中學數學漫談──扇形之美

洪鋕雄

您看過“楚留香”連續劇嗎? 劇中的男主角楚香帥綸巾披褂, 手持香扇一把, 舉手投足無不豐采奪人, 當他右手把扇子一摔, 摔出一個扇形時, 那種帥勁美到最高點, 不知迷倒多少女性觀衆, 令人久久難忘 ── 這是影劇的扇形之美。

在幾何上的扇形比這個更美, 不僅美在外形, 也美在內涵, 怎麼個美法且聽我道來:

先說明在數學上扇形的定義: 在一個圓上截取一段圓弧, 然後過此弧的兩端點分別與圓心連線作兩條半徑, 則此二半徑與圓弧所圍的區域就稱爲一個扇形。依此定義您可說鐘面上的秒針自某位置開始轉動, 轉動的角度不超過360度, 則轉動所掃過的一個區域就是一個扇形; 當然一把扇, 將其張開也是一個扇形, 棒球場上以本壘爲中心的紅土部分也是一個扇形。

扇形在幾何上怎麼個美法? 您曉得直圓錐的側面積怎麼求得的嗎? 我們可以利用扇形的面積來求。先提一下下列公式: 設扇形的半徑爲 r, 弧長爲 S, 中心角爲 θ (弧度), 面積爲 A, 則

$$(1)\quad S=r\theta \qquad (2)\quad A=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}rS$$

曉得上面公式後, 我們就可以用它來求直圓錐的側面積: 設直圓錐的底半徑爲 r, 斜高爲 l, 設想此圓錐是用紙黏成的, 現拿一把剪刀沿斜高剪開, 然後將圓錐面攤開就成一個以 l 爲半徑, 底周長爲弧長的扇形了, 如圖1, 因直圓錐的底周長爲 $2\pi r$, 故攤開後之扇形弧長爲 $2\pi r$, 因此扇形面積 $=\frac{1}{2}l(2\pi r)=\pi rl$, 此即爲直圓錐之側面積, 以上的解法很美, 美在將立體的圖形展開成平面的圖形, 您認爲是嗎?

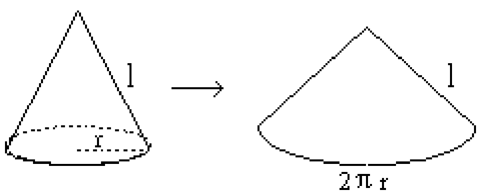


圖 1

其次我們來看看是否存在一個扇形它的周長等於它的面積 (指兩者度量相等), 分析如下: 設扇形的半徑爲 r, 中心角爲 θ (弧度), 則弧長 $=r\theta$, 周長 $=2r+r\theta$, 面積 $=\frac{1}{2}r^2\theta$, 依題意有 $2r+r\theta=\frac{1}{2}r^2\theta$, 兩邊消去 r, 解得 $\theta=\frac{4}{r-2}\,(r\neq 2)$, 因此得到

下列結論: 假如一個扇形的半徑 $\neq 2$, 則當 $\theta = \frac{4}{r-2}$ 時, 此扇形的周長必等於此扇形的面積。

其次假如我們固定扇形的周長, 則何時面積最大? 即令 $2r + r\theta = L$ (為定值), 則由 $AM \geq GM$ 得:

$$L = 2r + r\theta \geq 2\sqrt{2r^2\theta} \quad 即\ 2r^2\theta \leq \frac{L^2}{4}$$
$$所以\frac{1}{2}r^2\theta \leq \frac{L^2}{16}\ 為最大面積。$$

此時 $2r = r\theta$ 所以$\theta = 2$ (弧度) 即周長固定為 L 時, 則當中心角 $= 2$ (弧度) 時, 此扇形有最大面積 $\frac{L^2}{16}$。

反之, 固定扇形面積為 A, 即設 $\frac{1}{2}r^2\theta = A$ (A 為定值)。

$$則\ r^2\theta = 2A,$$
$$所以 2r + r\theta \geq 2\sqrt{2r^2\theta} = 2\sqrt{4A} = 4\sqrt{A}$$
為最小周長, 此時 $2r = r\theta$, 即 $\theta = 2$。

也就是說: 面積固定為 A 時, 則當中心角 $= 2$ (弧度) 時, 此扇形有最小周長 $4\sqrt{A}$。(此結論亦可由 $\frac{L^2}{16} = A$, 解得 $L = 4\sqrt{A}$)

給您一個練習:

練習1. 試證等周長的扇形與矩形, 兩者的最大面積相等。(key: 設周長為 L, 則最大面積均為 $\frac{L^2}{16}$)。

下面我們提出一連串有關扇形的問題, 這些題目由淺入深, 希望您能從中領會其中解法之美, 有些細節留給您去想想個中道理:

題1: 下圖2之扇形 AOB 中, $\angle AOB = 90°$, 半徑 $\overline{OA} = \overline{OB} = 1$, 分別以 $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ 為直徑在扇形內部作半圓, 求斜線部分的面積。

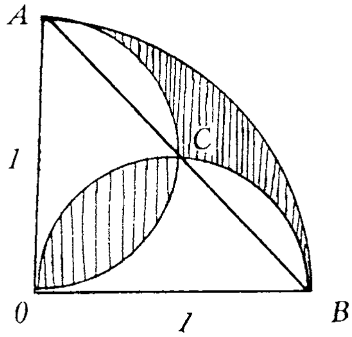


圖 2

解:

1. 連接 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BC}$ 則 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BC}$ 共線, 且弓形 AC 與 CB。兩者面積的和等於梭形 $0C$ 之面積 (為何?)
2. 所以斜線部分面積=弓形 ACB 之面積

$$= 扇形\mathrm{A0B}\ 之面積 - \triangle AOB\ 之面積$$
$$= \frac{1}{4}\pi\times1^2 - \frac{1}{2}\times1^2 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(平方單位)。$$

題2: 正方形之邊長為1, 分別以正方形的頂點為圓心, 1為半徑畫4個圓弧, 相交如下圖所示, 求斜線部份的面積。

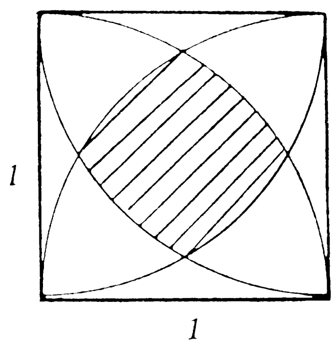


圖 3

解: 這個問題的解法很多, 我們藉助於“餘弦定理”來解會比較方便, 先介紹何謂“餘弦定理”? 就是: △ 中, 任一邊的平方等於其他兩邊的平方和減去兩邊與夾角餘弦乘積的兩倍。

1. 令正方形四頂點爲 $ABCD$, 斜線部分的四頂點爲 $PQRS$, (如圖4所示)

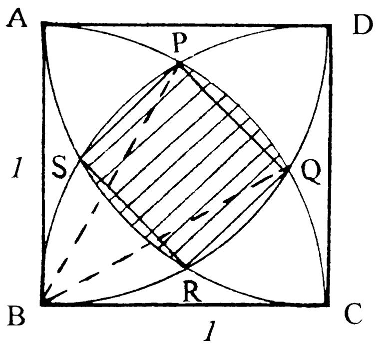


圖 4

2. 連接 $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$, $\overline{RS}$, $\overline{SP}$ 與 $\overline{BP}$, $\overline{BQ}$, 則 $\angle PBQ=\frac{\pi}{6}$, (爲何?) 正方形 $PQRS$ 的面積 $=\overline{PQ}^2$, 依餘弦定理得

$$\begin{aligned}\overline{PQ}^2 &= \overline{BP}^2+\overline{BQ}^2-2\overline{BP}\times\overline{BQ}\\ &\quad\times\cos(\angle PBQ)\\ &= 1^2+1^2-2\times 1\times 1\times\cos\frac{\pi}{6}\\ &= 2-\sqrt{3}\end{aligned}$$

3. 弓形 PQ 的面積

$$\begin{aligned}&= \text{扇形BPQ 的面積}-\triangle BPQ\text{的面積}\\ &= \frac{1}{2}\times 1^2\times\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\times 1^2\times\sin\frac{\pi}{6}\\ &= \frac{\pi}{12}-\frac{1}{4}\end{aligned}$$

4. 於是所求面積

$$\begin{aligned}&= \text{正方形}PQRS\text{的面積}+4\text{個弓形 PQ 的面積}\\ &= (2-\sqrt{3})+4(\frac{\pi}{12}-\frac{1}{4})\\ &= \frac{\pi}{3}+1-\sqrt{3}(\text{平方單位})\end{aligned}$$

題3: 如圖5扇形 OAB 之半徑 r, 圓心角爲 $60°$, 訁 面積。

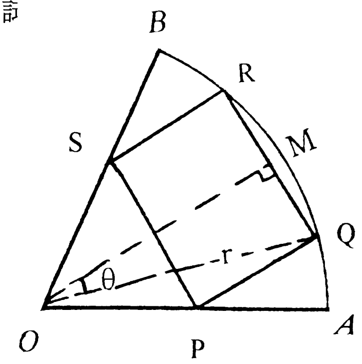


圖 5

解:

1. 作 $\angle AOB$ 的平分線交 $\overline{QR}$ 於 M, 則 $\angle MOA=30°$, 令 $\angle MOQ=\theta$, 則 $\overline{OM}=r\cos\theta$, $\overline{QM}=r\sin\theta$, 所以$\overline{QR}=2r\sin\theta$。

$$\begin{aligned}\overline{PQ} &= r\cos\theta-r\sin\theta\cot\,30°\\ &= r(\cos\theta-\sin\theta\sqrt{3})\\ &= 2r(\sin 30°\cos\theta-\cos 30°\sin\theta)\\ &= 2r\sin(30°-\theta)\text{。}\end{aligned}$$

2. 面積 $=4r^2\sin\theta\cdot\sin(30°-\theta)=2r^2[\cos(2\theta-30°)-\cos 30°]$ (化積成差)。
3. 顯然 $2\theta-30°=0°$ 時有最大面積 $2r^2(1-\frac{\sqrt{3}}{2})=(2-\sqrt{3})r^2$。

將以上問題擴大到一般情形:

給定一扇形, 半徑爲 r, 中心角爲 2α ($r > 0$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$), 求此扇形內接矩形 $PQRS$ 的最大面積 (Q, R 在圓弧上 P, S 分在兩半徑上)(參閱圖5)

令這最大面積是扇形面積的 $S(\alpha)$ 倍, 試證 $\frac{1}{2} < S(\alpha) < \frac{2}{\pi}$。(70年全國數競第一階段試題)

解:

1. 最大面積仿上易求得爲 $r^2 \tan\frac{\alpha}{2}$。
2. $S(\alpha) = \frac{r^2\tan\frac{\alpha}{2}}{\frac{r^2}{2}(2\alpha)} = \frac{\tan\frac{\alpha}{2}}{\alpha} = \frac{1}{2}\frac{\tan\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}}$, 因爲$0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{4}$, 所以$\frac{\tan\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} > 1$ (參閱後面圖9所證明之性質), 故 $S(\alpha) > \frac{1}{2}$。
3. 其次當 $\theta \in (0, \frac{\pi}{4})$ 時, 若能證明 $\frac{\tan\theta}{\theta}$ 遞增則當 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 時, 就可得到 $S(\alpha)$ 的上限 $\frac{2}{\pi}$。如圖6所示

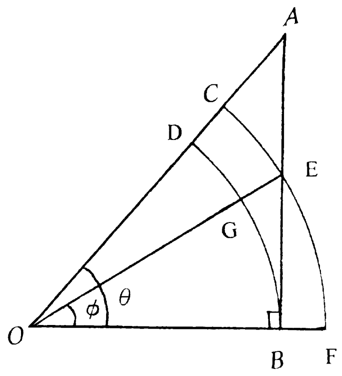


圖 6

$\frac{\triangle OAE}{\text{扇形}_{ODG}} > \frac{\text{扇形}_{OCE}}{\text{扇形}_{ODG}} = \frac{\text{扇形}_{OEF}}{\text{扇形}_{OGB}} > \frac{\triangle OEB}{\text{扇形}_{OGB}}$

所以$\frac{\triangle OAE}{\text{扇形}_{ODG}} > \frac{\triangle OEB}{\text{扇形}_{OGB}}$。

利用 $\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} > \frac{c}{d}$

可得 $\frac{\triangle OAE+\triangle OEB}{\text{扇形}_{ODG}+\text{扇形}_{OGB}} > \frac{\triangle OEB}{\text{扇形}_{OGB}}$

即 $\frac{\triangle OAB}{\text{扇形}_{ODB}} > \frac{\triangle OEB}{\text{扇形}_{OGB}}$

所以$\frac{\tan\theta}{\theta} > \frac{\tan\phi}{\phi}$, 於是得: $\theta > \phi \Rightarrow \frac{\tan\theta}{\theta} > \frac{\tan\phi}{\phi}$

4. 因爲$0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{4}$ 所以$S(\alpha) = \frac{1}{2}\frac{\tan\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} < \frac{1}{2}\frac{\tan\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{2}{\pi}$ (另外唸過理科數學的同學亦可用三角函數微分的方法證明 $f'(\theta) > 0$, 於是 $f(\theta)$ 遞增, 此處 $f(\theta) = \frac{\tan\theta}{\theta}$)。

題4: 有一扇形 AOB 其中心角 $\angle AOB$ 爲 θ, 半徑爲 r, 設 P 爲弧 $\widehat{AB}$ 上任一點, 自 P 向兩半徑 $\overline{OA}$ 及 $\overline{OB}$ 各作垂線, 垂足分別爲 Q 及 R, 試證線段 $\overline{QR}$ 的長爲一定值(圖7)(82年全國數競第二階段試題)。

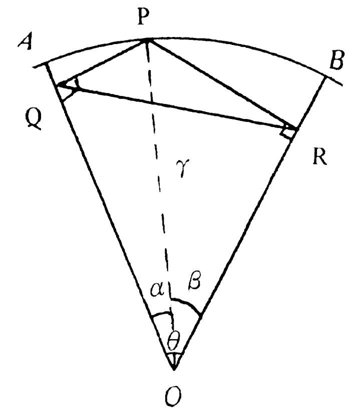


圖 **7**

證明:

1. 連接 $\overline{OP}$ 設 $\angle AOP = \alpha$, $\angle BOP = \beta$, 則 $\alpha + \beta = \theta$, 且 $\angle QPR = \pi - \theta$, 在 $Rt\triangle OPQ$ 中, $\overline{PQ} = r\sin\alpha$, 又在 $Rt\triangle OPR$ 中, $\overline{PR} = r\sin\beta$。

2. 在 $\triangle PQR$ 中, 由 餘 弦 定 理 得

$$\begin{aligned} &\overline{QR}^2 \\ =\ & \overline{PQ}^2 + \overline{PR}^2 - 2\overline{PQ}\ \overline{PR}\cos(\angle QPR) \\ =\ & r^2\sin^2\alpha + r^2\sin^2\beta \\ & \quad -2r^2\sin\alpha\sin\beta\cos(\pi-\theta) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= r^2(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta\cos\theta)\\
&= r^2(\frac{1-\cos 2\alpha}{2}+\frac{1-\cos 2\beta}{2}\\
&\quad +2\sin\alpha\sin\beta\cos\theta)\\
&= r^2[1-\frac{1}{2}(\cos 2\alpha+\cos 2\beta)\\
&\quad +2\sin\alpha\sin\beta\cos\theta]\\
&= r^2[1-\frac{1}{2}\cdot 2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)\\
&\quad +2\sin\alpha\sin\beta\cos\theta]\\
&= r^2[1-\cos\theta\cos(\alpha-\beta)+(\cos(\alpha-\beta)\\
&\quad -\cos(\alpha+\beta))\cos\theta]\\
&= r^2[1-\cos\theta\cos(\alpha-\beta)\\
&\quad +\cos(\alpha-\beta)\cos\theta-\cos^2\theta]\\
&= r^2(1-cos^2\theta)=r^2\sin^2\theta \text{ 爲定值}
\end{aligned}
$$

練習2: 在扇形 AOB 中 O 爲中心, $\overline{OA}=\overline{OB}=r$, P 爲圓弧 $\widehat{AB}$ 上任一點, 而 P 至 $\overline{OA}$ 的距離爲 a, 至 $\overline{OB}$ 的距離爲 b, 試將 r 以 a,b 表示之 (77大學聯, 答案: $\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2+ab+b^2}$)。

練習3: 圖8中, 扇形 AOB 之半徑爲14, 中心角爲 θ, 在 $\widehat{AB}$ 上有一點 P, 由 P 對 $\overline{OA}$ 作垂直線段 $\overline{PQ}$, 其長13, P 對 $\overline{OB}$ 作垂直線段 $\overline{PR}$, 其長11, 求 (1) θ (2) 斜線部分的面積 (答案: (1) $\frac{2\pi}{3}$ (2) $\frac{196\pi}{3}-47\sqrt{3}$)。

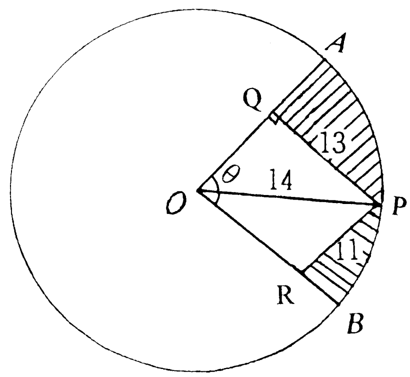


圖 8

其次我們來談一個問題, 您曉得三角函數中, $\sin x$ 的導函數爲$\cos x$, $\cos x$ 的導函數爲 $-\sin x$ 嗎? 即 $\frac{d\sin x}{dx}=\cos x$, $\frac{d\cos x}{dx}=-\sin x$, 這兩個公式的導出跟“扇形”也扯上關係: 原來我們可藉助於“扇形”先導出下列性質 (1), 再由 (1) 導出 (2) 而最後可導出 $\sin x$, $\cos x$ 的微分公式:

(1) 設 $\frac{-\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$, $x\neq 0$, 則 $|\sin x|<|x|<|\tan x|$。

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$。

(1) 證明: 分下列兩種情形進行:

1. $0<x<\frac{\pi}{2}$: 如下圖9單位圓中, $\angle AOB=x$, 過 A 作圓的切線交 $\overrightarrow{OB}$ 於 C,

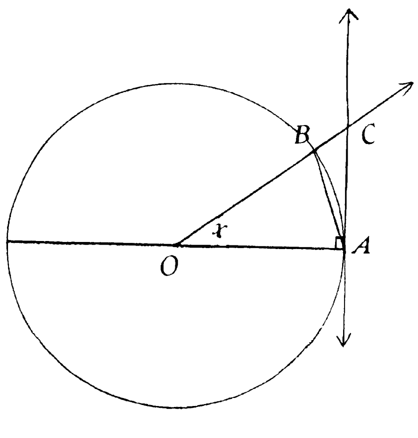


圖 9

則 $\triangle AOB <$ 扇形$AOB < \triangle AOC$, 由扇形面積$=\frac{1}{2}r^2\theta$ (r 表半徑, θ 表中心角以弧度計), 可得 $\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x$, 所以$\sin x < x < \tan x$, 即 $|\sin x| < |x| < |\tan x|$。

2. $-\frac{\pi}{2} < x < 0$: 即 $0 < -x < \frac{\pi}{2}$, 由1可得 $\sin(-x) < -x < \tan(-x)$, $-\sin x < -x < -\tan x$ 即 $|\sin x| < |x| < |\tan x|$。

綜上1.2知: $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $x \neq 0$, 恆有 $|\sin x| < |x| < |\tan x|$。

(2) 證明: 所以$x \to 0$ 所以 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $x \neq 0$ 由 (1) 知 $|\sin x| < |x| < |\tan x| = \frac{|\sin x|}{|\cos x|}$

$\Rightarrow 1 < \frac{|x|}{|\sin x|} < \frac{1}{|\cos x|} \Rightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ (因爲$\sin x$ 與 x 同號, 而 $\cos x > 0$)

$\Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ 因爲$x \to 0$ 時, $\cos x \to 1$ 所以由挾擠定理知 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$。

於是

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d\sin x}{dx}\right|_{x=a} &= \lim_{x\to a}\frac{\sin x - \sin a}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a}\frac{2\cos\frac{x+a}{2}\cdot\sin\frac{x-a}{2}}{x-a}
\end{aligned}$$

(分子利用 $\sin x - \sin y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cdot\sin\dfrac{x-y}{2}$)

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2}\cdot\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} \\
&= \lim_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2}\cdot\lim_{\frac{x-a}{2}\to 0}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} \\
&= \cos a\cdot 1 = \cos a
\end{aligned}$$

所以 $\dfrac{d\sin x}{dx} = \cos x$, 同理可得

$$\frac{d\cos x}{dx} = -\sin x$$

最後我們再來證明一個問題: 球面上兩點間之弧長以通過該兩點之大圓的圓弧爲最短。

證明:

1. 設球面 $S: x^2+y^2+z^2=r^2$ 上兩點 A、B (設同緯度) (可以將球適當的作翻轉而達此要求, 故不失其一般性)。
2. 設 A、B 兩點所在的餘緯度爲 ϕ ($\phi = 90^\circ - \phi'$, ϕ' 表緯度, 北緯取+, 南緯取−)(參閱圖10) 令 $\angle AOB = \theta$, 小圓弧之圓心爲 E, $\angle AEB = \alpha$ ($0 < \theta$, $\alpha < \pi$), 大圓弧 $\widehat{AB}$ 長爲 S, 小圓弧 $\widehat{AB}$ 長爲 S' (圖11), 則小圓弧之半徑 $\overline{EB} = r\cdot\sin\phi$ (圖12)。

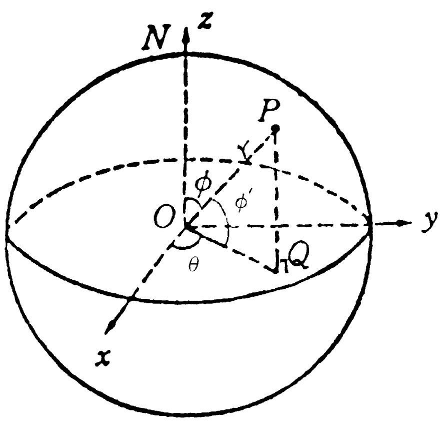
$$\begin{aligned}
S &= r\theta, \\
S' &= \overline{EB}\cdot\alpha = (r\sin\phi)\alpha = r\alpha\sin\phi。
\end{aligned}$$

3. 將 $\triangle EAB$ 繞 $\overline{AB}$ 翻轉使與 $\triangle OAB$ 共平面 (圖 13), 則 $\angle BOE=\frac{\theta}{2}$, $\angle BEO=\frac{\alpha}{2}$。由正弦定理得 $\frac{\overline{OB}}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{\overline{BE}}{\sin\frac{\theta}{2}}$, 此中 $\overline{OB}=r$, $\overline{BE}=r\sin\phi$。

所以$r\sin\frac{\theta}{2}=r\sin\phi\sin\frac{\alpha}{2}$,

即 $\sin\frac{\theta}{2}=\sin\phi\sin\frac{\alpha}{2}$,

所以$\frac{\sin\phi}{1}=\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}(*)$。



(ϕ' 表 P 點的緯度, θ 表 P 點的經度。)

圖 10

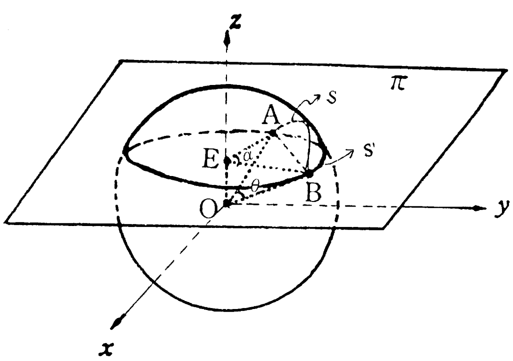


圖 11

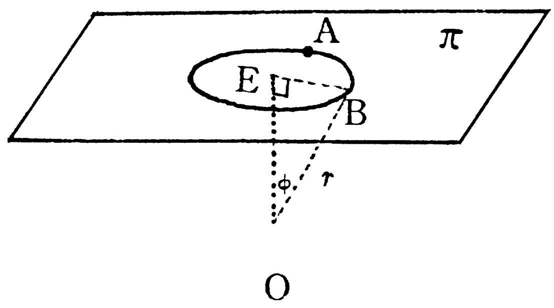


圖 12

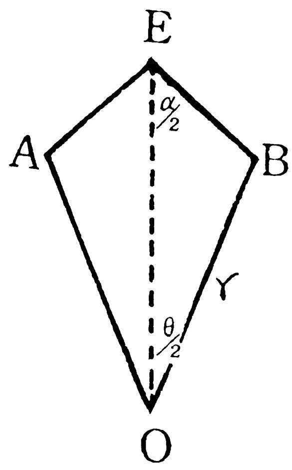


圖 13

現欲證明 $S'>S$ 即欲證 $\frac{S'}{S}=\frac{r\alpha\sin\phi}{r\theta}=\frac{\alpha\sin\phi}{\theta}>1$, 即欲證 $\frac{\theta}{\alpha}<\frac{\sin\phi}{1}$ 由上面 $(*)$ 知: 即欲證 $\frac{\frac{\theta}{2}}{\frac{\alpha}{2}}<\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$, 也就是 $\frac{sin\alpha/2}{\alpha/2}<\frac{\sin\theta/2}{\theta/2}$, 因大圓半徑 $\overline{OB}>$ 小圓半徑 $\overline{EB}$, 故 $\alpha/2>\theta/2$。所以 只要證明 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 爲減函數即可, (其中 $0<x<\frac{\pi}{2}$)。

4. 應用三角之和角公式 設 $0<\beta<\alpha<\frac{\pi}{2}$
令 $\alpha=\beta+r$, $r>0$,

$$\text{則}\ \frac{\sin\beta}{\beta}-\frac{\sin\alpha}{\alpha}=\frac{\alpha\sin\beta-\beta\sin\alpha}{\alpha\beta}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\alpha\beta}[(\beta+r)\sin\beta-\beta\sin(\beta+r)]\\
&= \frac{1}{\alpha\beta}[(\beta+r)\sin\beta-\beta(\sin\beta\cos r\\
&\quad +\cos\beta\sin r)]\\
&= \frac{1}{\alpha\beta}[\beta\sin\beta(1-\cos r)+r\sin\beta\\
&\quad -\beta\cos\beta\sin r]
\end{aligned}
$$

而 $1-\cos r>0$,

且 $r\sin\beta-\beta\cos\beta\sin r$

$$
\begin{aligned}
&= r\sin\beta-(\beta\cos\beta)\sin r\\
&> r\sin\beta-\sin\beta\sin r\\
&\qquad (\text{因爲}\beta<\tan\beta=\frac{\sin\beta}{\cos\beta})\\
&= \sin\beta(r-\sin r)>0\ (\text{因爲} r>\sin r)
\end{aligned}
$$

所以$\dfrac{\sin\beta}{\beta}>\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$, 當$\beta<\alpha$ 時,

故 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 爲減函數。

所以本問題得證。

這就是我們坐飛機從洛杉磯經漢城飛回台北, 飛機不直接朝向漢城飛, 而要繞到北極南方阿留申群島上空飛行的道理, 因爲後者的航線是在一大圓弧上的緣故。

參考資料

1. 台大數學系主編: 中華民國科學才能青年選拔活動高中數學競試試題及答案分析專集, 台北市中華文化復興運動推行委員會。
2. 國立台灣師大附中主編: 高中數學充實教材第三輯, 台北市教育部中等教育司出版。

—本文作者任教於省立嘉義女子高中—