談「天才之旅」

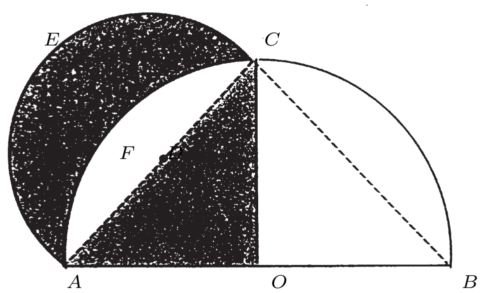
余文卿

書名: 天才之旅 — 偉大數學定理的創立
Journey Through Genius: The Great Theorems of Mathematics
原著: Willian Dunham, Penguin Books
譯者: 林傑斌, 牛頓出版社
審定: 余文卿教授

這是一本歷史性的數學書籍, 談論數學上的偉大定理及其幕後的數學天才。涵蓋的年代從西元前440年的 Hippocrates 到西元1874年的 Cantor。透過對數學上一些天才的生平傳記, 而引導出一系列的偉大數學定理, 這些定理散佈在古典平面幾何學、立體幾何學、三角學、數論以及集合論, 提到的偉大數學家共11位, 依年代次序是 Hippocrates, Euclid, Archimedes, Heron, Cardano, Newton, Bernoulli 兄弟,Euler 與 Cantor。而談到的偉大定理即是這些天才數學家的嘔心瀝血的傳世代表作。

一. Hippocrates, Euclid 與 Archimedes

Hippocrates在幾何學上有兩大主要貢獻; 一是由幾個簡單的公設出發而正確地且有邏輯地發展出有系統的幾何學定理, 是 Eulid 的巨著 Elements 的前身。另一貢獻是他建構一正方形, 使其面積等於一給定新月形的面積, 當然他考慮的新月形非常特殊, 是圓內接正方形邊上之半圓與這圓所圍的弧形區域, 如下圖所示:



注意到

> 半圓 AEC 的面積 = 四分之一圓 $AFCO$ 的面積, 故新月形 $AECF$ 的面積 = $\triangle ACO$ 的面積。

又三角形很容易平方化, 故得出新月形 $AECF$ 可平方化。

Euclid有系統地整理出現今所稱的歐氏幾何學, 在 Elements 的開頭, 他甚至對點、線下了意義不甚明確的定義。

定義 1: 點沒有面積。

定義 2: 線沒有寬度。

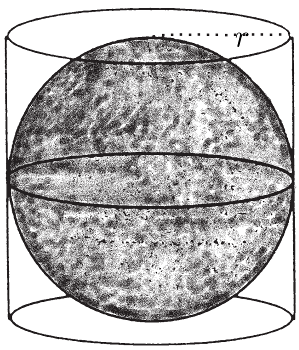
定義 3: 線上的點均勻分佈。

以現代的觀點, 這些定義無法被完全接受。在一邏輯系統中, 最後總有一些無法用其他名詞來定義的"無定義名詞", 而點、線與面是歐氏幾何中的無定義名詞。雖然如此, Euclid提出之畢氏定理的證明卻流傳至今。另外他所提出關於質數有無窮多個的證明也非常簡潔漂亮。

Archimedes利用圓內接與外切正多邊形而算出圓面積的近似值, 這也相當於計算圓周率 π 的近似值。另外他算出球的表面積是其內接最大圓 (赤道圓) 之面積的四倍。

Archimedes最得意的傑作是導出圓柱內切球體之體積與圓柱體積之間的關係:

圓柱體積 $= 2\pi r^3 = 3/2$ 球體的體積



這定理刻在他的墓碑上, 也成為他永垂千古的一大註記。

二. Heron 與 Cardaro

三角形的面積是底乘高的一半。 而 Heron 式則將三角形的面積表成三邊長的對稱式。以 a, b, c 表示一三角形的三邊長, $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ 是半周長, 則三角形的面積是

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

這式子在現代, 運用餘弦定理很容易導出, 亦即

$$\begin{aligned}\text{面積} &= \frac{1}{2}bc\sin A &(1)\\ &= \frac{1}{2}bc\sqrt{1-\cos^2 A} &(2)\\ &= \frac{1}{2}bc\sqrt{1-\Big(\frac{(b^2+c^2)-a^2}{2bc}\Big)^2} &(3)\end{aligned}$$

但在古老的幾何學上, 沒有這些定理可運用, 仰賴的只是比例與相似的定理, 這也是這定理偉大的原因。

三次方程式的解法秘方在16世紀的義大利數學界被當成是挑戰對手的籌碼, 而 Cardano 從 Tartaglia 學到這秘方, 但在神前發誓不公開, 而他的學生 Ferrari 更能解出一般的四次方程式。但囿於誓言, 無法把解法公諸於世。

但在1543年,Cardano 與 Ferrari 旅行到 Bologna, 在 Scipione del Ferro 的早三十年的文獻中, 發現已有三次方程式的解法, 因而 Cardano 沒有理由再繼續遵守諾言, 而將解法在1545年出版。

解決了三次與四次方程式未能使人們滿足, 有的人更探求五次與五次以上方程式的解法, 但都沒有具體的結果。1824年挪威的年輕數學家 Niel Abel 提出驚人的看法, 五

次與五次以上方程式沒有根式解。這也終結了人們對多項方程式之根式解的進一步探求。

三. Newton, Bernoulli 兄弟與 Euler

Newton與 Leibniz 被公認是微積分的發明人。Newton 除了創立古典力學外, 在數學上的貢獻更無可抹滅。這書上提到他發現的二項式定理, 亦即 $|x| < 1$ 時

$$(1+x)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k$$

這裡 r 是一般的實數, 而二項係數

$$\binom{r}{k} = \frac{r\cdots(r-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}$$

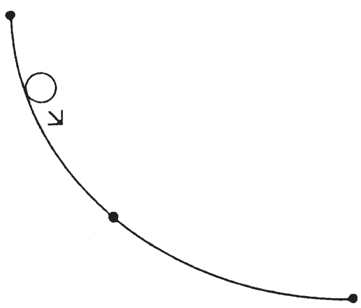
當 r 是正整數時, 這是一般的二項式定理。利用這展開式, Newton計算圓周率的近似值爲

$$3.141592668$$

Bernoulli家族有兩位兄弟數學家, 一是哥哥 Jakob Bernoulli(1654-1705), 另一是弟弟 Johann Bernoulli, 這也是 Euler 的啓蒙老師。Johann 證明調和級數

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

的發散性, 並向全歐洲數學家提出一挑戰性的問題: 求從一定點到另一定點, 在重力作用下, 質點運動的最便捷路徑。當然這解不是一般的直線, 他們把這類曲線稱爲 brachistochrone, 是由西臘文"最短的"與"時間"的合成。



A

M

B

這問題在期限到時共收到五個答案, 一是他本身提供, 另一是 Leibniz 提供, 他哥哥提供第三個解法, 而 l'Hospital 加上第四個, 最後一個來自英國, Johann打開一看, 答案完美無瑕, 但信末沒有署名, 這正是 Newton 的一貫作風, 毫無疑問地, 這是出自 Newton 的手法。Johann 不禁驚嘆: 從它的爪子, 我就認出它是獅子。

四. Euler 與 Cantor

Euler在數學上論文的質與量都空前絕後, 他的全集超過70巨册, 這裡舉出只是他在數論方面的兩大工作。

1734年,Euler 提出級數

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$$

的和是 $\pi^2/6$, 而他運用的手法是把根與係數的關係用在正弦函數上, 這方法在當代引起很大的爭議, 也讓他費了往後十多年的時間去說服別人相信。

Euler在數論上的另一貢獻是重證 Fermat 的結果並加以推廣, 如他證明了 Fermat 小定理:

若 p 是質數且 $(a,p)=1$, 則 $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$。

他並加以推廣:

若 n 是正整數且 $(a, n) = 1$, 則 $a^{\varphi(n)} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ n)$。這裡的 $\varphi(n)$ 表示 1 到 n 中與 n 互質的正整數個數, 也是現稱的 Euler φ-函數。

Fermat所提出的數論結果不見得都是對的, 如他對質數的猜測: $2^{2^n} + 1$ 是質數。這對 $n = 1, 2, 3, 4$ 確實沒錯, 但 $n = 5$ 時, Euler 發現

$$2^{32} + 1 = 641 \times 6,700,417$$

數學上有很多抽象的基本概念到19世紀尚有待澄清, 其中之一是分析學上的極限, 另一是基礎學上的無窮大。1821年法國數學家對極限下了底下的定義:

當 x 趨近於某一特定 a 時, $f(x)$ 與 L 的誤差值可小到任意小, 則稱 L 是 x 趨近於 a 時, $f(x)$ 的極限。

這定義經由 Karl Weierstrass 修正為:

給定 $\varepsilon > 0$, 存在有一 $\delta > 0$, 使得 $0 < |x - a| < \delta$ 時, 則 $|f(x) - L| < \varepsilon$。

這也成為分析學上的 $\varepsilon\delta$-語言。

基礎數學中的一重要議題是計數理論。凡是可與正整數 N 或其子集做一一對應的集合稱為可數集。如整數與有理數都是可數集。Cantor 證明實數是不可數集, 而運用的手法即現稱的對角化步驟。他假設介於0與1之間的實數是可數集而表為小數, 即

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0.a_{11}a_{12}\cdots a_{1n}\cdots \\
x_2 &= 0.a_{21}a_{22}\cdots a_{2n}\cdots \\
\cdots & \quad \cdots\ \cdots \\
x_n &= 0.a_{n1}a_{n2}\cdots a_{nn}\cdots \\
\cdots & \quad \cdots\ \cdots
\end{aligned}$$

Cantor的方法是選取 $b = 0.b_1b_2\cdots b_n\cdots$ 使得 $b_1 \neq a_{11}, b_2 \neq a_{22}, \ldots b_n \neq a_{nn}, \ldots$, 如此得出另一實數 b 不在這可數系列中, 而證出實數是不可數。

以 $\overline{A}$ 表示集合 A 的基數 (cardinal number), Cantor 證明 $\overline{A} < \overline{P[A]}$。這裡 $P[A]$ 表示 A 之所有部份集合所成的集合。這定理引起廣大的議論。例如以 U 表示所有集合所成的集合, 即宇集, 如此的 U 無所不包, 已沒有拓展的空間, 但 Cantor 的定理告訴我們 $\overline{U} < \overline{P(U)}$。這表示 $P(U)$ 比宇集 U 包含更多。Cantor在1895年體認到這反常現象, 在往後十年間, 他嘗試彌補這空白。這要等待公設化集合論出現才彌補過來。在公設化集合論中, 宇集 U 不存在, 而把這詭辯化為烏有。

五. 結語

這本書的趣味性非常濃厚, 我們在書上見到的不只是定理的精彩證明, 更見到背後數學天才的不同處境, 有的活躍於數學界, 有的卻失意於非數學界, 有的受寵於君王側, 有的卻流浪在偏遠地區, 我們見到的是一部活生生的數學歷史, 是有志於數學工作者不可不看的好書。

—本文作者任教於國立中正大學數學系—