)$爲已知, y', y'' 分別爲未知函數 $y(t)$ 之一、二階導函數。

在 (1) 中令 $f(t)=0$ 得

$$y''+py'+qy=0 \text{ 是與(1) 對應的齊次方程。} \tag{2}$$

微分方程 (1) 是工程上常見的數學模型 (撇開初值條件或邊界值條件不談): 諸如分別與克奇和夫定律 (Kirchhoff's Law)、虎克定律 (Hooke's Law) 有關的電子網路、機械系統以及其他混合問題之應用 (參看 [4],179-221頁、280-290頁), 從而有相同數學模型微分方程 (1) 之出現。一般微分方程教科書上 (看 [2]與 [4]), 爲了求解 (1), 先求解 (2), 故令 $y=e^{\lambda t}$, 指數函數 (λ 可爲實數或複數); 從而 (2) 變爲

$$(\lambda^2+p\lambda+q)e^{\lambda t}=0$$

因爲對於任何 (實或複) 數 $\lambda, e^{\lambda t}\neq 0$, 而有

$$\lambda^2+p\lambda+q=0 \tag{3}$$

是衆所熟知的特徵方程 (或輔助方程) (Characteristic Equation)。

求解數學上最重要的一元二次代數方程 (3) 是國中生都熟悉的。因其判別式 p^2-4q 之不同而二根 λ_1,λ_2 有實複異同之分。爲了簡化運算, 記實數 α,β,γ 與 p,q 之關係如下:

$$\alpha=-\frac{p}{2};\quad \beta=\frac{1}{2}(4q-p^2)^{\frac{1}{2}},\quad p^2<4q$$

$$\gamma=\frac{1}{2}(p^2-4q)^{\frac{1}{2}},\quad p^2>4q \tag{4}$$

從而 (3) 之判別式 $(p^2-4q)>0,=0$, 或 <0, 分別確定其二根 λ_1,λ_2 有下列三種情形:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &=\alpha+\gamma,\quad \lambda_2=\alpha-\gamma\\ \lambda_1 &=\lambda_2=\alpha\\ \lambda_1 &=\alpha+i\beta,\quad \lambda_2=\alpha-i\beta\end{aligned} \tag{5}$$

如是, 自 (5) 即得方程 (2) 之二獨立函數解分別爲

$$\begin{aligned}&\text{(I)}\quad e^{\alpha t}\cosh\gamma t, e^{\alpha t}\sinh\gamma t(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t})\\ &\text{(II)}\quad te^{\alpha t}, e^{\alpha t}\\ &\text{(III)}\quad e^{\alpha t}\cos\beta t, e^{\alpha t}\sinh\beta t(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t})\end{aligned} \tag{6}$$

令 (2) 之二獨立解爲函數 u_1,u_2如 (6) 所示, 則餘函數 (Complementary function)y_c:

$$y_c(t)=c_1u_1(t)+c_2u_2(t) \tag{7}$$

是 (2) 之一般解, 其中 c_1,c_2 爲二任意常數。

至此, 我們可以利用所謂常數變値法來求非齊次常微分方程 (1) 的一特殊積分 (Particular integral) 解 y_p。其程序是: 將 (7) 中之常數 c_1,c_2 分別代以 (待定) 函數

$$v_1=v_1(t),\quad v_2=v_2(t) \tag{8}$$

並用函數 $v_1(t)u_1(t)+v_2(t)u_2(t)$ 來定義 y_p, 亦即

$$y_p=v_1(t)u_1(t)+v_2(t)u_2(t) \tag{9}$$

且要求

$$v_1'(t)u_1(t)+v_2'(t)u_2(t)=0 \tag{10}$$

一而再, 再而三;(8)、(9) 與 (10) 之假設, 表面上看來好像是事出突然 (對初學者無異是三記當頭悶棒)。可是這正是求解微分方程一貫方法 (或技巧): 預設已知解之構形。在上面預設方程 (2) 解之構形爲指數函數即爲一例。

有鑑於 (2) 爲對應於非齊次方程 (1) 之齊次方程, (9) 中所示 (1) 之特殊積分解 y_p 與 (7) 中所示 (2) 之一般解 y_c, 構形一致, 僅二變值函數 v_1, v_2 對應替代常數係數 c_1, c_2。因爲二函數 v_1, v_2 待定, 再假設 (10) 以簡化導函數 y_p', 無異於一石兩鳥。進而, 將 (9) 對 t 作兩次微分 (且應用假設 (10)) 有

$$\begin{aligned} y_p'(t) &= v_1(t)u_1'(t) + v_2(t)u_2'(t) \\ y_p''(t) &= v_1(t)u_1''(t) + v_2(t)u_2''(t) \\ &\quad + v_1'(t)u_1'(t) + v_2'(t)u_2'(t) \quad (11) \end{aligned}$$

代 (9) 與 (11) 入 (1) 且考慮函數 u_1 與 u_2 分別爲齊次方程 (2) 之解, 約簡即得

$$v_1'(t)u_1'(t) + v_2'(t)u_2'(t) = f(t) \qquad (12)$$

根據假設條件 (9) 與 (10) 要求所選取函數 v_1, v_2 滿足方程系統 (10) 與 (12), 因爲該系統係數之行列式

$$\begin{aligned} w(t) &= \begin{vmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) \end{vmatrix} \\ &= 2\gamma e^{2at}, e^{2at}, 2\beta e^{2at} \end{aligned}$$

在 (4)-(6) 所示之三種情形下均不爲零, 聯解 (10) 與 (12) 即得

$$v_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & u_2(t) \\ f(t) & u_2'(t) \end{vmatrix}}{w(t)} = -\frac{u_2(t)f(t)}{w(t)}$$

$$v_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} u_1(t) & 0 \\ u_1'(t) & f(t) \end{vmatrix}}{w(t)} = \frac{u_1(t)f(t)}{w(t)}$$

如是我們獲致函數 v_1, v_2 可分別定義爲

$$\begin{aligned} v_1(t) &= -\int_0^t \frac{u_2(s)f(s)}{w(s)} ds \\ v_2(t) &= \int_0^t \frac{u_1(s)f(s)}{w(s)} ds \qquad (13) \end{aligned}$$

此處積分自0開始僅方便爲之並不失一般性。自 (9) 與 (13) 得非齊次方程 (1) 之一特殊積分解爲

$$y_p(t) = \int_0^t \frac{u_1(s)u_2(t) - u_2(s)u_1(t)}{w(s)} f(s) ds$$

從而方程 (1) 之一般解爲

$$\begin{aligned} y(t) &= c_1u_1(t) + c_2u_2(t) \qquad (14) \\ &\quad + \int_0^t \frac{u_1(s)u_2(t) - u_2(s)u_1(t)}{w(s)} f(s) ds \end{aligned}$$

其中 u_1 與 u_2 乃 (6) (I),(II) 或 (III) 所給。

三. 舊問題之新解法

在第二節中我們陳述了求解二階常係數線性非齊次常微分方程 (1) 的常數變值法。工程應用方面, 還有求解 (1) 的微分算子法與拉普拉司變換法; 後者雖涉及各自獨有的技巧與訣竅, 可是它們的操作精神與前者是息息相通的 (參看 [2]與 [4])。常數變值法在推演過程中必須預作三項假設。本節推出一不同於上述三種方法之方法, 乃有系統的, 直接的綜合方法: 不僅不預作任何假設, 而且僅用初等的微積分方法與率直的代數運算作爲推導工具。最後利用微積分基本定理給出方程 (1) 之全部可行解。爲了使本文自給自足的緣故, 自 [1]譯出下列二定理:

定理一 (關於定積分的第一微積分基本定理): 設 f 是閉區間 $[a, b]$ 上一連續函數且

F 是 f 在 $[a,b]$ 上之反導函數 (或積分函數), 則

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{15}$$

定理二 (關於不定積分的第二微積分基本定理): 令 f 是區間 I 上的一連續函數且 a 是 I 中任一點。設函數 F 爲下列積分所定義

$$F(x) = \int_a^x f(s)ds \tag{16}$$

則 $F'(x) = f(x)$ 對 I 中每一 x 成立。
註: 不失一般性, 我們可將 (16) 改寫爲

$$F(x) = \int_0^x f(s)ds \tag{17}$$

根據積分性質, 定理一與定理二等價, 昭然若揭。

現在, 先給齊次方程 (2) 一綜合解。爲此, 將 (2) 乘以 $e^{\frac{pt}{2}}$ 並略施運算得

$$(ye^{\frac{pt}{2}})'' - \frac{p^2-4q}{4}ye^{\frac{pt}{2}} = 0$$

再將上式乘以 $2(ye^{\frac{pt}{2}})'$, 得

$$2(ye^{\frac{pt}{2}})'(ye^{\frac{pt}{2}})'' - \frac{p^2-4q}{4}2(ye^{\frac{pt}{2}})(ye^{\frac{pt}{2}})' = 0$$

或

$$[((ye^{\frac{pt}{2}})) - \frac{p^2-4q}{4}(ye^{\frac{pt}{2}})^2]' = 0 \tag{18}$$

爲了簡化推演與運算, 在下面我們引用 (4) 中所列舉之符號對 (18) 積分而後移項得

$$[(ye^{-\alpha t})']^2 = \begin{cases} c_1^2 + \gamma^2(ye^{-\alpha t})^2, & p^2-4q>0 \\ c_1^2, & p^2-4q=0 \\ c_1^2 - \beta(ye^{-\alpha t})^2, & p^2-4q<0 \end{cases}$$

此處 c_1 爲一任意實數; 或

$$(ye^{-\alpha t})' = \begin{cases} \sqrt{c_1^2 + \gamma^2(ye^{-\alpha t})^2}, & p^2-4q>0 \\ c_1, & p^2-4q=0 \\ \sqrt{c_1^2 - \beta(ye^{-\alpha t})^2}, & p^2-4q<0 \end{cases}$$

亦即

$$\begin{aligned} \frac{d(\gamma ye^{-\alpha t})}{\sqrt{c_1^2 + (\gamma ye^{-\alpha t})^2}} &= \gamma dt,\ p^2-4q>0 \\ d(ye^{-\alpha t}) &= c_1 dt,\ p^2-4q=0 \\ \frac{d(\beta ye^{-\alpha t})}{\sqrt{c_1^2 - (\beta ye^{-\alpha t})^2}} &= \beta dt,\ p^2-4q<0 \end{aligned} \tag{19}$$

(19) 積分得

$$\begin{aligned} \sinh^{-1}(\frac{\gamma ye^{-\alpha t}}{c_1}) &= \gamma t + c_2,\ p^2-4q>0 \\ ye^{-\alpha t} &= c_1 t + c_2,\ p^2-4q=0 \\ \sin^{-1}(\frac{\beta ye^{-\alpha t}}{c_1}) &= \beta t + c_2,\ p^2-4q<0 \end{aligned}$$

此處 c_2 爲另一任意實數;
或

$$\begin{aligned} y_c &= \frac{c_1}{\gamma}e^{\alpha t}\sinh(\gamma t + c_2) \\ &= A_1 e^{\alpha t}\cosh\gamma t + A_2 e^{\alpha t}\sinh\gamma t, \\ &\quad p^2-4q>0 \end{aligned}$$

此處

$$A_1 = \frac{c_1}{\gamma}\sinh c_2 \quad A_2 = \frac{c_1}{\gamma}\cosh c_2$$

$$y_c = c_1 te^{\alpha t} + c_2 e^{\alpha t}, \quad p^2-4q=0$$

$$\begin{aligned} y_c &= \frac{c_1}{\beta}e^{\alpha t}\sin(\beta t + c_2) \\ &= B_1 e^{\alpha t}\cosh\beta t + B_2 e^{\alpha t}\sin\beta t, \\ &\quad p^2-4q>0 \end{aligned}$$

此處

$$B_1=\frac{c_1}{\beta}\sin c_2 \quad B_2=\frac{c_1}{\beta}\cos c_2$$

上述三結果與 (6) 與 (7) 所示者完全相同。

上述簡潔扼要的方法, 雖然用以求解齊次方程 (2) 順理成章而獲致預期結果。可是由於該方法將未知函數 y, y' 與已知函數 $e^{\frac{pt}{2}}$ 混合運算, 用以求解非齊次方程 (1) 將難以達到預期目的。因此, 爲了有系統直接的求解方程 (1) 而仍不預作任何假設, 必須將上述方法作應有的修正; 但仍採用 (4) 中所列舉符號來精簡運算。

首先, 考慮 $p^2-4q>0$ 的情形: 將 (1) 乘以 $e^{-\alpha t}\cosh\gamma t$ 得

$$\begin{aligned}
& e^{-\alpha t}(\cosh\gamma t)f(t) \qquad (20)\\
=\ & e^{-\alpha t}\cosh\gamma t[y''-2\alpha y'+(\alpha^2-\gamma^2)y]\\
=\ & y''e^{-\alpha t}\cosh\gamma t-2\alpha y'e^{-\alpha t}\cosh\gamma t\\
& +y(\alpha^2e^{-\alpha t}\cosh\gamma t-\gamma^2e^{-\alpha t}\cosh\gamma t)\\
=\ & y''e^{-\alpha t}\cosh\gamma t+y'(-\alpha e^{-\alpha t}\cosh\gamma t\\
& +\gamma e^{-\alpha t}\sinh\gamma t)\\
& +y'(-\alpha e^{-\alpha t}\cosh\gamma t-\gamma e^{-\alpha t}\sinh\gamma t)\\
& +y(\alpha e^{-\alpha t}\cosh\gamma t-\alpha\gamma e^{-\alpha t}\sinh\gamma t\\
& +\gamma\alpha e^{-\alpha t}\sinh\gamma t-\gamma^2e^{-at}\cosh\gamma t)\\
=\ & [y'e^{-\alpha t}\cosh\gamma t-y(\alpha e^{-\alpha t}\cosh\gamma t\\
& +\gamma e^{-\alpha t}\sinh\gamma t)]'
\end{aligned}$$

同理, 將 (1) 乘以 $e^{-\alpha t}\sinh\gamma t$ 得

$$\begin{aligned}
& e^{-\alpha t}(\sinh\gamma t)f(t) \qquad (21)\\
=\ & [y'e^{-\alpha t}\sinh\gamma t-y(\alpha e^{-\alpha t}\sinh\gamma t\\
& +\gamma e^{-\alpha t}\cosh\gamma t)]'
\end{aligned}$$

(20) 與 (21) 分別積分得

$$\begin{aligned}
& y'e^{-\alpha t}\cosh\gamma t-y(\alpha e^{-\alpha t}\cosh\gamma t\\
& +\gamma e^{-\alpha t}\sinh\gamma t)\\
=\ & c_1+\int_0^t e^{-\alpha s}(\cosh\gamma s)f(s)ds \qquad (22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& y'e^{-\alpha t}\sinh\gamma t-y(\alpha e^{-\alpha t}\sinh\gamma t\\
& +\gamma e^{-\alpha t}\cosh\gamma t)\\
=\ & c_2+\int_0^t e^{-\alpha s}(\sinh\gamma s)f(s)ds \qquad (23)
\end{aligned}$$

此處 c_1, c_2 爲二任意實數。

$[(22)\times e^{\alpha t}\sinh\gamma t-(23)\times e^{\alpha t}\cosh\gamma t]\div\gamma$ 得

$$\begin{aligned}
y\ =\ & \frac{c_1}{\gamma}e^{\alpha t}\sinh\gamma t-\frac{c_2}{\gamma}e^{\alpha t}\cosh\gamma t \qquad (24)\\
& +\frac{1}{\gamma}\int_0^t e^{\alpha(t-s)}(\sinh\gamma(t-s))f(s)ds
\end{aligned}$$

其次, 考慮 $p^2-4q=0$ 的情形: 將 (1) 乘以 $e^{-\alpha t}$ 得

$$\begin{aligned}
e^{-\alpha t}f(t)\ =\ & e^{-\alpha t}(y''-2\alpha y'+\alpha^2y)\\
=\ & y''e^{-\alpha t}+y'(-\alpha e^{-\alpha t})\\
& +y'(-\alpha e^{-\alpha t})+y(\alpha^2e^{-\alpha t})\\
=\ & [y'e^{-\alpha t}-y(\alpha e^{-\alpha t})]' \qquad (25)
\end{aligned}$$

同理將 (1) 乘以 $te^{-\alpha t}$ 得

$$te^{-\alpha t}f(t)=[y'te^{-\alpha t}-y(\alpha te^{-\alpha t}+e^{-\alpha t})]' \qquad (26)$$

(25) 與 (26) 分別積分得

$$\begin{aligned}
& y'e^{-\alpha t}-y(\alpha e^{-\alpha t})\\
=\ & c_1+\int_0^t e^{-\alpha s}f(s)ds \qquad (27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& y'te^{-\alpha t}-y(\alpha te^{-\alpha t}+e^{-\alpha t})\\
=\ & c_2+\int_0^t se^{-\alpha s}f(s)ds \qquad (28)
\end{aligned}$$

此處 c_1, c_2 仍為二任意實數。

$(27) \times t^{\alpha t} - (28) \times e^{\alpha t}$ 得

$$\begin{aligned} y &= c_1 t e^{\alpha t} - c_2 e^{\alpha t} \\ &\quad + \int_0^t (t-s) e^{\alpha(t-s)} f(s) ds \end{aligned} \tag{29}$$

最後, 考慮 $p^2 - 4q < 0$ 的情形: 將 (1) 乘以 $e^{-\alpha t} \cos \beta t$ 得

$$\begin{aligned} & e^{-\alpha t} (\cos \beta t) f(t) \qquad\qquad (30) \\ =\ & e^{-\alpha t} \cos \beta t [y'' - 2\alpha y' + (\alpha^2 - \beta^2) y] \\ =\ & y'' e^{-\alpha t} \cos \beta t - 2\alpha y' e^{-\alpha t} \cos \beta t \\ & + y(\alpha^2 e^{-\alpha t} \cos \beta t + \beta^2 e^{-\alpha t} \cos \beta t) \\ =\ & y'' e^{-\alpha t} \cos \beta t + y'(-\alpha e^{-\alpha t} \cos \beta t \\ & - \beta e^{-\alpha t} \sin \beta t) \\ & + y'(-\alpha e^{-\alpha t} \cos \beta t + \beta e^{-\alpha t} \sin \beta t) \\ & + y(\alpha e^{-\alpha t} \cos \beta t + \alpha \beta e^{-\alpha t} \sin \beta t \\ & - \beta \alpha e^{-\alpha t} \sin \beta t + \beta^2 e^{-at} \cos \beta t) \\ =\ & [y' e^{-\alpha t} \cos \beta t + y(\alpha e^{-\alpha t} \cos \beta t \\ & + \beta e^{-\alpha t} \sin \beta t)]' \end{aligned}$$

同理, 將 (1) 乘以 $e^{-\alpha t} \sin \beta t$ 得

$$\begin{aligned} & e^{-\alpha t} (\sin \beta t) f(t) \qquad\qquad (31) \\ =\ & [y' e^{-\alpha t} \sin \beta t - y(\alpha e^{-\alpha t} \sin \beta t \\ & + \beta e^{-\alpha t} \cos \beta t)]' \end{aligned}$$

(30) 與 (31) 分別積分得

$$\begin{aligned} & y' e^{-\alpha t} \cos \beta t + y(-\alpha e^{-\alpha t} \cos \beta t \\ & + \beta e^{-\alpha t} \sin \beta t) \\ =\ & c_1 + \int_0^t e^{-\alpha s} (\cos \beta s) f(s) ds \end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned} & y' e^{-\alpha t} \sin \beta t - y(\alpha e^{-\alpha t} \sin \beta t \\ & + \beta e^{-\alpha t} \cos \beta t) \\ =\ & c_2 + \int_0^t e^{-\alpha s} (\sin \beta s) f(s) ds \end{aligned} \tag{33}$$

此處 c_1, c_2 為二任意實數。

$[(32) \times e^{\alpha t} \sin \beta t - (33) \times e^{\alpha t} \cos \beta t] \div \beta$ 得

$$\begin{aligned} y &= \frac{c_1}{\beta} e^{\alpha t} \sin \beta t - \frac{c_2}{\beta} e^{\alpha t} \cos \beta t \qquad (34) \\ &\quad + \frac{1}{\beta} \int_0^t e^{\alpha(t-s)} (\sin \beta(t-s)) f(s) ds \end{aligned}$$

註一:若在 (14) 中代入 (6) 中之 (I),(II) 與 (III) 則它們分別與 (24)、(29) 與 (34) 所獲致之結果一致。

註二:在 (24)、(29) 與 (34) 中令 f(t) = 0即得方程 (2) 之解且與 (6)、(7) 所示一致。

四. 尤拉公式證明及其應用

尤拉公式 (Euler's formula)

$$e^{it} = \cos t + i \sin t,\ t \in R,\ i = \sqrt{-1} \tag{35}$$

出現在一般微積分學 (參看 [10]) 或高等數學教冊 (參看 [9]) 上, 都是用函數泰勒級數展開推導的。這與尤拉本人所證述的沒有什麼不同 (參看 [13]), 只是當今符號代表與函數概念較前人略勝一籌罷了。本節試作之動機有五: 一、尤拉公式 (35) 與本文所研討的特例 — 動力學物理系統簡諧運動 (SHM-Simple Harmonic Motion)(參看 [9]225-238頁)

$$x'' + w^2 x = 0 \ (w\text{稱為自然週率}) \tag{36}$$

息息相關; 二、公式 (35) 是初等微積分通往高等數學關鍵公式之一; 三、藉以描述實數與複數場之異同與協調; 四、利用函數方程概念證明 (35); 五、再利用微分方程存在唯一定理建立公式 (35)。

回顧在上節解簡諧運動齊次線性微分方程 $(w=1)$:

$$\frac{d^2z}{dt^2}+z \;=\; 0 \tag{37}$$

時, 我們有下面與其等價的非線性微分方程

$$(\frac{dz}{dt})^2+z^2=c_1^2$$

(此乃 (18) 積分後令 $\alpha=0, \beta=1$ 之結果) 但令 $c_1=0$ 而有

$$(\frac{dz}{dt})^2+z^2 \;=\; 0 \tag{38}$$

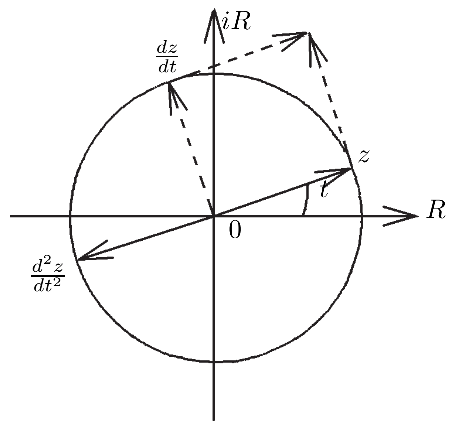
這一則簡單的非線性微分方程, 略加分析, 它是沒有非零實函數解。進一步討論方程 (37) 與 (38), 讓我們先在複平面 C 上利用向量概念與單位圓關係圖解證明它們 (見圖一)。雖然在下面所列出之結果昭然若揭而且所用工具乃眾所熟知, 我們深信是第一次在文獻中這樣處理的。

事實上, 為了求解 (37) 與 (38), 仍令 $z=e^{\lambda t}$, 則 (37) 與 (38) 分別變為

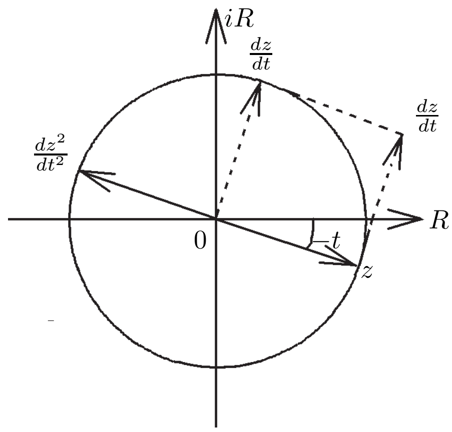
$$(\lambda^2+1)e^{\lambda t}=0 \text{ 與 } (\lambda^2+1)e^{2\lambda t}=0$$

因為對於任何 (實或複) 數 λ; $e^{\lambda t}, e^{2\lambda t}\neq 0$ 而有

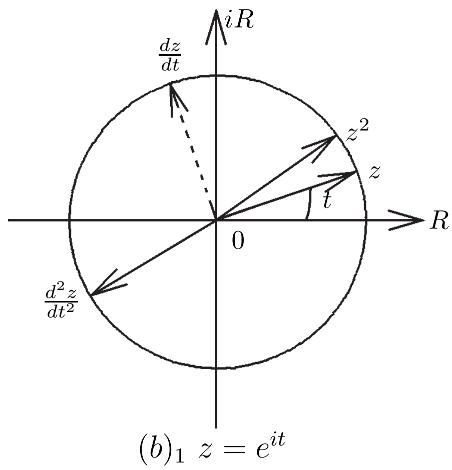
$$\lambda^2+1 \;=\; 0 \tag{39}$$



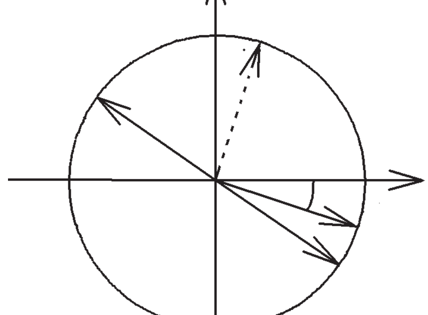
$(a)_1\ z=e^{it}$



$(a)_2\ z=e^{-it}$



$(b)_1\ z=e^{it}$



$\frac{dz}{dt}$

$(\frac{dz}{dt})^2$

R

0 $-t$

z

z^2

$(b)_2\ z = e^{-it}$

圖 一

註:方程 (37) 與 (38) 之幾何解在圖一中分別爲 $(a)_1$, $(a)_2$;$(b)_1$,$(b)_2$ 所示。圖解中僅僅利用單位圓 e^{it} (與 e^{-it})。事實上, 任何非零半徑之圓, 將提供相同之結果。

解 (39) 得 $\lambda = i, -i$; 因此 (37) 與 (38) 之解均爲複圓函數 e^{it} 與 e^{-it} 相關之函數。(37) 之解可寫成圓函數 (或正餘弦函數)

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$$

與

$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2}$$

之疊加形式 (或線性組合) 實函數, 可是 (38) 之解則不然。質言之, 預設方程 (37) 與 (38) 解之構形均爲指數函數 $e^{\lambda t}$, 正確無訛。可是二解同源異流, 前者在動力學上的應用無往不在 (參看 [9]), 後者僅隱示尤拉公式之必需。總之, 它們解的性質有本質上之差別 (參看上節與 [9])。理論上, 解方程 (37) 與 (38) 之幾何方法與分析方法之差異, 渺乎小耶! 可是實用上的不同, 別若天壤。這一事實, 值得深思。

現在回到本節之主旨: 利用函數方程理論 (參看 [6]與 [7]) 來證明尤拉公式

$$e^{it} = \cos t + i \sin t,\ t \in R,\ i = \sqrt{-1} \quad (35)$$

爲此, 我們用正餘弦函數 (或圓函數) $\sin t$, $\cos t$。對於任何實數 t 來定義複函數 f :

$$f(t) = \cos t + i \sin t,\ i = \sqrt{-1},\ t \in R, (40)$$

由於 $f(x) = \cos x + i \sin x$, $f(y) = \cos y + i \sin y$ 而有

$$\begin{aligned} & f(x)f(y) \\ = \ & (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) \\ = \ & \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ & + i(\cos x \sin y + \sin x \cos y) \\ = \ & \cos(x+y) + i \sin(x+y) \\ = \ & f(x+y) \end{aligned}$$

又自 (40) 得

$$f'(t) = -\sin t + i \cos t \qquad (41)$$

自 (40) 與 (41) 得 $f(0) = 1$, $f'(0) = i$。

綜合上述, 求證尤拉公式 (35) 轉化爲求解下列帶附加條件的函數方程式:

$$f(x+y) = f(x)f(y);\ x, y \in R \qquad (42)$$

與

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = i \qquad (43)$$

雖然函數方程 (42) 之解可自 [6],[7]查得, 但求解函數方程 (42)-(43) 是第一次在文獻中

提出的。此外爲了使本文自給自足, 並使數季的讀者親睹一度 (1950-1980三十年間) 曾在國際數學界大力研發的「函數方程理論與應用」之廬山眞面目。茲條分縷析 (42)-(43) 之解法於下: (事實上, 函數方程 (參看 [6]與[7]) 結合函數不等式 (參看 [11]) 仍大有發展的空間。)

代 $x=y=t$ 入 (42) 得

$$f(2t)=(f(t))^2 \qquad (44)$$

(44) 式可以用簡單數學歸納法一般化爲

$$f(nt)=f((t))^n \text{ 或 } f(nt)(f(t))^{-n}=1 (45)$$

對於所有的自然數成立。事實上,

$$\begin{aligned} f(nt) &= f((n-1)t+t) \\ &= f(n-1)t)f(t) \\ &= (f(t))^{n-1}f(t)=(f(t))^n \end{aligned}$$

再對於任何自然數 n, 自 (42)、(43) 與 (45) 得

$$\begin{aligned} f(-nt) &= f(-nt)f(nt)(f(t))^{-n} \qquad (45)_{-n} \\ &= f(-nt+nt)(f(t))^{-n} \\ &= f(0)(f(t))^{-n} \\ &= (f(t))^{-n} \end{aligned}$$

合併 (45) 與 $(45)_{-n}$ 得

$$f(nt)=(f(t))^n \qquad (46)$$

對於任何整數 n, 任何實數 t 成立。

在 (46) 中令 $t=1/n$ 得

$$\begin{aligned} f(\frac{1}{n}) &= (f(\frac{1}{n}))^{n\frac{1}{n}} \\ &= (f(n\frac{1}{n}))^{\frac{1}{n}}=(f(1))^{\frac{1}{n}} \qquad (47) \end{aligned}$$

對於任何非零整數 n 成立。自 (46) 與 (47) 得

$$\begin{aligned} f(\frac{m}{n}) &= f(m(\frac{1}{n}))=(f(\frac{1}{n}))^m \qquad (48) \\ &= ((f(1)^{\frac{1}{n}})^m=(f(1))^{\frac{m}{n}} \end{aligned}$$

對於任何整數 m、n (且 $n\neq 0$) 成立。對於任何實數 t, 由於有理數在實數場 R 中之稠密性 (處處稠密 dense everywhere), 存在一歌西有理數列 (Cauchy rational sequence)(或基本有理數列) $\{m/n)_l\}_{l=1}^{\infty}$ 使

$$\lim_{l\to\infty}(\frac{m}{n})_l=t$$

因此, 利用函數 f 及相關函數之連續性與 (48), 即得

$$\begin{aligned} f(t) &= f(\lim_{l\to\infty}(\frac{m}{n})_l)=\lim_{l\to\infty}f((\frac{m}{n})_l) \\ &= \lim_{l\to\infty}(f(1))^{(\frac{m}{n})_l}=(f(1))^{\lim_{l\to\infty}(\frac{m}{n})_l} \\ &= (f(1))^t \end{aligned}$$

此處 $f(1)$ 爲一常數, 記 $f(1)=k$ (事實上, 自 (35) 逕知 $k=\cos 1+i\sin 1$)。如是求得函數方程 (42) 之一般解爲

$$f(t)=k^t, \quad t\in R \qquad (49)$$

此處 k 爲待定之常數。再利用函數 f 之可微性將 (49) 對 t 求導函數

$$f'(t)=k^t\ln k \qquad (50)$$

在 (50) 中令 $t=0$ 且應用 (43) 得

$$i=f'(0)=\ln k$$

從而

$$k=e^i$$

尤拉公式 (35) 如是證畢。

再者, 利用微分方程存在唯一定理建立尤拉公式 (35), 自 (40) 與 (41) 即得下列一階常微分初值問題

$$\frac{df(t)}{dt} = if(t) \tag{51}$$

與

$$f(0) = 1 \tag{52}$$

自 (51) 與 (52) 即得

$$f(t) = e^{it}$$

我們已知 (或驗證)

$$f(t) = \cos t + i\sin t$$

爲初值問題 (51)-(52) 之另一解。依據微分方程唯一定理 (參看 [2]58-61頁以詳細節) 我們建立

$$e^{it} = \cos t + i\sin t$$

此即尤拉公式 (35) 之另一證明。

作爲本節終結, 爲了與前兩節的解法作一比較, 我們在此提出另一綜合解法, 因此我們必須有尤拉公式

$$e^{it} = \cos t + i\sin t \tag{35}$$

及實複函數的初等關係, 諸如當 y 爲實函數, $\bar{y} = y$ 此處 $\bar{y}$ 是函數 y 的共軛函數。如是, 問題 (1) 當可求解於下: 應用 (4) 與 (5) 中所列舉一元二次方程 (3) 的根 λ_1, λ_2, 與係數 p, q 關係, 在 (1) 中
令 $p = -\lambda_1 - \lambda_2$, $q = \lambda_1\lambda_2$

再乘以 $e^{-\lambda_1 t}$ 經歷四步簡率的運算得

$$[e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}(ye^{-\lambda_2 t})']' = e^{-\lambda_1 t}f(t) \tag{53}$$

首先, 考慮 $p^2 - 4q \neq 0$ 的情形 $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ 在 (53) 中令 $t = s$ 再自 0 到 t 積分得

$$e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}(ye^{-\lambda_2 t})' = c_1 + \int_0^t e^{-\lambda_1 s}f(s)ds$$

或

$$\begin{aligned}(ye^{-\lambda_2 t})' \\ = c_1e^{-(\lambda_2-\lambda_1)t} + e^{-(\lambda_2-\lambda_1)t}\int_0^t e^{-\lambda_1 s}f(s)ds\end{aligned} \tag{54}$$

同理 (54) 再積分得

$$\begin{aligned}ye^{-\lambda_2 t} &= \frac{c_1}{\lambda_1-\lambda_2}[e^{-(\lambda_2-\lambda_1)t} - 1] + c_2 \\ &+ \int_0^t \left(\int_0^x e^{-\lambda_1 s}f(s)ds\right)d\left[\frac{e^{(\lambda_1-\lambda_2)x}}{\lambda_1-\lambda_2}\right]\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}y &= A_1e^{\lambda_1 t} + A_2e^{\lambda_2 t} \\ &+ \int_0^t \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}[e^{\lambda_1(t-s)} - e^{\lambda_2(t-s)}]f(s)ds\end{aligned} \tag{55}$$

此處 $A_1 = c_1/(\lambda_1-\lambda_2)$, $A_2 = c_2 - c_1/(\lambda_1-\lambda_2)$ 最後一項是上面重積分利用部分積分推演約簡之結果。其次, 考慮 $p^2 - 4q = 0$ $(\lambda_1 = \lambda_2)$ 的情形, 我們必須將 (55) 式整理通過極限 (或利用 L'Hôpital 規則) 而得預期之結果。事實上, 在 (55) 中令 $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = \alpha$ 即得

$$\begin{aligned}y &= \frac{c_1(e^{\lambda t} - e^{\alpha t})}{\lambda-\alpha} + c_2e^{\alpha t} \\ &+ \int_0^t \frac{1}{\lambda-\alpha}[e^{\lambda(t-s)} - e^{\alpha(t-s)}]f(s)ds\end{aligned} \tag{56}$$

當 $\lambda \to \alpha$ (56) 的極限爲

$$\begin{aligned}y &= c_1te^{\alpha t} + c_2e^{\alpha t} \\ &+ \int_0^t (t-s)e^{\alpha(t-s)}f(s)ds\end{aligned} \tag{57}$$

對 $p^2-4q>0$ 的情形, 我們只要用雙曲線正餘弦函數代替指數函數 (見 [1],496頁) 及對 $p^2-4q<0$ 的情形, 應用公式 (35) 與 $\bar{y}=y$, 其結果 (24) 與 (34) 均可自 (55) 輕易導出; (57) 與 (29) 一致一目了然。

五. 一則應用

關於二階常係數線性非齊次常微分方程 (1) 解法之重要, 顯示於它在工程方面多元化的應用; 諸如初值問題、邊值問題。一般解邊值問題難於解初值問題。作爲一例, 求方程 (1) 且滿足邊界條件

$$y(0)=y(a)=0 \tag{$1'$}$$

(本假設不失一般性見 [2],167頁)

(在此令未知函數 y 在區間 $[0,a]$ 上定義) 之解。因爲 (1) 之一般解在三節已求得於下:

$$\begin{aligned}
y &= k_1e^{\alpha t}\cosh\gamma t+k_2e^{\alpha t}\sinh\gamma t\\
&\quad +\frac{1}{\gamma}\int_0^t e^{\alpha(t-s)}\sinh\gamma(t-s)f(s)ds\\
y &= k_1e^{\alpha t}+k_2te^{\alpha t}\\
&\quad +\int_0^t(t-s)e^{\alpha(t-s)}f(s)ds\\
y &= k_1e^{\alpha t}\cosh\beta t+k_2e^{\alpha t}\sinh\beta t\\
&\quad +\frac{1}{\beta}\int_0^t e^{\alpha(t-s)}\sinh\beta(t-s)f(s)ds
\end{aligned}$$

在上列三式中分別代入邊界條件 $(1')$ 得

$$k_1=0 \tag{58}$$

$$k_2=\begin{cases}
-\frac{1}{\gamma\sinh\gamma a}\int_0^a e^{-\alpha s}\sinh\gamma(a-s)f(s)ds,\\
\qquad p^2-4q>0\\
-\frac{1}{a}\int_0^a(a-s)e^{-\alpha s}f(s)ds,\\
\qquad p^2-4q=0\\
-\frac{1}{\beta\sinh\beta a}\int_0^a e^{-\alpha s}\sin\beta(a-s)f(s)ds,\\
\qquad p^2-4q<0
\end{cases}$$

代 (58) 入上式經過簡單且率直的演算即得邊值問題 $(1)-(1')$ 之解

$$y=\int_0^a G(s,t)f(s)ds \tag{59}$$

此處

$$G(s,t)=\begin{cases}
G_\gamma(s,t), & p^2-4q>0\\
G_\alpha(s,t), & p^2-4q=0\\
G_\beta(s,t), & p^2-4q<0
\end{cases}$$

其中

$$G_\gamma(s,t)=\begin{cases}
-\frac{\sinh\gamma s\sinh\gamma(a-t)}{\gamma\sinh\gamma a}e^{\alpha(t-s)},\\
\qquad 0\le s\le t\\
-\frac{\sinh\gamma t\sinh\gamma(a-s)}{\gamma\sinh\gamma a}e^{\alpha(t-s)},\\
\qquad t\le s\le a
\end{cases}$$

$$G_\alpha(s,t)=\begin{cases}
-\frac{s(a-t)}{a}e^{\alpha(t-s)},\\
\qquad 0\le s\le t\\
-\frac{t(a-s)}{a}e^{\alpha(t-s)},\\
\qquad t\le s\le a
\end{cases} \tag{60}$$

$$G_\beta(s,t)=\begin{cases}
-\frac{\sinh\beta s\sinh\beta(a-t)}{\beta\sinh\beta a}e^{\alpha(t-s)},\\
\qquad 0\le s\le t\\
-\frac{\sinh\beta t\sinh\beta(a-s)}{\beta\sinh\beta a}e^{\alpha(t-s)},\\
\qquad t\le s\le a
\end{cases}$$

顯而易見 $\lim\limits_{\gamma\to 0}G_\gamma(s,t)=\lim\limits_{\beta\to 0}G_\beta(s,t)=G_\alpha(s,t)$。

(59) 中所使用的部分被積函數 $G(s,t)$ 是解邊值問題所必須之格林函數。關於一般

格林函數在求解常與偏微分方程邊值問題之應用, 自成一格, 研討申述將大大超出本文範疇 (參看 [2]以詳之)。可是對於問題 (1) − $(1')$ 之解 (59) 結合已知函數 $f(t)$ 之實際運算, (60) 中所示各情形下之格林函數 $G_\gamma(s,t)$、$G_\alpha(s,t)$、$G_\beta(s,t)$ 是我們所需要的全部資料庫了, 勿須外求。

六. 結論

創立三百餘年的微積分學本來就是發展百年有餘微分方程問題求解之基礎 (參看 [8]); 今後配合符號運算 (參看 [5]) 之研發, 將更能有利於兩者教學之連續性與互補性。

本文以二階常係數線性非齊次常微分方程問題 (1) 爲中心, 提出簡率綜合新解法, 與已知解法作比較, 以期縮短微積分學與微分方程教程之距離。各節推演以程序化爲原則, 如能結合可用之電腦軟體, 則將便利應用。

微積分學也好, 微分方程也好, 如能早有複數與複函數之參與, 推導演算將能事半功倍。比照三、四節之結果可見一般。研究「系統工程學」, 複函數更是必要之工具 (參看 [3],[4]與 [9]以明細節與眞象)。

在第三節中提出齊次方程 (2) 之兩種新解法: 方法之一可以直接推廣到解非齊次方程 (1); 而另一方法則否。該事實值得品味。因此, 在第四節開始, 以幾何方法分別說明簡諧運動方程 (37) 與其相關非線性方程 (38) 之異同。從而用函數方程方法與微分方程存在唯一定理方法重建尤拉公式 (35): 在初等微積分學與高等數學兩方面均爲不可或缺之工具; 亦即本文所必要的複函數型解, 以窺全貌。

值得一提的似是題外之話是: 函數方程 (參看 [6]與 [7]) 作爲應用數學分野之論題, 如能結合函數不等式 (參看 [11]), 仍大有研究發展之空間。

我們應知道二階變係數方程解法

$$a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_2(x)y=F(x) \tag{i}$$

是與二階常係數方程(1) 解法密切關連; 此處 $a_0(x),a_1(x),a_2(x)$ 與 $F(x)$ 均爲已知相關之實函數。例如 (i) 之特例, 尤拉方程 (Euler's equation):

$$a_0x^2\frac{d^2y}{dx^2}+a_1x\frac{dy}{dx}+a_2y=F(x),\quad a_0,a_1,a_2\in R \tag{ii}$$

只要通過 $x=e^t$ 之變換,(ii) 立即轉化爲 (1)。此時

$$a_0=1,\ p=a_1-1,\ q=a_2,\ f(t)=F(e^t)$$

關於解 (i) 通常是使用無窮級數方法, 因此考慮用無窮級數解初值問題; 亦即求方程 (1) 且滿足初值條件

$$y(0)=y_0,\quad y'(0)=y_1 \tag{$1''$}$$

之解。爲了下面敍述方便在此將 (1) 改寫爲

$$y''-py'-qy=f(t)$$

從而

$$y^{(j+2)}-py^{(j+1)}-qy^{(j)}=f^{(j)}(t),\quad j=0,1,\ldots \tag{iii}$$

我們知道未知函數 $y(t)$ 與已知函數 $f(t)$ 之泰勒級數為

$$y(t)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{y_j}{j!}t^j,\ f(t)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{f_j}{j!}t^j \qquad \text{(iv)}$$

此處 $y_j=y^{(j)}(0)$, $f_j=f^{(j)}(0)$,
$j=0,1,\ldots$

自 $(1'')$ 與 (iii) 利用遞迴關係 (recurrent relation) 再結合 (iv) 即得

$$y(t)=y_0u_1(t)+y_1u_2(t)+y_p(t) \qquad \text{(v)}$$

此處

$$\begin{aligned}u_1(t) &= 1+\frac{1}{2!}qt^2+\frac{1}{3!}pqt^3\\ &\quad+\frac{1}{4!}q(p^2+q)t^4+\cdots\\ u_2(t) &= t+\frac{1}{2!}pt^2+\frac{1}{3!}(p^2+q)t^3\\ &\quad+\frac{1}{4!}p(p^2+2q)t^4+\cdots\end{aligned}$$

與

$$\begin{aligned}y_p(t) &= \frac{1}{2!}f_0t^2+\frac{1}{3!}(pf_0+f_1)t^3\\ &\quad+\frac{1}{4!}[(p^2+q)f_0+pf_1+f_2]t^4+\cdots\end{aligned}$$

注意:結果 (v) 不僅與結果 (14) 完全一致, 而且無須區分 (5),(6) 所列舉之三種情形。事實上 (v) 之結果可利用 Maple V 或 Mathematica 算得 (參看 [5]與 [12]算至千項是 (電腦軟體) 輕而易舉之事)。變係數方程 (i) 解當可如法炮製。

電腦軟體與硬體發展進步改變了人類社會之架構, 與數學淵源久遠之電腦將促成微積分學與微分方程教學之協調與整合, 此其時耶? 此其時耶!

最後值得一提的是: 世界上數學人才會聚之北美洲, 為了迎接二十一世紀科技新挑戰, 十多年前開始發動微積分教冊革新、教學革新。這雙革雙新運動雖成效不彰, 十多年後的今天仍在加速進行著 (參看 [14]、[15]、[16])。要知道微 積分作為大學課程在世界上至少有兩百年的歷史 (參看 [15]:xiii 頁, 在中國也許不滿一百年), 微積分教科書內容仍大部分保留牛頓時代的概念與傳統 (參看 [14])。時代在進步, 二十一世紀的電腦資訊時代將代替牛頓的動力學時代。微積分的全面革新將 (正) 是國際間數學教育之春秋大業: 急不得, 緩亦不得。本文與 [8]如能在「數季」— 我國數學教育革新園地上播下一粒微積分學改革的種子?! 不!較為正確的說法是: 拋出引玉的磚塊。

參考文獻

1. H. Anton, Calculus with Analytic Geometric,4th ed. John Wiley & Sons, Inc. 1992. p.368 1st, p.385 2nd。
2. L. Elsgolts, Differential equation and the Calculus of variation(translated by G. Yankovsky), MIR, Pub. Moscow, 2nd. Printing, 1973。
3. G.H. Hardy, A Course of Pure Mathematrics, 10th ed, Cambridge Union Press, 1952。
4. S.L. Ross, Introduction to Ordinary Differential Equation, 3rd ed. John Wiley & Sons, Inc.(1980)。
5. Barry Simon Symbolic Math Software. It's not Just For Mainframe Anymore, Pc Magazine, 1992, 405-433。

6. J. Aczél, Lecture on functional equations and their application, Academic Press, New Yark, 1966。
7. J. Aczél, On applications and theory of functional equations, Academic Press, New York, 1969。
8. 王中烈, 楊玉坤, 丁轉初, 談談一則不定積分問題及其 解法,「數學傳播季刊」, 19卷1期, 84年3月,85-89。
9. R.H. Cannon, Jr. Dynamics of Physical Systems, McGraw-Hill, New York, 1967。
10. J. Stewart, Calculus, 2nd, Brooker /Cole, Belmont, California, 1991。
11. Chung-lie Wang, A functional inequality and its application, Journal of Mathematical Analysis and Application, 160(1992), 247-262。
12. Carol, Leon-yun Wang, Computer Implementation of a Series Solution for Constant Coefficient Ordinary Differential Equations, to be submitted。
13. Carl B. Boyer, A History of Mathematics, John Wiely , New York, 1968。
14. R.G. Douglas(Editor), Tower a Lean and Lively Calculus, MAA Notes Number 6, The Mathematical Association of America, 1986。
15. L.A. Steen, Calculus for a New Century, A Pump Not a Filter, MAA Notes Number 8, The Mathematical Association of America, 1988。
16. Focus on Calculus, Issue No.5, Fall 1993, by John Wiely & Sons, Inc., 605 Third Ave., New York, pp.1-8。

—王中烈, 加拿大國雷吉那大學榮譽教授, 現任教於中正理工學院兵器系。楊玉坤, 任教於中正理工學院基礎課程系。丁轉初, 任教於中正理工學院兵器系。—