整函數的因子分解簡介

楊重駿

一. 導言

所謂一個整函數 $f(z)$ 是指 f 在整個複平面 C 上爲解析的 (或正則的) 複數函數。整函數的因子分解論是研究一個給定的整函數能否將它表成兩個或兩個以上非線性整函數的複合? 這方面的研究是近二、三十年來的事, 但其動機則與研究函數遞代 (iteration) 的不動點, 即現今的複動力系統相關的。

早在1926年法國數學家法都 (P.Fatou) 就聲稱, 任何一個非線性整數 $f(z)$ 其二次遞代 $f(f)$ 至少有一個 (有限的) 不動點 z_0, 即 $f(f(z_0)) = z_0$。

直到1952年美數學家羅森布隆 (P.C. Roserboom)[1]利用了著名的 Picard 定理 (任何一個整函數 f 若其在 C 上無法取得兩個或以上的有限值時, f 必爲一常數, 注意 $f(z) = e^z$ 在 C 上不取 0 値) 對 Fatou 的聲稱作了如下的證明:

假定 $f(f)$ 無不動點, 即 $f(f(z))-z \neq 0$, 立即我們可以推知 $f(z) - z \neq 0$, 因不然 $f(z_0) = z_0$ 則由此導至 $f(f(z_0)) = f(z_0) = z_0$, 於是 z_0 爲 $f(f)$ 的一個不動點的矛盾。從而我們可知

$$F(z) = \frac{f(z) - z}{f(f(z)) - z}$$

爲一整函數, 因分母恆不爲 0。

易見 $F(z) \neq 0$ 及 $F(z) \neq 1$。據 Picard 定理知 $F(z)$ 必爲一常數, 設爲 a 且 $a \neq 1$ 及 0, 從而

$$a[f(f(z)) - z] = f(z) - z$$

兩邊微分, 可得

$$a[f'(f)f' - 1] = f'(z) - 1$$

或

$$f'(z)[af'(f(z)) - 1] = a - 1 \neq 0$$

於是 $f' \neq 0$ 及 $f'(f(z)) \neq \frac{1}{a}$ 或 $f' \neq \frac{1}{a}$。此導至 f' 爲一常數, 即 f 爲一線性式, 與假設不符。

在同一文 [1]中, Rosenbloom 利用了由內伐里納 (R.Nevanlinna) 在1920年代創獲的値分布論 (參看 [2]) (Value distribution thery), 對 $f(g)$ 兩個整函數

f, g 的合成函數的不動點作了些數量性的刻劃, 而事實上, 研究值分布論的動機也就是想繼 Picard 定理一種存在性的成果作進一步數量上的刻劃。重要的是值分布論是它能對亞純函數的探討。所謂亞純函數 (meromorphic function) 是指具 f/g 形式的函數, f, g 皆爲整函數, 對這樣一個函數 $F(z)$ Nevanlinna基於 Poisson-Jensen 公式引進了一個所謂的正實性的特徵函數 (characteristic function) $T(r, F)$, 其具有如同 $\log M(r, F)$ (F 爲整函數時) 的許多重要性質, 如爲 r 的一連續函數, $r = |z|$ 及爲 $\log r$ 的漸增凸函數等。由此可用 $T(r, F)$ 來刻劃一個亞純函數的增長。而值分布論的第一基本定理就是說對任何一個值 a(可爲 ∞)。方程: $F(z) = a$ 之解在 C 上的多少或分布密集情況可由 $T(r, F)$ 來作界定, 而第二基本定理大意說對任何一個非常數的亞純函數 $F(z)$, 其至多有可列個 (Countable) 虧值, 且它們的虧量總和不大於2。

這兒所謂 F 的虧值 a 是指 $F(z) = a$ 之解的某種平均意味下所定出的計數函數 (Counting function)$N(r, \frac{1}{f-a})$ 與 $T(r, F)$ 的相比的上極限小於1, 而相應之值:

$$1 - \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{N(r, \frac{1}{F-a})}{T(r, F)} = \delta(a)$$

則稱爲 a 值的虧量,(所以第二基本定理又可表爲 $\sum_{a\in\bar{C}} \delta(a, F) \leq 2$; 其中 $\bar{C} = C \cup \infty$)。

特別若 F 不 取值 a_1, a_2, a_3, 則 $N(r, \frac{1}{F-a_i}) = 0, i = 1, 2, 3$。於是 $\delta(a_i, F)$, 因而 $\sum \delta(a_i, F) \geq 3$ 此爲不可能, 除非 F 爲一常數, 這也是 Picard 定理明顯的改進。值得一提的是虧值的討論可推廣到小函數上去, 我們稱 $a(z)$ 爲 $F(z)$ 的小函數是指 $\lim_{r\to\infty} T(r, a(z))/T(r, F(z)) \to 0$。

一開始內伐里納 (Nevanlinna) 就料想第二基本定理對小函數亦成立 (這一個證明中國數學家庄圻泰敎授很早就作了奠基性的工作, 直到 1986年才由史坦米茲 (N.Steinmetz) 作了完備的證明 [5]。一個此方面簡單的應用, 譬如我們知 e^z 不取零值, 所以對任何它的小函數 (特別是任意多項式或有理函數) $a(z)$, 如 $(z^2+z)(2z+5)e^{z^2} - (z^2+z)/(2z+5)$ 必有解且其解爲無窮多個。這些也大致可以用來說明爲何值分布論可用來在取值數量方面作進一步量的刻劃了, 特別 Rosenbloom 在 [1]中得到了下面兩個有趣的結果:

定理 A: 設 f, g 爲兩個超越整函數 (即非爲多項式), 則 f 或 $f(g)$, 兩者之一必具有無窮多個不動點。

定理 B: 設 $p(z)$ 爲一非線性多項式, $f(z)$ 爲一超越整函數, 則 $p(f)$ 必有無窮多個不動點。

在 [1]中 Rosenbloom 引進入所謂的"素函數"(Prime function) 之概念, 他定義一個整函數 $F(z)$ 若它表成兩個整函數 f 及 g 之複合 $F = f(g)$ 時, 必導致因子 f 或 g 必爲線性函數。當時他只提及 $e^z + z$ 爲一素函數, 並沒給予證明, 但聲稱證明相當繁複。此一證明由格羅斯-貝克 (F. Gross & I. N. Baker) 在1968年發布 [3]。

他們推廣並證明對任意非常數多項式 $p(z)$, $e^z + p(z)$ 爲素函數, 之後 Gross 把此概念推廣到亞純函數的分解並引進了一個重要的輔助概念“擬素函數””(Pseudo-prime)[4]。爲簡明起見, 我們在此只考慮整函數及因子爲整函數的情形, 我們稱一個整函數 $F(z)$ 爲擬素的是指任何 $F = f(g)$; f, g 整函數的分解必導致 f 或 g 爲多項式的結論。所以如果要證明一個整函數 F 爲素函數, 首先證明其爲擬素的, 即 F 只可能有 $f(p)$ 或 $p(f)$, p 爲多項式的分解, 並進一步證明 p 爲一次式就得了。

現我們再回來看一下素函數 $F(z) = e^z + z$ 有些什麼性質。(1) F 沒有不動點。(2) $F'(z) = e^z + 1$ 具有一 Picard 例外值1, 即 F' 不取值1。(3) $F(z)$ 滿足一係數爲多項式的線性微分方程式: $F'(z) - F(z) = 1 - z$。(4) F 的零點分布漸近於虛軸, 即集中在固定的有限條的半射線旁。(5) $F(z + 2\pi) - F(z) = 2\pi i$, 即 $F(z)$ 爲以多項式爲模的擬週期函數, 這幾個性質曾用來建立或建造素函數簇及擬素函數的充分條件。過去二十多年來分解論的進展可說仍是在起步中, 缺乏完備性的結果, 尤其在分解唯一性方面的研究仍待努力, 但即使如此林林總總也有了不少的有關論文及專者的發表及印行。最近在筆者及學生, 同仁的合作下也把有關的一些現有結果推廣到多複變亞純函數或亞純映射的分解, 參看 [6],[12],[13],[14]。隨著這些研究值分布論得以更加充實, 在此我們僅例舉一些素函數或擬素函數的證明及敍述一些重要的結果。希望經由此介紹引起更多讀者的研究興趣, 作出貢獻。

二. 整函數的一些重要性質及分解論結果

我們是用什麼規則來處理分解性的問題呢? 一般說來探討任意一個整函數的因子分解是非常困難的。但注意在萬千個可能的因子分解或合成中, 這些因子與該函數本身一定有某種相關性。拿整數論來看吧! 如果我們要想看一個給定的整數 N 能否分解成 $N = a \times b$, 則 a 與 b 的大小一定不會超過 N 是先決條件。同樣地在分解論當中, 任何一個因子的增長性 (growth) 或大小也 一定受制於它們所合成的函數。這個構想是具關鍵性的。

下面兩個輔理對此作了具體的刻劃。

輔理1: (Polya,[7]) 設 $f(z), g(z), h(z)$ 皆爲整函數及 $f(z) = g(h(z))$ 及 $h(0) = 0$ (並不一定需要此條件), 則存在一常數 c, $0 < c < 1$ 使得對任何 r 值

$$M(r, f) = M_f(r) \geq M_g(cM_h(r/2))$$

其中 $M(r, f) = M_f(r) = \max_{|z|\leq r} |f(z)|$, 即 f 的最大模函數。

對一個整函數 $f(z)$, 我們以值 $\lim_{r\to\infty} \log\log M(r, f)/\log r$ 定爲 f 的級, 例如 e^z 的級爲1。

輔理2: (Polya[7]) 設 $f(z)$ 及 $g(z)$ 爲兩個整函數, 若其合成的函數 $f(g(z))$ 爲有限級的, 則或者 $g(z)$ 爲一多項式, f 爲一有限級的函數, 或 g 爲一非多項式有限級的函數及 f 爲零級的。

由整函數的表示式定理, 我們可推知:

輔理 3: 任何一個非爲多項式的整函數若其級爲有限的且爲非正整數, 則其必有無窮多個零點。

特別一個零級的超越整函數必有無窮多個零點。

當一個函數的零點分佈具有特殊的聚集性時, 我們有如下的結果。

輔理 4: (任福堯 [8]) 設 $f(z)$ 爲一整函數, $\{a_n\}$ 爲一序列的值, $|a_n| \to \infty$。若除了有限個點外, 所有的解: $f(z) = a_n$, $n = 1, 2, \ldots$ 聚集在 q 條半射線旁或其上, 則 $f(z)$ 必爲一多項式, 其次數 $\leq 2q$。

這兒我們稱解的集合聚集在 q 條半射線是指這些解的幅角 $\in [0, \pi]$, 以 q 個方向爲聚點。

定理 1: 設 $F(z)$ 爲一整函數其級爲有限的, 若 $F(z)$ 的零點聚集在有限條半射線旁或其上, 則 F 爲擬素的。

證明: 設 $F(z) = f(g(z))$, f, g 爲兩整函數, 若 f 爲一多項式, 則證明告畢。今設 $f(z)$ 爲超越的, 則依據輔理 2, f 必爲零級的, 因而依輔理 3, f 具有無窮多個零點, 設其爲 $\{a_n\}$ 則 $F(z)$ 的零點集合與集合 $\bigcup_{i=1}^{\infty}\{g(z) = a_i\}$ 相一致。

今依假設後者的幅角聚集在有限條的半射線上, 因此依據輔理 4, g 必爲一多項式。從而證明了 F 的擬素性。

例 1: $\sin z$ 及 $\cos z$ 皆爲擬素函數。

現我們來證明 $e^z + z$ 爲素函數。

首先我們知 $e^z + z$ 爲有限級 (級爲 1)。

今證 e^z+z 的零點聚集在虛軸。設 $\{z_n \mid z_n = x_n+iy_n, x_n, y_n$ 爲實數 $\}_{n=1}^{\infty}$ 爲 e^z+z 的零點點集,

則 $e^{z_n} = -z_n$ 及 $|e^{z_n}| = |z_n|$, 亦即 $e^{x_n} = (x_n^2 + y_n^2)^{1/2}$。

顯然, 除了有限個 n 外, $x_n \not\to -\infty$。不然有一子序列 $\{n_k\}$。使得 $e^{x_{n_k}} \to 0$ 因而 $x_{n_k}^2 + y_{n_k}^2 \to 0$。這是不可能的! 所以 x_n 終將爲正的且 $\to +\infty$ 從而 $e^{x_n} \sim |y_n|$。由此可知幅角 $\tan^{-1}\frac{y_n}{x_n} \to \frac{\pm\pi}{-2}$。

即 z_n 聚集在虛軸 (兩條半射線)。

所以依輔理 4, $e^z + z$ 爲擬素的。

現設 $F(z) = e^z + z = \rho(g(z))$, ρ 爲一多項式, g 爲一超越的整函數。於是 $p(g(z)) - z = e^z$ 這與定理 B 不符, 除非 $p(z)$ 爲一線性函數。

所以我們現來討論 $F(z) = e^z + z = g(p(z))$, 其中 p 爲一多項式, g 爲一超越整函數, 則由於 e^z+z 有無窮多個零點的事實, 我們可推知 $g(z)$ 必有無窮多個零點, 設爲 $\{a_n\}$ 則依據輔理 4, p 的次數 $\leq 2 \times 2 = 4$, 但次數爲 3 或 4 時 $\cup\{p(z) = a_n\}$ 的幅角不可能聚集在 2 條半射線 (即虛軸上), 所以 p 的次數 ≤ 2, 因而

$$F = g(az^2+bz+c) = g(a(z-\frac{b}{2a})^2+c-\frac{b^2}{4a})$$

作變數變換 $z \to -z + \frac{b}{a}$, 則上式右邊項不變, 但左邊變成 $e^{-z+b/a} - z + b/a$,

所以有

$$e^z + z = e^{-z+b/a} - z + b/a$$

或

$$e^z + 2z = e^{-z+b/a} - z + b/a$$

今考慮令 z 沿正實軸趨向無窮大, 則左方趨向正無窮大, 而右邊趨向於 b/a, 此爲不可能除非 $a=0$, 即 $p(z)=bz+c$ 爲一次式。總結不論如何, 當 $e^z+z=f(g)$ 時, f 或 g 非得爲一次式, 即 e^z+z 爲素的。

下面一個結果把不動點的研究與分解論作了很密切的結合, 也是分解論中較重大的成果之一。

定理2: 設 $f(z)$ 及 $g(z)$爲兩個非線性整函數, 且 $f(g)$ 爲超越的, 則 $f(g)$ 必有無窮多個不動點。

上式另一個說法是對任何多項式 $p(z)(\not\equiv 0)$ 及整函數 $\alpha(z)$(≢常數) 則 $p(z)e^{\alpha(z)}+z$ 爲素的。

上面的結果最早是由 Gross 以臆測提出, 經過他與筆者及其它不少複分析家的努力, 先證明了定理2對有限級整函數爲眞, 最後由 W. Bergweilen[9]配合古典的複分析理論中的 Wiman-Valiron定理對一般性 (無窮級函數) 作了證明。

下面我們介紹的是二個有關擬素性的判斷準則。

定理3: (Steinmetz[10]) 設 $F(z)$ 爲一整函數其滿足下列線性微分方程:

$$p_0(z)\omega^{(n)}(z)+p_1(z)\omega^{(n-1)}(z)+\cdots$$
$$+p_n(z)\omega(z)=q(z),$$

其中 $p_0(\not\equiv 0)$, $p_1,\cdots p_n$ 及 q 皆爲多項式, 則 $F(z)$ 爲擬素的。

例2: $\sin z$, $\sin z+z^2$, e^z+z^4 皆爲擬素的。

定理4: (Ozawa[11]) 設 $F(z)$ 爲一有限級整函數, 其導數 $F'(z)$ 具有無窮多個零點, 若對任何常數 d, 聯立方程:

$$\begin{cases} F(z)=d \\ F'(z)=0 \end{cases}$$

解的個數爲有限的, 則 F 爲擬素的。

例3: e^z+z^2 爲擬素的。

三. 結論

分解的概念及定義已推廣到複流型 (complex manifolds) 間或多變數亞純函數上去並得到有關上面定理 2,3,4 的結果,[12],[13],[14]。最近筆者和 Lee Rubel 等人在有關兩個函數的最大 (右) 因子, 或最小公倍式方面的問題開啓了此方面研究之端, 得到了一些初步的結果。希望以後有時間及機會再作此方面研究進展之報導。

爲了方便讀者的參考及閱讀有關分解論研究及進展在此開列下面二本中文專著。

1. 庄圻泰, 楊重駿, 亞純函數的不動點與分解論, 北京大學出版社,1988年 (此書已由 World Scientific Publishing Co. 1990年發行英文版)
2. 楊重駿, 宋國棟, 複變函數分解論, 凡異書局, 新竹, 台灣。

參考目錄

1. P. C. Rosenbloom, The fix-points of entire functions, Medd. Lund. Univ. Mat. Sem. Suppl. Bd. M.Riesz (1952), 186-192.

2. W. K. Hayman, Meromorphic Functions, Oxford Press, 1964.
3. I. N. Baker and F. Gross, Further results on factorization of entire function, Proc. Symposia Pure Math. AMS. Providence (1968), 30-35.
4. F. Gross, On factorization of meromorphic functions, Transc. AMS. 131 (1968).
5. N. Steinmetz, Eine verallgemeinerung des zweiten Nevanlinnaschen hauptsatzes, J. Reine Angew Math. 368 (1986), 134-141.
6. C. C. Yang, Factorization theory of meromorphic functions of one and several complex variables, Complex Analysis and its Applications (edcted by C. C. Yang etc.), Pitnam Research Notes in Mathematics series, Vol. 305 (1993), 114-129.
7. G. Polya, On an integral function of an integral function, J. London Math. Soc. Vol. 1, No.12 (1926)
8. 佳福堯, A proof of the Ozawa conjecture (preprint).
9. W. Bergweiler, Proof of a conjecture of Gross concerning fix-points Math. Zeit. 204 (1990), 381-390.
10. N. Steinmetz, Eigenschaften Eindeutigen Lösunger Gewohnlicher Differential-Gleichungen in Komplexen, Karlsurhe, Dissertation, 1979.
11. M. Ozawa, On certain criteria for the left primeness of entire functions, Kodai Math. Sem. Rep. 6 (1975), 304-317.
12. P.C. Hu and C.C. Yang, Factorization of holomorphic mappings, Complex Variables, Vol. 27, 1995, pp.235-244.
13. B. Q. Li and C. C. Yang, Factorization of meromorphic functions in several complex variables, AMS. Contemporary Math. Series Vol. 142 (edited by C. C. Yang and S. Gong), 1993
14. D. C. Chang B. Q. Li and C. C. Yang, On composition of meromorphic functions in seveial complex veriables, Forum. Math. 17, (1995), 77-94.

—本文作者任教於香港科技大學—