數學美賞析(上)

譚建國

數學不僅擁有眞, 而且擁有非凡的美 –一種像雕塑那樣冷峻的嚴厲的美, 一種不爲我們軟弱的天性所動的美, 一種不具有繪畫和音樂那樣富麗堂皇的裝飾的美, 然而又是極其純淨的美, 是唯有最偉大的藝術才具有的嚴格的完美。

– 伯特蘭. 羅素

(Russell, Bertrand Arthur William)

一個名副其實的科學家, 尤其是一個數學家, 在他的工作中感受到與一個藝術家同樣的印象; 他的愉快也同樣巨大, 並具有同樣的性質。

– 亨利. 彭加勒 (Poincaré, Henri)

一個沒有幾分詩人才氣的數學家永遠不會成爲一個完全的數學家。

– 卡爾. 外爾斯特拉斯

(Weierstrass, KarlTheodor Wilhelm)

一. 數學美的含義及其特徵

"美"是一個普遍存在的現象。

就我國美學界的現狀來說, 人們大多認爲自然美與藝術美是美的基本內容, 是兩種基本的美, 也有人提出了社會美的概念, 其中包括生活美與工藝美兩部分, 近些年來有人 (如天津師範大學的劉仲林、中國人民解放軍空軍氣象學院的張相輪、復旦大學的周義澄等) 又提出了一種美學新範疇, 即科學美。科學美與藝術美一樣建築於自然美的基礎上, 是美的一種高級形式, 是人類美的創造成果。數學作爲科學的一部分, 其中也包含了美。

什麼是數學的美呢? 綜合近現代自然科學家、數學家們的體會和議論, 加上自己的一些膚淺認識, 我認爲可歸納爲以下幾方面的內容:

1. 數學美在於發現隱含的眞理。例如,"微積分基本定理" 揭示了微分與積分的內在的本質的聯繫, 顯示了它們之間的互逆性質, 所以我們認爲它是一種美的表述。
2. 數學美在於發現普遍的眞理。例如, 圓周率 π 刻劃了一切圓形的周長與直徑之比值。是一個美的數字。
3. 數學美在於發現"和諧"(這裡亦包含統一、對稱等意義)。法國數學家、科學哲學家彭加勒認爲, 科學美來源於自然美, 但這種美不是指大自然瑰麗的景色, 他指出:"我所指的是一種內在的美, 它來

自各部分的和諧秩序, 並能爲純粹理智所領會。”例如, 範德蒙 (Vandermonde, Alexandre Théophile) 行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le j<i\le n} (x_i - x_j)$$

就體現出了這樣一種和諧的美。

4. 數學美在於“簡單”。法國哲學家狄德羅 (Denis Diderot) 說過: “算學中的所謂美的問題, 是指一個難於解決的問題; 所謂美的解答, 是指一個困難複雜的問題的簡易回答。” 例如, 等差數列、等比數列的前 n 項和公式即體現了一種簡單性:

$$\begin{aligned} S_n &= (a_1 + a_n)n/2; \\ S_n &= a_1(1 - q^n)/(1 - q) \end{aligned}$$

它們都是美的解答。

還有的學者提出了一些其它的認識。如: 美在於“新奇”; 美在於“雅致”; 美在於“對困難的克服”; 等等。

“一般說來, 能夠被稱爲數學美的對象和方法, 應該是具有在極度複雜的事物中揭示出的極度的簡單性, 在極度離散的事物中概括出的極度的統一性 (或和諧性), 在極度無序的事物中發現的極度的對稱性, 在極度平凡的事物中認識到的極度的奇異性 (新奇性)。具有簡單性、統一性、對稱性和奇異性的數學對象與其背景反差越大, 則顯得越美, 越有吸引力。”(見 [17])

數學美和自然美、藝術美、社會美以及其他科學美一樣, 具有以下幾個方面的特徵:

第一, 客觀性。

第二, 主觀性。人在數學理論的建造中, 所熔鑄進去的創造者的主觀審美意識, 這樣所形成的數學美就體現了創造者的主觀性, 這就是數學美的主觀性。

第三, 社會性。

第四, 形象性。數學美作爲客觀物質的社會存在, 它的一個顯著特徵是具有形象性。

生活中有形象, 自然中有形象, 藝術中有形象, 數學中也有形象, 但卻未必都是美的形象。美的形象必須是自由的形式, 合規律性和合目的性統一的形式。

我體會, 在數學中,“合規律性”有兩種情況: 其一, 對一種嶄新的數學理論而言, “合規律性”即與自然規律相符, 有實際背景 (如模糊數學、突變論、多目標決策等); 其二, 對原有數學理論進行修正、補充和完善時, “合規律性”即推證過程的無矛盾性和合邏輯性。數學中的形象 (符號、公式、定理等) 只有成爲合規律性與合目的性的統一體時, 才成其爲美。

數學美除上述一般美學特徵之外, 還具有相對性的特徵。

數學美在不同主客觀條件中不斷變化發展的相對標準, 這就是數學美的相對性。數學美總是從數學內部各部分之間和不同數學對象之間的比較關係中看出的, 任何一種數學對象都可以在與其他數學對象的比較中看出它是美還是不美。(見 [16])

二. 研究數學美的意義

研究數學美的主要意義在於: 通過對數學美的研究與傳播, 提高對數學美的感受、鑒賞能力。最終爲進行數學創造提供一種條件。

數學家的美感猶如一個篩子。阿達瑪 (Hadamard,Jacques Salomon) 說:"沒有它的人, 永遠成不了眞正的發明家。"可以說, 除了長期的數學探索實踐以外, 靈感和直覺的源泉還包括數學家的作爲藝術修養結晶的美感。

三. 數學美的表現形式

數學是人類特有的認識工具和符號語言, 從人類的原始認識史說, 通過數學對客觀世界量的抽象和把握, 正是鮮明地體現了主體性特徵的人類認識方法, 是把人和動物在認識上根本區別開來的重要標誌。數學的根源不是對客觀對象的分析綜合, 而是人類主體的基本實踐活動, 即使用工具的原始操作中的某些因素和形式 (如次序、關係、排列) 的抽象化 (如可逆、不可逆、守恆、變換等等)。

數學美要求以最合理、最恰當的形式即最佳形式表現美的內容; 在表現同一內容的衆多形式中, 力求選擇一種最理想的表現形式; 力求形式上的創新, 不斷地改造舊的形式, 創造新的形式。數學美是以最佳的抽象形式表現感性自由內容的形式美。

數學美的主要表現形式, 我認爲大致可以分爲以下幾類: 符號美、公式美、理論美和方法美 (思維美), 而在公式美和理論美中, 既包括了已經證明爲正確的東西, 也包括那些未經證明 (或有待證明) 的猜想。

"美"是內容與形式的統一。美的形式無處不顯現內容; 美的內容又無不滲透於存在於形式之中。對不同的類型, 內容與形式的結合可能有所不同, 在數學美的幾種類型中, 我認爲可作如下的說明:

數學美的類型:

符號美 $\rightarrow$ 公式美 $\rightarrow$ 定理美 $\rightarrow$ 理論美 $\rightarrow$ 方法美 (思維美)

內容與形式的結合:

形式美爲主 $\longrightarrow$ 內容美爲主

美的形式 (抽象程度): 初級形態 $\longrightarrow$ 高級形態

越往後的類型越著重內容之美, 越顯得抽象。符號、公式以形式美爲主, 是一種較爲初級的美的形態, 較易爲一般人理解、接受; 而理論、方法之美, 則著重內容美, 是一種較爲高級的美的形態, 要欣賞它們, 必須具備較高的數學修養。

A. 符號美

符號美的主要特徵是形式簡潔性。部分符號還具有某種對稱性。

例1. 行列式符號

行列式是主要的數學概念和工具之一。它來源於求解線性方程組。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \triangleq \sum_{j_1\cdots j_n} (-1)^{N(j_1\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

行列式符號具有明顯的對稱性和簡潔性。

例2. Riemann(黎曼) 積分符號

$$\int_a^b f(x)dx \triangleq \lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$$

形式非常簡潔 (與符號所表達的內容相比)。

例3. 同餘式符號

同餘是數論中的重要概念。給定一個正整數 m, 如果二整數 a,b 滿足 $m\mid a-b$, 就稱整數 a,b 對模 m 同餘, 記作:

$$a\equiv b(\operatorname{mod} m)$$

符號很簡潔。

B. 公式美

公式美的主要特徵是簡潔和對稱。

這裡的簡潔性 (或簡單性) 是指簡單形式和深廣內涵的統一。“並不是指學生在精通這種體系時產生的困難最小, 而是指這體系所包含的彼此獨立的假設或公設最少。”所謂對稱性, 也不能作膚淺的和過於絕對的理解, 這裡的對稱並不是絕對的對稱, 而是與非對稱相聯繫的對稱。要看到對稱性關係的相對性, 看到它的另一方面, 即對稱性的“破缺”方面。建立在對稱與破缺之對稱基礎上的對稱性原理, 並不破壞人們的美感, 相反, 它符合人們美感的需要, 因爲人們喜歡有序, 不喜歡一團“混沌”。

例 1. 求解線性方程組的克萊姆 (Gabriel Cramer) 法則 (公式):

線性方程組

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$

的解, 當係數行列式 $D\neq 0$ 時可表爲

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ \cdots,x_n=\frac{D_n}{D},\ (*)$$

其中

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix},$$

$$\vdots$$

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & b_2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & b_n\end{vmatrix}$$

這就是克萊姆法則的基本內容。

用 Cramer 法則求解係數行列式不等於零的 n 元非齊次線性方程組需要計算 $n+1$ 個 n 階行列式, 它的計算工作量很大。實際上關於數字係數的線性方程組的解法, 一般都採用高斯 (Gauss, Carl Friedrich) 消元法。本法則主要是在理論上具有重要意義, 特別是它明確地揭示了方程組的解和係數之間的關係。儘管如此, $(*)$ 式仍能給人一種美的享受, 確是一組既簡潔又對稱的公式。

例2. Young不等式

“設 f 是 $[0,c](c>0)$上連續並嚴格遞增的實值函數。若 $f(0)=0$, $a\in[0,c]$,

$b \in [0, f(c)]$, 則

$$\int_0^a f(x)d(x) + \int_0^b f^{-1}(x)d(x) \geq ab,$$

這裡 f^{-1} 是 f 的反函數。等號成立, 當且僅當 $b = f(a)$ 時。

此不等式是由 W.H.Young 得到的, 故稱爲 Young 不等式。它顯然具有某種對稱性, 同時形式也很簡單。

例3. 關於黎曼 ξ 函數的一個無窮乘積展開式

複變函數 $\xi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, $s = \sigma + it$ 是複數, $\sigma > 1$ 稱爲黎曼 ξ 函數。此函數是黎曼於1859年在"論不大於一個給定值的素數個數"的著名論文中第一次提出的, 它在數論和函數論中具有重要的意義。利用算術基本定理 ("大於1的任意自然數均可表成素數的乘積, 如果不計次序的差別, 表示法是唯一的。" 此定理由德國數學家 C.F. 高斯首先給出證明) 可以證明: 當 $\sigma > 1$ 時有恆等式:

$$\xi(s) = \prod_p (1 - \frac{1}{p^s})^{-1}$$

式中 $\prod_p$ 表對所有的素數求積。它被稱爲 Euler 無窮乘積表示, 或簡稱爲 Euler 乘積。

此公式左、右兩邊皆爲無窮形式。而將 $\xi(s)$ 表爲無窮乘積的形式更爲引人入勝, 更具有感染力。因爲通過它, 把黎曼 ξ 函數與無窮無盡的、直至目前爲止也還不十分了解的素數聯繫起來了!

C. 定理美和理論美

一種科學理論如果能以儘可能少的基本假設, 運用明晰而嚴密的邏輯工具推演出具有普遍深遠含義的結論, 得出簡單、對稱的方程、公式, 做出精彩的科學預言, 這種理論就被科學家認爲是美的。歐幾里德 (Euclid) 平面幾何學體系是受到歷代科學家讚美的數學理論體系, 整個理論從十條公設和十條公理出發, 演繹縝密而引人入勝。即使我們不想從這些理論的推論、演繹中得到好處, 也仍然可以從鑒賞理論、公式美的直覺中感受到快樂。

定理美、理論美的主要特徵就在於它們的和諧性、簡潔性和對稱性, 某種程度上還具有新奇性。

簡潔性、對稱性的含義已如前述。

這裡的和諧性首先在於理論體系內部的自洽性。就內在結構方面說, 和諧本質上是邏輯的正確性和構造的嚴密性; 而和諧美的外在功能則表現在適應它所屬的理論系統整體和諧結構的要求, 能經受理論之外的觀察實驗事實或其它正確理論的檢驗, 在這種多維的整體聯繫中起諧調作用。一方面應能與儘可能多的相關系統找到聯繫, 另一方面也應當同這個領域的傳統理論找到聯繫, 能很好地概括舊理論的基本思想並有向未知世界開拓的巨大能動性。理論美是其內在和諧結構和外在和諧功能的統一。

一個具有驚人和諧美的理論總是值得重視的。十九世紀黎曼、波耶 (Bolyai,Janos) 和羅巴切夫斯基等人根據歐氏平面幾何學的和諧體系, 採用類比方法建立的非歐幾何學, 在很長時期內被懷疑爲"不眞"的假說。但是, 非歐幾何邏輯上的嚴密和自洽卻是不容懷疑的, 只是在當時的水平上, 人們無法對它的功能進行檢驗。關於這方面的成就, 在幾十年

裡被數學家們忽視了, 連非常注重數學美的高斯, 也對自己在非歐幾何方面做出的研究表示懷疑, 始終沒有公開發表。直到愛因斯坦 (Einstein,Albert) 建立廣義相對論時, 才把黎曼幾何的和諧體系同廣義相對論新奇的物理思想結合起來, 使數學理論美達到一個新的境界。

定理美、理論美可分三種情形:(1) 定理 (理論) 的“表述”本身;(2) 對“表述” 的證明過程;(3) 反例。說證明“美”、“漂亮”, 無非是因爲:a、過程簡潔; b、思路清晰;c、(數學) 語言優美;d、技巧性強; 等等。而說一個反例“好”, 主要是因爲 a、該例 (相對) 簡單;b、對命題具有較強的反證性 (亦即邏輯性強); 等等。

例1. 代數學基本定理

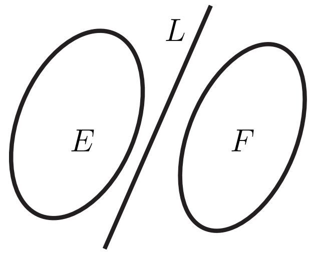
代數學基本定理是關於多項式根的定理, 即一個次數不小於 1 的複係數多項式 $f(x)$ 在複數域內至少有一個根。這條定理形式上是代數的, 但是它的證明卻離不開複數域的解析性質。高斯於1799年在他的博士論文中, 對代數基本定理作出了有高度創造性的論證。他的方法不是去計算具體的根, 而是去證明根的存在性。高斯研究這一定理的方法, 開創了探討數學中存在性問題的新途徑。

20世紀以前, 代數研究的對象, 如矩陣、二次型和各種超複數系都是建立在實數域或複數域之上的, 當時代數基本定理起著核心的作用。20世紀以來, 隨著代數學的進一步發展, 抽象代數結構, 如群、環、域、格、模相繼出現, 於是代數學基本定理逐漸失去了它的原有地位。

代替代數學基本定理的是根的存在定理。(參見 [9])

基本定理的敍述十分簡潔, 而又具有很強的邏輯力量。

例2. 分離定理



平面上兩個互不相交的凸集 E 與 F, $E\cap F=\emptyset$ 有一個重要的幾何性質 — 存在著一條直線 L 分離 E 與 F; 即存在直線 L 使 E 與 F 各在 L 的一側。

泛函分析中的分離定理則是這條幾何性質在一般線性空間中的推廣。它有許多重要的推論。定理的內容爲:

設 E 和 F 是 (B_0^*) 空間中的兩個凸集, E 有內點, $E\cap F=\emptyset$ 那麼存在超平面 H_f^r 分離 E 與 F。(換言之, 存在一個非零線性連續泛函 $f(x)$ 使得 $x\in E\Rightarrow f(x)\le r$, $x\in F\Rightarrow f(x)\ge r$)。

顯然定理表述是很簡潔的。

例3. 彭加勒猜想

彭加勒猜想是拓撲學中重要的猜想之一。

球面是數學中最簡單、最常見同時也是最完美的閉流形。二維球面 S^3 是單連通的閉曲面, 而且每個單連通的閉曲面都和 S^2 同胚, 代數拓撲學的奠基人, 法國數學家 H. 彭加勒在1904年猜測: 單連通的三維閉流形必

與 S^3 同胚。後人接著猜測: 當維數 $n \geq 4$ 時, 單連通的閉流形如果與 S^n 有相同的同調群, 亦必與 S^n 同胚。這就是 n 維的彭加勒猜想。

1960 年,S. 斯梅爾 (Smale,Stephen) 證明了維數 $n \geq 5$ 的彭加勒猜想;1981 年, M.H.弗里德曼 (Michael H.Freedman) 證明了四維的情形。彭加勒原來的三維的猜想則尚未解決。

這猜想簡明易懂, 卻是考驗我們對於流形的認識深度的一塊試金石, 每前進一步都曾引起拓撲學躍進。如四維彭加勒猜想的解決, 導致一個非常重要的發現: 四維的歐氏空間與其餘維數的歐氏空間不同, 除了通常的微分結構以外它還有別的不尋常的微分結構。(參見 [9])

例 4. 解析幾何理論

解析幾何學是數學中最基本的學科之一, 也是科學技術中最基本的數學工具。它的產生和發展, 曾在數學的發展過程中起著重要的作用。17 世紀初, 法國數學家 R. 笛卡兒 (Descartes,René) 和 P.de費爾馬 (Fermat,Pierre de) 首先認識到新的數學學科解析幾何學產生的必要和可能。其中笛卡兒是解析幾何的主要創造者。

解析幾何的基本內涵和方法, 是通過坐標的建立, 將幾何的基本元素 (點) 和代數的基本研究對象 (數) 對應起來, 然後在這個基礎上, 建立起曲線或曲面與方程的對應。如已知動點的某種運動規律, 即可建立動點的軌跡方程; 有了變量所適應的某個方程, 就可作出它表示的幾何圖象, 並根據方程討論一些幾何性質。這樣就將幾何與代數緊密結合起來, 利用代數方法來解決幾何問題。而且這種方法已成爲研究和解決某些運動變化問題的有力工具。由於變量數學的引進, 大大地推動了微積分學的發展, 使整個數學學科有了重大進步, 因此解析幾何的產生, 可說是數學發展史上的一次飛躍。

從解析幾何的產生到現在, 經過了一段很長的發展歷程。現在一般所講的還是屬於經典解析幾何的範疇, 所用的方法除前面講到的坐標法外, 兼引入了向量法, 通過向量的運算來討論曲線和曲面的一些幾何性質, 這對某些問題的討論帶來很大方便, 但因研究方法的限制, 所研究的內容還是有較大的局限性。而現代解析幾何的研究方法是多樣的, 研究內容也非常廣泛。特別是具有重要意義的變換、變換群以及不變量的理論已被納入解析幾何。因此, 仿射幾何、射影幾何已成爲現代解析幾何的組成部分。十九、二十世紀之交, 作爲經典解析幾何的直接推廣, 以代數流形爲研究對象的代數幾何宣告誕生。本世紀三十年代, 又形成泛函分析, 它是二維和三維解析幾何裡所研究的代數問題的直接延續。

每一個知道解析幾何經典理論的人都可以看出, 這種理論是在代數方程與幾何圖象之間建立的一種對稱結構。它使我們從中感受到一種和諧之美。(未完待續)

—本文作者任教於中國雲南大學數學系、基礎數學研究所—