從尤拉數 e 到 Stirling 常數

沈淵源

摘　　要

我們從尤拉數 e 談起, 試著以電腦爲我們實驗的工具, 利用數學軟體 Mathematica 計算繪圖的功能, 來激發我們自由而又豐富的想像力。這提供了我們兩個強有力的猜測。對每一個猜測, 我們先分析它的結構, 然後試圖予以證明。第二個猜測, 就是所謂的 Stirling 公式。我們由此談到 Gamma 函數及其三種不同的界定方法。利用第三種界定的方法, 我們證明了 Stirling 公式。最後, 我們用這些結果來決定 Stirling 公式中的常數 $\sqrt{2\pi}$ 做爲這篇文章的結束。

尤拉數 $e \approx 2.71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 02874\cdots$ 是個很漂亮的無理數。到底漂亮到什麼程度呢? 首先, 以此數爲底的指數函數 e^x 其導數就是它自己。其次, 這個數有多種不同的定義方法或表示法: 我們可以定義 e 爲無窮級數

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

的和, 我們也可以定義 e 爲數列 $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ 的極限值。爲了方便起見, 我們稱前者爲級數表示法, 後者爲極限表示法。最後, 在初等微積分中, 我們定義 e 就是那唯一的正數使得定積分 $\int_1^e \frac{1}{t}dt$ 的值等於 1。

第三種定義的方法不是太好, 因爲連你要估計一下它的大小也不是那麼顯然。級數表示法遠比極限表示法好, 此處所謂的好, 是比較其趨近於 e 的速度。前者遠比後者快, 而且快很多。且看下面的計算:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{10}\frac{1}{k!} &\approx 2.71828\ 18011\ 46384\ 47972,\\
\sum_{k=0}^{22}\frac{1}{k!} &\approx 2.71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 02471,\\
\left(1+\frac{1}{10}\right)^{10} &\approx 2.59374\ 34601\ 00002,
\end{aligned}$$

$$\left(1+\frac{1}{10^7}\right)^{10^7} \approx 2.71828\ 16939\ 80372.$$

當 $n=10$, 級數表示法可精確到小數點後第 7位; 而 $n=22$, 卻可精確到小數點後第22位。但極限表示法, 當 n大到10^7 時, 才精確到小數點後第 6位。實際上, 估計 $S_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ 與 e 之間的差距, 是非常容易的。且看下面的不等式:

$$e-S_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}\le\frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots\right)=\frac{1}{n!n}\ .$$

所以我們有 $e-S_{10}<1/10!10<10^{-7}$, 以及 $e-S_{20}<1/22!22<10^{-22}$; 如上面的計算所表明者。

雖然如此, 極限表示法並非一無是處! 我們且看下面的數據:

$$\left(1+\frac{1}{10}\right)^{11}\approx 2.85311\ 67061\ 10002,$$

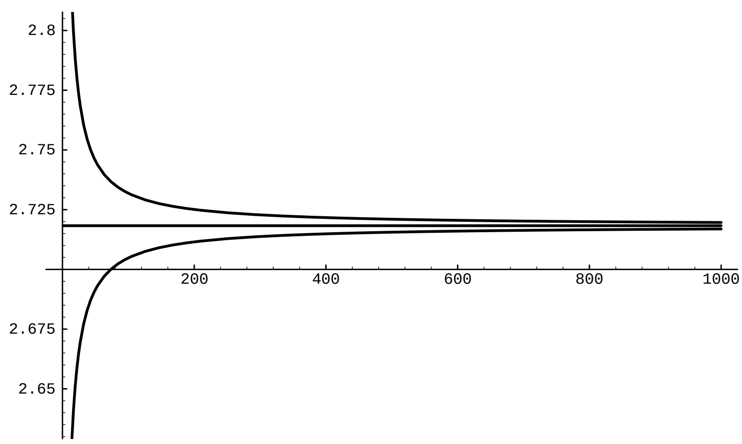
這告訴我們

$$\left(1+\frac{1}{10}\right)^{10}<e<\left(1+\frac{1}{10}\right)^{11}\ .$$

這樣的不等式是不是只有 $n=10$ 的時候才對呢? 最簡捷快速的辦法就是畫一下圖形。Mathematica 提供了我們下面的圖形 (由上到下分別爲下面三個函數的圖形):

$$y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}\ ,\qquad y=e\ ,\qquad y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\ .$$

圖一:



所以我們有很好的理由, 作下面的猜測:

猜測一: 對所有的正整數 n, 下面不等式恆成立

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}。$$

讓我們來分析一下這個不等式。我們所面臨的這三個數, 從某個角度來說是挺抽象的。然而, 當我們引進自然對數, 則全然改觀。請看:

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} &\iff n\log\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1 < (n+1)\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\\ &\iff \frac{1}{n+1} < \log\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}。\end{aligned}$$

現在這三個數 $1/(n+1)$, $\log(1+1/n)$ 及 $1/n$, 比前面那三個好多了。怎麼說呢? 首先, $\log(1+1/n)$ 這個數代表函數 $f(x)=1/x$ 圖形底下從 $x=1$ 到 $x=1+1/n$ 所包圍區域 R 的面積, 也就是下面這個定積分的值:

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{1}{x}dx。$$

因爲 $1/x$ 在區間 $[1, 1+1/n]$ 是遞減的, 所以可得如下的不等式:

$$\begin{aligned}\frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} < \frac{1}{x} < \frac{1}{1} = 1 &\iff \int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{n}{n+1}dx < \int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{1}{x}dx \int_1^{1+\frac{1}{n}} 1dx\\ &\iff \frac{1}{n+1} < \log\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}。\end{aligned}$$

這證明了我們的第一個猜測是對的, 而且證明非常簡單。如果我們從幾何的角度來看這個不等式, 那更是不言而喻。令 R_1 及 R_2 分別爲上述區域 R 的內接及外接長方形區域, 則 R_1 的面積就是 $1/(n+1)$, 而 R_2 的面積就是 $1/n$。當然區域 R 的面積 $\log(1+1/n)$ 是介於這兩個數之間。

除了上面這個簡單的證明之外, 我們還可找到兩個非常有趣的證明方法。第一個是與尤拉常數

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)$$

有關, 請參閱 [3]。第二個與極大化正整數之乘積有關 (當這些正整數有固定和時), 請參閱 [6]。

這個不等式本身也是挺有趣的。我們先寫成下面的形式:

$$\frac{(k+1)^k}{k^k} = \left(1+\frac{1}{k}\right)^k < e < \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1} = \frac{(k+1)^{k+1}}{k^{k+1}}\ ,$$

然後將對應於 k 從 1 到 $n-1$ 的那些不等式相乘在一起。化簡後可得:

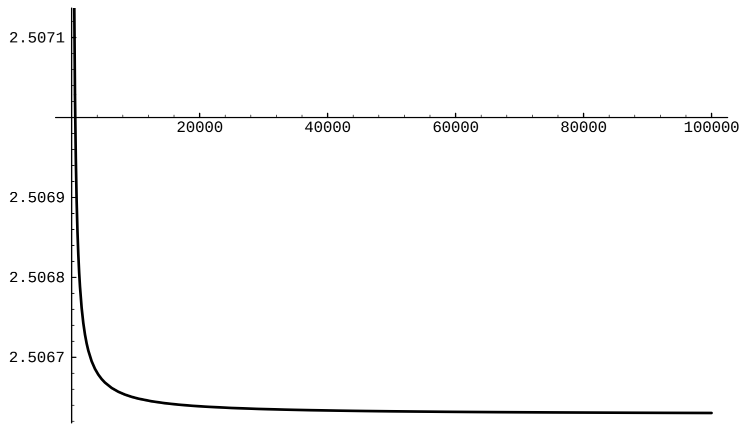
$$\begin{aligned}\frac{n^{n-1}}{(n-1)!}<e^{n-1}<\frac{n^n}{(n-1)!} &\iff \frac{n^n}{n!}<\frac{e^n}{e}<\frac{n^{n+1}}{n!}\\ &\iff e(n^ne^{-n})<n!<e(n^{n+1}e^{-n})。\end{aligned}$$

很自然的, 我們想從這不等式來估計 $n!$ 的大小。當 n 很大時, 可能 $n!$ 與 $n^{n+\theta}e^{-n}$ 差不多大或是一個常數倍, 此處 θ 爲介於 0 與 1 之間的常數。以應用的觀點來說, 處理 $n^{n+\theta}e^{-n}$ 遠比處理 $n!$ 來得容易, 因爲前者是個指數。所以我們就來看一下, 當 n 趨近於無窮大時, 這兩個數相比的比值

$$S_{n,\theta}=\frac{n!}{n^{n+\theta}e^{-n}}$$

是不是會趨向某一個定數呢? 我們再一次的使用 Mathematica 來幫助我們建立下面的圖形:

圖二: $\theta=0.5$



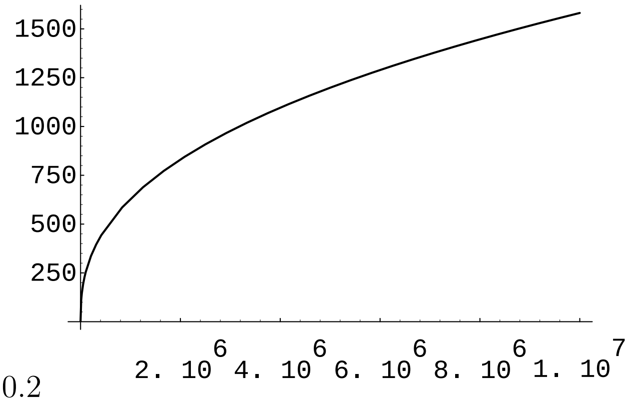
仔細的觀察這些圖形我們可作以下的結論:

1. 數列 $\{S_{n,0.5}\}$ 是遞減而且有界限的。所以由單調收斂定理, 我們知道此數列是收斂的。令 s 爲其極限。圖形顯示 $s\approx 2.507\cdots$, 這個極限顯然不等於尤拉數 e。
2. 如果 $\theta<0.5$, 則數列 $\{S_{n,\theta}\}$ 是遞增但無上界。所以我們不能指望這個數列會是收斂的。
3. 如果 $\theta>0.5$, 則數列 $\{S_{n,\theta}\}$ 是遞減而且很顯然會趨近於 0。

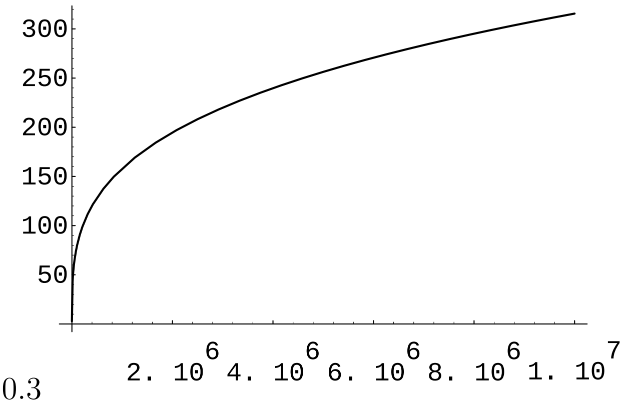
由上面的分析, 我們得到第二個猜測。我們用符號 $g(n)\sim f(n)$ 表示

$$\lim_{n\to\infty}\frac{g(n)}{f(n)}=1。$$

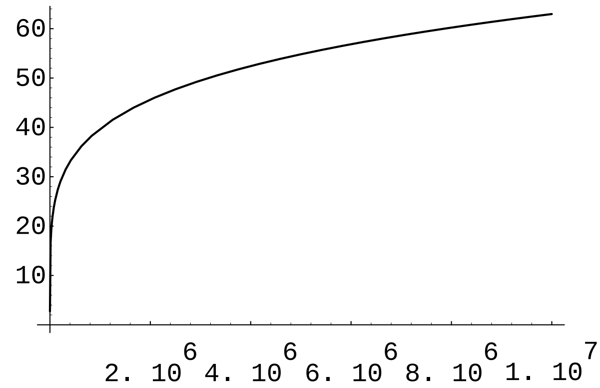
圖三: $\theta=0.1$



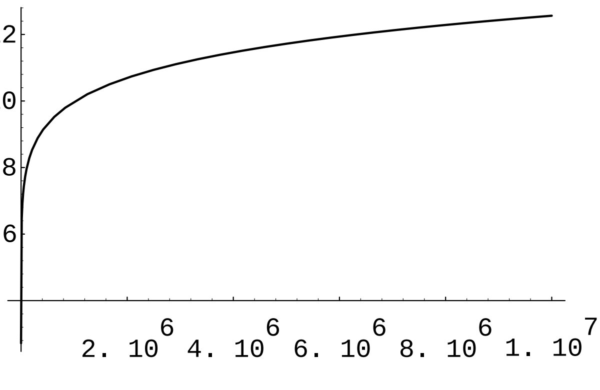
圖四: $\theta=0.2$



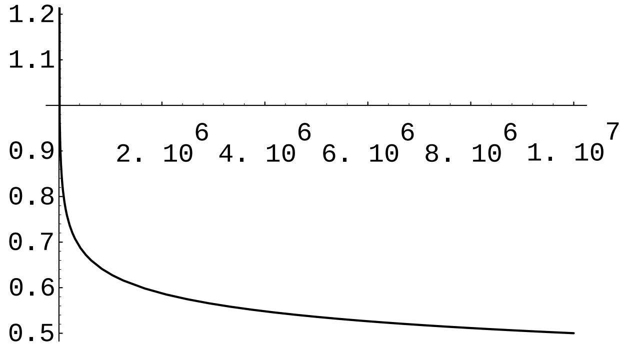
圖五: $\theta=0.3$



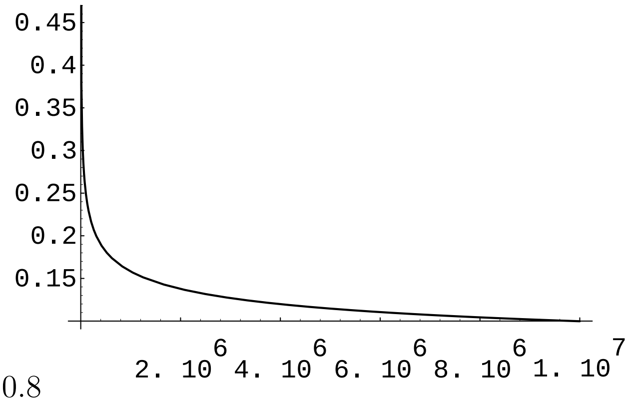
圖六: $\theta=0.4$



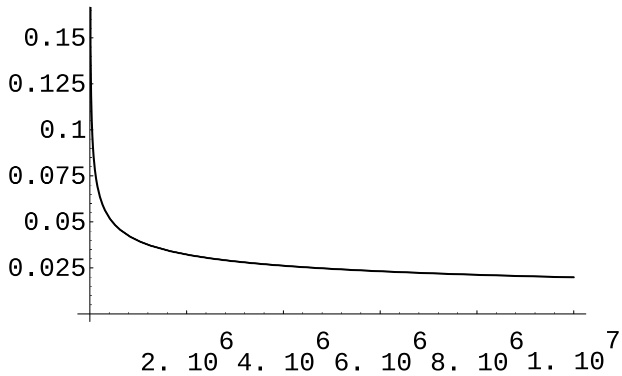
圖七: $\theta = 0.6$



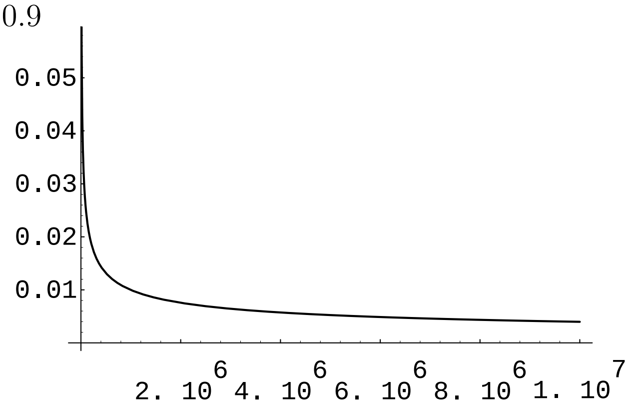
圖八: $\theta = 0.7$



圖九: $\theta = 0.8$



圖十: $\theta = 0.9$



猜測二: 對所有的正整數 n, 我們有 $n! \sim s n^{n+0.5} e^{-n}$, 此處 s 爲一常數。

下面我們試著要來證明這個猜測是對的, 同時我們也想決定常數 s 到底是那個數。首先, 讓我們從分析的觀點來研究一下 $n!$。在初等微積分中, 我們處理過無限積分, 像 $\int_0^\infty e^{-t}dt$, $\int_0^\infty te^{-t}dt$, $\int_0^\infty t^2e^{-t}dt$, $\cdots$ 等。由數學歸納法, 我們得到

$$\int_0^\infty t^n e^{-t}dt = n!\ 。$$

這個 $n!$ 的積分表示法建議我們考慮無限積分 $\int_0^\infty t^x e^{-t}dt$ 。這就開啓了我們對 Gamma 函數的研究。傳統上, 我們習慣定義 Gamma 函數爲

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt\ 。$$

衆所周知, Gamma 函數 $\Gamma(x)$ 爲定義在 $(0,\infty)$ 的正函數而且滿足函數方程式 $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ 以及起始條件 $\Gamma(1)=1$。然而, 僅僅這兩個性質還是無法界定 Gamma 函數。我們很容易看出, 起始條件在整個界定上是無關緊要的。因爲如果 $f(x)$ 是定義在 $(0,\infty)$ 的正函數且滿足函數方程式 $f(x+1)=xf(x)$, 則 $g(x) = f(x)/f(1)$ 也是定義在 $(0,\infty)$ 的正函數, 滿足同一函數方程式而且 $g(1) = 1$。令人驚訝的是, $\log\Gamma(x)$ 函數的凸性就足以界定 Gamma 函數。這是由 H. Bohr 與 J. Mollerup 所發現的事實, 詳情請參閱 [4]。換句話說, 上述兩性質加上$\log\Gamma(x)$ 函數的凸性就可以界定 Gamma 函數。其證明可參閱 Emil Artin 漂亮的小書 [1,2] 或是 Walter Rudin 的名作 [8]。

第二個界定 Gamma 函數的公式乃是由 Laugwitz 及 Rodewald [7] 所提出。他們說, $\log\Gamma(x)$ 函數的凸性可取代爲性質 (L) : 令 $L(x) = \log\Gamma(x+1)$, 則 L 滿足下式

$$L(n+x) = L(n) + x\log(n+1) + r_n(x),\ \text{此處}\ \lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0\ 。 \tag{L}$$

然而, 他們並沒有證明性質 (L) 與 $\log\Gamma(x)$ 函數的凸性之間是怎麼個連結起來而且對等的問題。這個界定 Gamma 函數的概念可追溯到尤拉, 請參閱 [5]。

如果我們仔細分析一下性質 (L), 我們會察覺到自然對數的引進與否, 無關緊要。沒有自然對數的話, 上面的式子, 和變成積; 反而更簡捷而且更有希望接近 Gamma 函數的積的表示法。基於此種考慮, 我們可得到下面的性質, 稱之爲性質 (P):

$$\Gamma(x+n) = \Gamma(n)n^x t_n(x),\ \text{此處} \lim_{n\to\infty} t_n(x) = 1\ . \tag{P}$$

如上所期望, 這給了我們第三個界定 Gamma 函數的公式。

定理: *存在唯一定義於 $(0,\infty)$ 的正函數 $f(x)$ 滿足下列三個性質:*

(a) $f(1) = 1$;

(b) $f(x+1)=xf(x)$;

(c) $f(x+n)=f(n)n^x t_n(x)$, 此處 $\lim_{n\to\infty} t_n(x)=1$ 。

詳細的證明請參閱 [9], 在此我們來看看唯一性的證明。

引理: 對任何的正數 $x>0$, 函數數列 $\{f_n(x)\}$ 是收斂的; 此處

$$f_n(x)=\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}。$$

證明: 取對數, 可得

$$\begin{aligned}
\log f_n(x) &= x\log n+\sum_{k=1}^{n}\log k-\log x-\sum_{k=1}^{n}\log(x+k)\\
&= x\log n-\log x-\sum_{k=1}^{n}\log(1+\frac{x}{k})\\
&= -\log x-x\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n\right]+\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{x}{k}-\log(1+\frac{x}{k})\right]\\
&= -\log x-x\gamma_n+c_n(x)\ ,
\end{aligned}$$

此處 $\gamma_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n$, 還有 $c_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{x}{k}-\log(1+\frac{x}{k})\right]$。衆所周知, 數列 $\{\gamma_n\}$ 收斂於尤拉常數 $\gamma\approx 0.577\cdots$. 對 $k>x>0$, 我們有

$$0<\frac{x}{k}-\log(1+\frac{x}{k})=\frac{x}{k}-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i+1}}{i}(\frac{x}{k})^i\le\frac{x^2}{2k^2}\ 。$$

比較法告訴我們, 數列 $\{c_n(x)\}$ 是收斂的, 所以 $\{\log f_n(x)\}$ 是收斂的, 因此原來的數列 $\{f_n(x)\}$ 也是收斂的。

定理唯一性的證明: 假設 $f(x)$ 爲滿足定理中所述的三個性質的函數。從性質 (a) 與性質 (b), 可得

$$f(n)=(n-1)!\ , \tag{1}$$

$$f(x+n)=(x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+1)xf(x)。\tag{2}$$

將 (2) 式, 性質 (c), 以及 (1) 式合在一起, 我們有

$$f(x)=\frac{n^x(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}\cdot t_n(x)=f_n(x)\cdot s_n(x),$$

此處 $s_n(x)=(x+n)/n\cdot t_n(x)$. 由引理以及假設, 得知 $\lim_{n\to\infty} s_n(x)=1$, 我們有下面的公式:

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}。\tag{3}$$

因此, $f(x)$ 是唯一的。

為了討論上的方便, 我們採用下面的術語。

定義: 我們稱一個定義於 $(0,\infty)$ 的正函數 f 爲 PG (pre-gamma) 函數, 如果 f 滿足函數方程式 $f(x+1)=xf(x)$。

現在我們可以重述到目前爲止 Gamma 函數的界定方法, 如下:

界定一: 如果 f 是一 PG 函數, 使得

(C)　　$\log f$ 是在 $(0,\infty)$ 上的凸函數,

則 $f(x)=c\Gamma(x)$, c 爲一常數。

界定二: 如果 f 是一 PG 函數, 使得函數 $L(x)=\log f(x+1)$ 滿足

(L)　　$L(n+x)=L(n)+x\log(n+1)+r_n(x)$, 此處 $\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0$,

則 $f(x)=c\Gamma(x)$, c 爲一常數。

界定三: 如果 f 是一 PG 函數, 使得

(P)　　$f(n+x)=f(n)n^x t_n(x)$, 此處 $\lim_{n\to\infty} t_n(x)=1$,

則 $f(x)=c\Gamma(x)$, c 爲一常數。

顯而易見的, 在這三個不同的界定當中, 常數 c 均爲 $f(1)$。換句話說, 任何 PG 函數 f 具有 $f(1)=1$ 且滿足性質 (C), 或性質 (L), 或性質 (P) 的, 必定就是 Gamma 函數。

事實上, 對一個 PG 函數而言, 性質 (C), 性質 (L), 性質 (P) 是對等的; 詳細的證明請參閱 [9]。所以前面證明唯一性時, 在引理中的那個函數 (亦即 (3) 式) 就是 Gamma 函數本身。

現在我們回到前面的猜測二。因爲 $\Gamma(n+1)=n!$ 以及 $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$, 所以我們將猜測二改寫爲

猜測三: 對所有的正數 x, 我們有 $\Gamma(x)\sim sx^{x-0.5}e^{-x}$, 此處 s 爲一常數。

如果這個猜測是對的, 令

$$\mu(x)=\log\left(\frac{\Gamma(x)}{sx^{x-0.5}e^{-x}}\right),$$

則 $\Gamma(x)=sx^{x-0.5}e^{-x}e^{\mu(x)}$。所以這個猜測建議我們考慮上式右方的函數

$$f(x)=x^{x-0.5}e^{-x}e^{\mu(x)} \tag{4}$$

我們所面臨的問題變爲: 尋找函數 $\mu(x)$, 使得 f 滿足界定三的條件。怎麼樣的 $\mu(x)$ 才能使 f 是一個 PG 函數呢? 且看:

$$f(x+1)=xf(x)\quad\Longleftrightarrow\quad 1=\frac{f(x+1)}{xf(x)}$$

$$\begin{aligned}
\iff \quad & 1=\frac{(x+1)^{x+0.5}e^{-x-1}e^{\mu(x+1)}}{xx^{x-0.5}e^{-x}e^{\mu(x)}} \\
\iff \quad & e^{\mu(x)-\mu(x+1)}=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+0.5}e^{-1} \\
\iff \quad & \mu(x)-\mu(x+1)=(x+0.5)\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-1\text{ 。}
\end{aligned}$$

令 $g(x)=(x+0.5)\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-1$。所以 f 是一個 PG 函數的充要條件爲 $\mu(x)-\mu(x+1)=g(x)$。怎麼樣的 $\mu(x)$ 才滿足這條件呢? 很簡單,

$$\mu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}g(x+k)$$

就是其中一個。也許你會指控說:「你連級數的收斂性都還不知道, 怎可如此大膽呢? 」但萬事總有一個起頭嘛! 忍耐一下, 姑且假設它是收斂的。好啦! 那這樣的 μ 是不是使得 f 滿足性質 (P) 呢? 我們先看看再說吧! 且看:

$$t_n(x)=\frac{f(n+x)}{f(n)n^x}=\frac{(n+x)^{n+x-0.5}e^{-n-x}e^{\mu(n+x)}}{x^{x-0.5}e^{-x}e^{\mu(x)}n^x}=\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+x-0.5}e^{-x}e^{\mu(n+x)-\mu(x)}\text{。}$$

我們知道

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+x-0.5}=e^x\text{。}$$

所以只要能證明

$$\lim_{n\to\infty}e^{\mu(n+x)-\mu(x)}=1\ ,$$

那麼性質 (P) 就沒問題。事實上,

$$\mu(n+x)=\sum_{k=0}^{\infty}g(n+x+k)=\sum_{k=n}^{\infty}g(x+k)\quad\text{及}\quad\mu(n)=\sum_{k=0}^{\infty}g(n+k)=\sum_{k=n}^{\infty}g(k)$$

都是上面那個無窮級數的尾巴。所以當 n 趨近於無窮大時, 這兩個無窮級數當然都會趨近於 0。

現在我們回頭討論上面那個無窮級數 $\sum_{k=0}^{\infty}g(x+k)$ 的收斂性。首先我們將 g 寫成下面的形式:

$$g(x)=\frac{1}{2}(2x+1)\log\left(\frac{1+\frac{1}{2x+1}}{1-\frac{1}{2x+1}}\right)-1\text{。}\tag{5}$$

令 $y=\frac{1}{2x+1}$, 則 $0<y<1$, 此乃因爲 $x>0$。衆所皆知

$$\begin{aligned}
\log(1+y) &= +y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}+-\cdots \\
\log(1-y) &= -y-\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}-\cdots
\end{aligned}$$

所以, 我們有下面的展開式

$$\frac{1}{2}y^{-1}\log\left(\frac{1+y}{1-y}\right)=1+\frac{y^2}{3}+\frac{y^4}{5}+\frac{y^6}{7}+\cdots\ .$$

與上面 (5) 式合在一起, 我們得到

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{1}{3(2x+1)^2}+\frac{1}{5(2x+1)^4}+\frac{1}{7(2x+1)^6}+\cdots \\
&< \frac{1}{3(2x+1)^2}\left[1+\frac{1}{(2x+1)^2}+\frac{1}{(2x+1)^4}+\cdots\right] \\
&= \frac{1}{3(2x+1)^2}\frac{1}{1-(\frac{1}{2x+1})^2} \\
&= \frac{1}{12x}-\frac{1}{12(x+1)}。
\end{aligned}$$

因此, 我們有

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}g(x+k) &< \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{12(x+k)}-\frac{1}{12(x+k+1)}\right) \\
&= \frac{1}{12x}-\frac{1}{12(x+n+1)} \\
&< \frac{1}{12x}。
\end{aligned}$$

所以我們的無窮級數 $\sum_{k=0}^{\infty}g(x+k)$ 是正項級數, 而且其部份和是有上限的。結論是它是收斂的, 所以我們得到

$$\lim_{x\to\infty}\mu(x)=0 \quad 亦即 \quad \lim_{x\to\infty}e^{\mu(x)}=1。$$

界定三告訴我們 $f(x)=c\Gamma(x)$, 或者寫成下式

$$\Gamma(x)=sx^{x-0.5}e^{-x}e^{\mu(x)}\ ,$$

此處 $s=1/c=1/f(1)$ 爲一常數。這就證明了猜測三是對的, 此即一般所謂的 Stirling 公式。因此我們就把這個常數 s 稱之爲 Stirling 常數。

最後, 讓我們將上面所得到的結果用來決定 Stirling 常數, 做爲這篇文章的結束。我們會用到 $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$, 第 (3) 式, 以及上面剛得到的結果 $n!\sim sn^{n+0.5}e^{-n}$。且看:

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{0.5}n!}{\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}\cdots\frac{2n+1}{2}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n+1}(n!)^2 n^{0.5}}{(2n)!(2n+1)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n+1} s^2 n^{2n+1} e^{-2n} n^{0.5}}{s(2n)^{2n+0.5} e^{-2n}(2n+1)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{s(2n)}{\sqrt{2}(2n+1)}。
\end{aligned}
$$

所以我們有等式 $\sqrt{\pi} = s/\sqrt{2}$, 因此 $s = \sqrt{2\pi}$, 這就是 Stirling 常數。

參考資料

1. Artin, Emil : *The Gamma Function*, Holt, Rinehart & Winston, Inc., New York, 1964.
2. Artin, Emil : Einführung in die Theorie der Gammafunktion, Teubner, 1931.
3. Barnes, C.W. : Euler's constant and e, *Amer. Math. Monthly*, 91 (1984), 428-430.
4. Bohr, H. and Mollerup, J. : *Laerebog i matematisk Analyse*, Kopenhagen, 1922, vol. III, pp. 149-164.
5. Euler, Leonhard : *Institutiones calculi differentialis*, Teubner, 1980; Leonhardi Euleri opera omnia, 10.
6. Goodman, T.N.T. : Maximum Products and $\lim(1+\frac{1}{n})^n = e$, *Amer. Math. Monthly*, 93 (1986), 638-640.
7. Laugwitz, Detlef and Rodewald, Bernd : A simple characterization of the gamma function, *Amer. Math. Monthly*, 94 (1987), 534-536.
8. Rudin, Walter : *Principles of Mathematical Analysis*, 3rd Edition, McGraw-Hill Book Co., New York, 1976.
9. Shen, Yuan-Yuan : On characterizations of the gamma function, *Math. Mag.*, to appear, 1995.

—本文作者任教於東海大學數學系—