

# 五十年數學教育的反思

陳振宣

屈指算來，黑板生涯將滿五十春秋，在這半個世紀裡，數學教育經歷了多次改革的浪潮。撫今追昔，思潮滾滾，積聚數十年的心聲，渴望一吐為快，希望能對數學教育改革有一點參考價值。

## 一．“題海戰術”的功與過

1946年秋僅有一年半教齡的我，擔任了一所大型中學的高三理科班的解析幾何教學，同時兼任高三理甲班的級任導師。當時年少氣盛，上課滔滔不絕，把各種教材上的不同內容，集眾家之長教給學生。當時採用的教材是陳懷書教授編著的復興甲種本。這是由美國數學家 Osgood 的解析幾何編譯而成。教材內容已多超出課程標準，但我還是把 Smith & Bale 和 Loney 的兩本名著的精采內容點滴不漏地講下去。當時的指導思想是“以多取勝”。認為只有掌握多而巧的解題方法，才能在考試中遊刃有餘。學生傳抄的解析幾何公式表多達一百頁以上。這種教學實際上就是“題海戰術”。學生做題經常到午夜，負擔之重可想而知。當然這不是我的“創造”，其源蓋出於當時數學教育中的傳統做法。回憶我的高中階段，各年級的數學課程都是“雙料”的，

三角既讀 Granville 的，又讀 Loney 的；大代數讀了 Fine 的，再讀 Hall & Knight 的；解析幾何讀完 Smith & Bale 的，還得讀 Loney 的。當時在孤島上海，中學林立，在大樓裡沒有操場，體育、音樂、美術課通通停開。數學每周 8-10 課時。我們這一代人，可以說是在“題海”裡泡大的。整個高中三年演算的題何止千萬。大學裡又不是念師範的，什麼教育學、心理學一無所知。擔任教職後，只知承襲自己老師的教學方法進行教學，內容不厭其詳，方法多多益善。記得當時講圓錐曲線的切線、法線，不但講割線逼近切線的極限方法，還講利用直線的參數方程和分點公式（實質上，也是直線參數方程的另一種形式），又介紹了笛卡爾求切線方程的方法。我當時要求學生從拿到題感到無辦法到有辦法；從有辦法到辦法多；從方法多到能快速找到好方法，這樣貫徹“以多取勝”的策略，取得的效果是令人“興奮”的。1947年理科甲班 28 人畢業，26 人考取名牌國立大學，如交大、清華、浙大、北洋、廈門等。1948 年的理科班考大學的結果也十分“驚人”，學生涂象初一人就考上了五所國立大學，其中有交大、清華等名校。

“題海戰術”的成果是靠花費了大量的精力，反覆練習而取得的。但是學生處於被動的地位，以記憶代替理解，以摹仿代替思索，束縛了思維的自由，扼殺了學生的創造能力，不利於身心的健康發展。記得1948年畢業的一位高材生李福岱，他考取幾所國立大學與海軍學院，但考完後患了肺結核吐血，喪失了進入大學深造的機會。這實在是“題海戰術”的“罪過”。

## 二. “雙基”教學的得與失

1950年代到1960年代初，提倡向蘇聯學習，號召教師加強基礎知識與基本技能的教學，即所謂落實雙基。1949年前的數學教學重方法輕概念。自從向蘇聯學習後，促使教師重視概念教學與學習教學理論。當時在各數學期刊上探討數學概念教學的文章達百餘篇，反映了當時數學教育的概貌。這樣做帶來的結果是：

1. 教師開始重視數學概念與原理，提高了數學修養。就我個人來說，爲了探索解不等式的教學，終於發現解初等不等式的通法。1982年又提出了連續函數的第二條性質定理。廣大教師努力鑽研業務，成果累累，這些都是強化“雙基”教學的結果。
  2. 注意對學生學習方法的引導，重視對學生獨立思考能力的培養，教學效果也有了相當的提高。我所任教的學校是一所小型的普通完全中學，學生來源並不理想。然而還是出了不少相當優秀的學生。
- 以上兩點可算是“雙基”教學的“得”吧！

3. 在強調“雙基”教學的過程中，把蘇聯10年的教學內容作爲我們十二年的課程，不能越雷池一步，無形中降低了學生的知識水平，此“失”之一也。
4. 在具體的運作上，由於對“雙基”中的基本技能理解得過於狹隘，把數學教學當作單純的知識傳授，忽視了思維能力的提高，以致在1976年以後，使“題海戰術”死灰復燃。

## 三. 進入數學思維素質培養的新天地

1970年代末高考競爭開始激烈，高考命題的難度逐漸上升，“題海戰術”愈演愈烈。數學教育一方面對“題海戰術”造成學生高分低能深痛惡絕，另一方面爲了應付考試又不得不大搞“題海戰術”，坊間習題集、測驗卷鋪天蓋地，學生陷入了做不完的作業之中，教育領導部門屢禁不止。

進入1980年代之初，世界數學教育改革經歷了新數運動由興到衰的變化。數學教育工作者逐漸認識到在數學教育中，應把培養學生的數學思維的能力放在首位，不能局限於單純的知識傳授。如何提高學生的思維能力，成爲世界各國研究的重點。

爲了擺脫“題海戰術”的束縛，不得不下“海”探索一番。我們決定以改革的精神自編「數學題解辭典」，我擔任了解析幾何卷的責任編委 [1]。我們分析題型、精選題目、講究提法、探求解題思路，並按知識點組織題組，選好例題，以上述幾點精神，對例題詳加分

析,以收舉一反三之效。為以後對數學思維方法的研究積累了素材。

此時,錢學森先生正倡導思維科學的研究,我結合自己的數學教學的經驗,對數學思維方法作了初步的歸納,後又學習了G.Polyá的「怎樣解題」[2]、「數學的發現」[3]、「數學與猜想」[4],使認識有了更深度的發展。我剖析了大量高考試題,在數學思維方法的研究上有了一些進展。並於1985年出版了「中學數學思維方法」[5]。此後研究逐步深入,陸續出版了「初中數學解題思維方法導引」[6]、「數學思想方法入門」[7](上海市選修教材)、「高考中常用的數學思想方法」[8],初步建立了數學思維方法的理論框架。「高考中常用的數學思想方法」在「中學生數理化」上連載了一年多;在全國許多地方的講學,也都獲得了積極的反響。

進入1990年代,世界上發達國家對數學教育的改革日益重視,而國內的題海氾濫卻愈演愈烈,坊間已很難看到練習冊與測驗卷以外的著作,於是將應試教育改革為素質教育的呼聲逐漸增強。但是如何完成這種轉變,仍是一項艱巨的工程。

從1990年代以來,我著重研究了什麼是數學素質?確定數學素質的主變量是什麼?1989年我提出“關於數學思維能力結構的一個猜想”[9],1992年又提出“提高數學素質的幾點設想”[10],接著在「高考數學命題研究與試題評析」[11]中對確定數學素質的三個主變量作了進一步闡述。1993年在上海市新學科研究所建立了“數學素質教育與智能開發的研究”課題組,在十幾所中學裡開展實

驗,目前已初見成效,研究正向縱深發展。我體會出確定數學素質的如下三個主變量:

## 1. 數學知識與數學語言

數學知識和數學研究成果的傳輸交流都離不開數學語言。運用數學知識解決實際問題,更離不開數學語言這一思維載體。知識藉書面語言流傳後世,思維依附於語言(物質外殼)才能流暢地進行。數學知識和數學語言是密切相關又難以分割的。

數學語言,狹義地說,是指數學符號語言;廣義地說,一切用以反映數量關係和空間形式的語言,都是數學語言。在數學教科書裡,它有三種形態:自然語言(包括口頭的、文字的普通語言。這是理解概念與原理的基礎);符號語言(這是簡縮思維,提高思維效率的根本);圖象語言(這是形象思維的載體)。同一數學研究對象,往往可用不同的語言形態表達。不同語言形態的互譯能力是數學的基本能力之一。不少數學問題的解決,實質上不過是不同語言形態的互譯而已。數學思維活動多是無聲的數學語言活動,流暢的數學思維建築在嫻熟的數學語言的基礎上。這就是數學知識與數學語言是數學素質的第一個主變量的道理。

## 2. 數學思維方法

如何才能自如地運用數學知識與數學語言,發揮它的最大效用呢?除了熟練掌握它的技能外,還要善於概括領會數學思維方法。解決問題的過程,正是艱苦思考的過程。如何找到解決問題的突破口,這要靠科學的思維

方法。人們往往不注意從思維高度去概括數學思維方法，把一些難題的巧妙解法歸之於聰明人的偶然頓悟，不明其規律何在，無以名之，一律稱之為“技巧”，難怪學生不易掌握。其實，經過仔細剖析，上升到思維高度加以概括，無非是自覺或不自覺地運用了正確的數學思維方法的緣故。這正說明數學思維方法是又一個主變量。

### 3. 情感因素

人是有感情的。人的思維總是伴隨著情感的發展變化而同步進行。從大量智力測試發現，人的思維能力既可受情感因素的激勵獲得超常發揮，也可因它的干擾而產生失常表現。但由於把智力因素與情感因素割裂開來考察，將興趣、意志、品格……等心理素質與智力因素對立起來，把它們統稱為非智力因素，因而將之從智力因素中排除出去，這實在是莫大的誤解。實際上，人的智能不單與智力因素有關，同時和情感素質也是息息相關的。所以把情感因素列為確定數學素質的第三個主變量，逐漸為人們所理解。在“數學素質教育與智能開發的研究”課題組內，正在通過數學的實際應用，趣題妙解，數學美的欣賞，數學家獻力於科學事業的故事等等去激發對數學的興趣，培養持之以恆的毅力，善於思考的習慣和強烈的探究慾等品質。

除了以上論述的三個主變量之外，近年來，有人發現畫圖能力、識圖能力、計算機操作等能力也與數學素質有關，這方面的研究尚有待於進一步探索。

五十年的數學教育實踐，走過不少彎路，現雖年已古稀，仍在課題組內和第一線的年

輕教師一起“跌”、“爬”、“滾”、“打”，共同探索提高數學素質的規律。研究正在深入，認識還在發展。我常有“今是而昨非”之感。希望有更多的年輕教師及時投入研究，不斷深入，早日取得突破，為數學素質教育的理論基礎添磚加瓦，為中華民族的教育事作出更大的貢獻。

### 參考文獻

1. 責任編委與主要編寫人陳振宣，數學題解辭典：解析幾何卷，上海辭書出版社，1983年6月第一版，1994年1月第三次印刷。
  2. G.Polyá, 怎樣解題，台灣九章出版社有中譯本。
  3. G.Polyá, 數學的發現，台灣九章出版社有中譯本。
  4. G.Polyá, 數學與猜想，台灣九章出版社有中譯本。
  5. 陳振宣等編著，中學數學思維方法，上海科技教育出版社，1985年7月第一版，1990年4月第二次印刷。
  6. 陳振宣等編著，初中數學解題思維方法導引，上海科技教育出版社，1990年3月。
  7. 陳振宣著，數學思想方法入門，上海市中小學課程教材改革委員會辦公室印。
  8. 陳振宣、陳永箴著，高考中常用的數學思想方法，中國青年出版社，1993年12月第一版。
  9. 陳振宣，關於數學思維能力結構的一個猜想，中學數學教學，上海師大，1989年第5期。
  10. 陳振宣，提高數學素質的幾點設想，中學數學教學，上海師大，1992年第2期。
  11. 陳振宣等編著，高考命題研究與試題評析，上海科技教育出版社，1992年3月第二版。
- 本文作者是中國管理科學研究院思維科學研究所、上海市新學科研究所思維科學研究室的研究員。—