Brocard幾何的若干研究

殷堰工

在十九世紀末和二十世紀初, 一個研究 Brocard 幾何的熱潮陡然興起, 盛極一時, 歐洲大陸的數學家對這個饒有趣味的問題進行了深入的研究, 發現了大量關於 Brocard 點、Brocard 角、Brocard 線、Brocard 圓、第一和第二的 Brocard 三角形的性質, 在一定程度加快了幾何發展的進程。然而, 歷史的發展有時往往呈波浪型, 就像科學的思潮一樣, 總是波谷伴著波峰前進。一個世紀後的今天, 有關這一專題反而爲人們所淡漠, 近年來這方面的文獻寥若晨星, 很少見到, 筆者有意"三角形幾何"的研究, 自然不會捨去 Brocard 幾何的問題, 在參閱了大量資料的基礎上, 結合自己的研究, 撰成了這篇很不像樣又謂之爲"研究"的綜述性文章, 企盼拋磚引玉, 引起廣大同仁的興趣。

一. "張冠李戴"之說

談到 Brocard 幾何, 有必要介紹一下 Brocard 其人。Brocard(1845-1922) 是十九世紀的一名法國軍官, 也是一位數學愛好者, 他常常利用業餘時間鑽研數學, 具有較高的數學造詣。1875年他發現了三角形中的一個特殊點, 該點與三頂點的連線順次與三邊交成等角 (見圖1中的 P 點), 這就是所謂的 Brocard 點。其實, 早在1816年, 法國數學家 Crell(1780-1855) 就發現了這一特殊點, 只是未能引起當時的人們注意罷了。因此, 從嚴格意義上來講, Brocard點應說成是"Crell 點"。當然, 數學史上這樣的"張冠李戴"之事例甚多, 大家熟悉的"Heron 公式"便是例證, "Heron 公式"早就由 Archimed 給出, 只因 Archimed 對科學的貢獻太大, 這個發現於他來說委實是微不足道, 既然 Heron 也獨立地發現了公式, 後人便以訛傳訛, 認爲是 Heron 最先發現的了。

話說 Brocard 點發現後, 很快引起了一大批才華橫溢的數學家的注意, 如法國的 Lemoine, 英國的 Tucker 等, 一時竟形成了一股研究"三角形幾何"的熱潮, 成果累累, 其間的不少成就, 都與 Brocard 這個名字聯繫在一起, 於是, 便有了流傳至今的"Brocard 幾何"。

二. Brocard 幾何的有關概念

定義1: 如圖1所示, 設 P 爲 $\triangle ABC$ 內一點, 如 $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA =$

α, 則稱點 P 爲 $\triangle ABC$ 的 Brocard 點, 角 α 稱爲 Brocard 角。

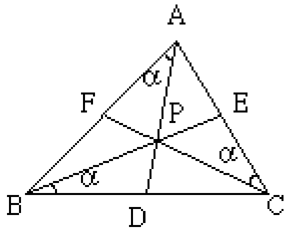

圖 1

定義2: 如圖1所示, 在定義1的基礎上, 將 AP、BP、CP 延長各交對邊於 D、E、F, 則稱 AD、BE、CF 爲 $\triangle ABC$ 的 Brocard 線。

定義3: 設 P 是 $\triangle ABC$ 的 Brocard 點, Q 是 $\triangle ABC$ 內一點, 且滿足 $\angle QAC = \angle QCB = \angle QBA = \alpha$, 則稱點 Q 爲負 Brocard 點, 而把 P 稱爲正 Brocard 點 (見圖2)

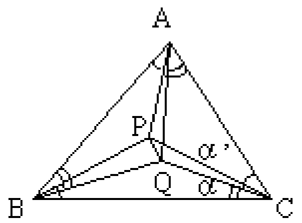

圖 2

註: 1. 爲方便起見, 不妨把 Q 點稱爲 P 點的等角共軛點。

2. 顯見, 三角形內的正、負 Brocard 點各有一個且只有一個。(詳見人民教育出版社梁紹鴻「初等數學復習及研究」「平面幾何」册一書)

定義4: $\triangle ABC$ 的重心 G 的等角共軛點稱爲$\triangle ABC$ 的類似重心。

定義5: 通過三角形之正、負 Brocard 點, 外心和類似重心四點的圓稱爲 Brocard 圓。

定義6: 以 $\triangle ABC$ 每一邊爲底, 以 Brocard 角 α 爲底角, 向內作三個等腰三角形, 其三個頂點分別設爲 A_0、B_0、C_0; 以 $\triangle ABC$ 邊 BC 爲弦作兩圓分別與 AB、AC 相切於弦之端點, 設兩圓在$\triangle ABC$ 內部相交於點 A_0', 類似地, 以 AB、AC 爲弦作一邊之切圓, 分別得圓之交點 B_0'、C_0', 稱內接於 Brocard 圓的兩個特殊三角形$\triangle A_0B_0C_0$ 及 $\triangle A_0'B_0'C_0'$ 爲第一和第二 Brocard 三角形。

註: 定義中的兩個 Brocard 三角形 $A_0B_0C_0$ 及 $A_0'B_0'C_0'$ 皆內接於 Brocard 圓這個事實, R. A. Johnson 在「近世幾何學」(中譯本, 商務印書館)p.333-363、Casey在「近世幾何學」(中譯本, 商務印書館)p.287-297上已作證明, 此不贅。

三. Brocard 幾何中的若干問題研討

1. 關於 Brocard 點

(1) **點的作圖**

Brocard點的作圖, 即 Brocard 點的存在性, 安徽「中學數學教學」1993年第三期有專文給出兩種作法, 江蘇「中學數學」1990年第四期也有文予以論述。這裡, 筆者給出一種較簡的方法, 操作如下:

過 $\triangle ABC$ 的頂點 A、B 且與 BC 邊相切的圓 O_1; 過 B、C 且與 AC 邊相切的圓 O_2; 過 A、C 且與 AB 邊相切的圓 O_3, 這三個圓 O_1、O_2、O_3 交於同一點 P (圖3)。

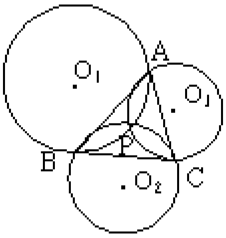

圖 3

類似地, 過 A、B 且與 AC 邊相切的圓, 過 C、A 且與 CB 邊相切的圓, 過 C、B 且與 BA 相切的圓, 這三個圓也交於同一點 Q。

則 P、Q 分別爲 $\triangle ABC$ 的正、負 Brocard 點。

證明並不困難, 只需過頂點 A 作$AA'//BC$, 過 C 作 CA' 使 $\angle ACA' = \angle B$, 交 AA' 於 A' (圖4) 於是, $\triangle A'AC \sim \triangle ACB$

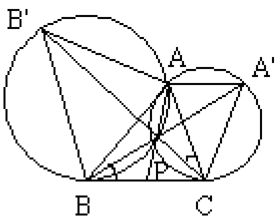

圖4

同理, 在 AB 邊作 $\triangle B'AB \sim \triangle BCA$, 連結 $A'B$、$B'C$, 所交之點就是 P, 這是因爲

在相似三角形 $A'AC$ 與 ACB 中, 有

$$\frac{AA'}{AC} = \frac{AC}{BC} \quad 及\ \angle A'AC = \angle BAC \quad (1)$$

在相似三角形 $B'AB$ 與 BCA 中, 有

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{BC} \quad 及\ \angle B'AB = \angle BAC \quad (2)$$

由 (1)、(2) 式得 $\frac{AA'}{AC} = \frac{AB}{AB'}$ 及 $\angle A'AC = \angle B'AB$。

從而知, $\triangle AA'B \sim \triangle ACB'$, 因此有

$\angle AA'P = \angle ACP$, $\angle AB'P = \angle ABP$。

由此, A、P、C、A' 及 A、P、B、B' 分別是共圓的, 我們有 $\angle PAB = \angle PB'B = \angle PCA = \angle AA'P = \angle PBC$。

對於 $\triangle ABC$ 內滿足 $\angle QAC = \angle QCB = \angle QBA$ 的點 Q, 可同理證得, 限於篇幅, 這裡略。

周知, 切線是割線的特殊情況, 如果把切線改爲割線呢? 我們便有:

過 $\triangle ABC$ 的兩頂點 A、B 的一圓 O_1 與 BC 邊交於 E, 過 C、E 點的圓 O_2 與 AC 邊交於 F, 圓 O_1 與圓 O_2 的另一交點爲 P, 則由三點 A、P、F 所確定的圓 O_3 與 AB 相切且切點爲 A。

這個結論的證明只需由圖5便知, 事實上,

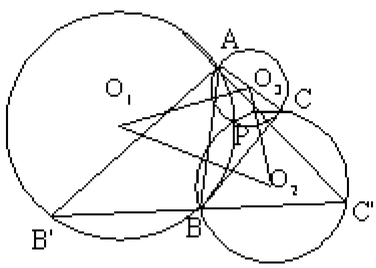

圖 5

由 A、P、C 所確定的圓爲 O_3, 連接 O_1O_2, O_2O_3, O_3O_1, 則 $\triangle O_1O_2O_3 \sim$

$\triangle AB'C'$, 於是, $\angle B'AC' = \angle O_1O_3O_2 = \frac{1}{2}\widehat{APC}$。

從而知, $\angle B'AC'$ 爲 A 點在圓 O_3 上的弦切角, 即 $B'A$ 爲由 A、P、C 三點所確定的圓之切線。

同理, $B'A'$ 爲 A'、P、C' 三點所確定圓之切線。

(2) **點的性質**

Brocard點具有許多重要的性質, 如正、負 Brocard 點與三角形的外心 O 這三點所組成的三角形中, 就有許多有趣的性質, 像 $OP=OQ$, 頂角爲 2α 等等。湖北「數學通訊」1986年第六期以"三角形 Brocard 點"作了專論, 俄國「量子」雜誌1992年第一期刊登了"Brocard 點"一文, 得到了一些有用的結果, 可參閱。

2. 關於 Brocard 角

(1) **一個重要的等式**

關於 Brocard 角 α, 我們有等式

$$\cot\alpha = \cot A + \cot B + \cot C$$

對於這個等式, 證法甚多, 俄「量子」雜誌1992年第一期給出一個漂亮的幾何證明, 此不贅。早在1984年, 筆者便在「蘇州教育學院學刊」創刊號上就給出過一個簡潔的三角證明, 方法如下:

如圖6所示, 設 $PA=x$, $PB=y$, $PC=z$

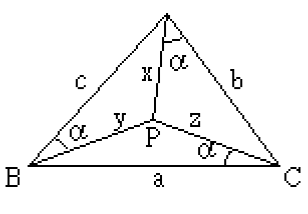

圖 6

而在 $\triangle ABC$ 中, 由餘弦定律, 有 $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$。

因 $\sin A \neq 0$, 故 $\cot A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc\sin A} = \frac{b^2+c^2-a^2}{4S_{\triangle ABC}}$, 這裡的 $S_{\triangle ABC}$ 爲 $\triangle ABC$ 的面積。

同理得 $\cot B = \frac{c^2+a^2-b^2}{4S_{\triangle ABC}}$, $\cot C = \frac{a^2+b^2-c^2}{4S_{\triangle ABC}}$。

於是, $\cot A + \cot B + \cot C = \frac{a^2+b^2+c^2}{4S_{\triangle ABC}}$。

類似地, 在 $\triangle PBC$、$\triangle PCA$、$\triangle PAB$ 中, 我們有

$$\begin{aligned} 4S_{\triangle PBC}\cot\alpha &= a^2+z^2-y^2,\\ 4S_{\triangle PCA}\cot\alpha &= b^2+x^2-z^2,\\ 4S_{\triangle PAB}\cot\alpha &= c^2+y^2-x^2。\end{aligned}$$

三式相加即得

$$\begin{aligned} &4\left(S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PCA}+S_{\triangle PAB}\right)\cot\alpha\\ =\ &a^2+b^2+c^2。\end{aligned}$$

亦即 $4S_{\triangle ABC} = a^2+b^2+c^2$, 故 $\cot\alpha = \frac{a^2+b^2+c^2}{4S_{\triangle ABC}}$。

顯然, 這一證法比其它證法簡單, 蘇州大學「中學數學」1990年第二期曾專文給出了該等式的四種證法, 其中包含了這一證法, 四法比較, 本文作者首先給出的證法爲最簡。不僅如此, 按此思路, 我們可方便地得到兩 Brocard 角是等角共軛點的結論。事實上, 由於 α 的餘切值僅與三角形的面積和三邊長有

關, 因此兩 Brocard 角 α 與 α' 是相等的。同時, 由此我們還可方便地推得

$$\sin\alpha=\frac{2S_{\triangle ABC}}{\sqrt{b^2a^2+c^2b^2+a^2c^2}}。$$

(2) **兩個結論**

(I) $PQ=2R\sin\alpha\sqrt{1-4\sin^2\alpha}$ (如圖2所示, R 是 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑)

證明: 在 $\triangle BQC$ 中, 依正弦定律得 $BQ=\frac{a}{\sin B}\sin\alpha$。

又在 $\triangle BQP$ 中, 依餘弦定律得 $PQ^2=BP^2+BQ^2-2BP\cdot BQ\cos(B-2\alpha)$, 於是,

$$\begin{aligned}PQ^2&=\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2 B}[c^2+a^2-2ca\cos(B-2\alpha)]\\&=\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2 B}[b^2+2ca\cos B-2ca\cos(B-2\alpha)]\\&=\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2 B}\{b^2+2ca[\cos B-\cos(B-2\alpha)]\}\\&=\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2 B}[b^2-2ca\cdot 2\sin(B-\alpha)\sin\alpha]\\&=\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2 B}b^2[1-4\frac{ca}{b^2}\sin(B-\alpha)\sin\alpha]。\end{aligned}$$

但 $\frac{ca}{b^2}=\frac{\sin\alpha}{\sin(B-\alpha)}$, 故 $PQ^2=\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2 B}4R^2\sin^2 B\ [1-4\frac{\sin\alpha}{\sin(B-\alpha)}\cdot\sin(B-\alpha)\sin\alpha]=4R^2\sin^2\alpha\ (1-4\sin^2\alpha)$。

故 $PQ=2R\sin\alpha\sqrt{1-4\sin^2\alpha}$ 。

(II) $\alpha\le\frac{\pi}{6}$

證明: 由結論(I) 知 $1-4\sin^2\alpha\ge 0$ 從而 $\sin\alpha\le\frac{1}{2}$ 故 $\alpha\le\frac{\pi}{6}$, 當且僅當 $\triangle ABC$ 爲正三角形時等號成立, 此時 $PQ=0$。

由等式 (1) 和結論 (II) 我們可很快地證得著名的 Weitgenböeck 不等式 $a^2+b^2+c^2\ge 4\sqrt{3}S_{\triangle ABC}$。事實上,

由 $\frac{a^2+b^2+c^2}{4S_{\triangle ABC}}=\cot\alpha\ge\sqrt{3}$ 即得, 這個證法就是筆者在「日本數學教育學會誌」1992年第一期上給出的三角證法。

3. 關於 Brocard 點引出的一個邊長公式

在圖6中,「數學通報」1993年第3期給出了一個計算公式:

$$x+y+z=\frac{a^2b+b^2c+c^2a}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}},$$

該文證明過程冗長, 本文給出一種較簡的方法。

證明: 在 $\triangle APC$ 中, 由正弦定律知 $\frac{z}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\angle APC}$。

故 $z=b\frac{\sin\alpha}{\sin\angle APC}=b\frac{\sin\alpha}{\sin A}=\frac{b}{\sin A}\sin\alpha$。

同理有 $x=\frac{c}{\sin B}\sin\alpha$, $y=\frac{a}{\sin C}\cdot\sin\alpha$。

於是, $x+y+z=\sin\alpha(\frac{b}{\sin A}+\frac{c}{\sin B}+\frac{a}{\sin C})$。

依前面推出的 $\sin\alpha=\frac{2S_{\triangle ABC}}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$ 立得

$$\begin{aligned}&x+y+z\\=&\frac{2\cdot\frac{abc}{4R}}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}(\frac{b}{\sin A}+\frac{c}{\sin B}+\frac{a}{\sin C})\\=&\frac{abc\cdot\frac{1}{2R}}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}(\frac{b\cdot 2R}{a}+\frac{c\cdot 2R}{b}+\frac{a\cdot 2R}{c})\\=&\frac{a^2b+b^2c+c^2a}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}\end{aligned}$$

四. 結語

Brocard問題是個極富趣味的問題, 儘管前人對它的研究已經很深入, 但推陳可以

出新。本文的"新", 僅局限於對已有結論的證法上。但就整篇文章而言, 仍不失爲一篇頗爲完整的綜述性文章, 筆者撰本文之宗旨乃提醒人們: 不要重複發現前人的成果, 但決不是要忘記前人的成果, 而是要在前人成果的基礎上有所創新。是否達意, 敬請識者評價和指教。

—本文作者任教於蘇州教育學院數學系—