唐宋曆法中的交食周期與連分數算法

曲安京

在中國傳統數學與數理天文學中，以有理數逼近實數的事例不勝枚舉。中國古代曆法中衆多的天文常數幾乎皆以非十進分數表示，一些精度極高的簡單分數早已引起天算史學者的廣泛關注。有關中國古代的實數有理逼近的算法與理論的探討多年來未曾間斷，除了史有所記的“調日法”之外，華羅庚、呂子方與李繼閔等先生更推斷中國古代曾出現過與連分數展開相當的算法 [1,2]。本文試圖通過對唐宋曆法中交食周期常數之選擇算法的探原，爲“連分數算法說”提供一些新的證據。

一、曆法中的交食周期

如所周知，當日月同時運行至同一個黃白交點附近合朔時，便會發生日食。要想準確地推求日食，就需掌握良好的朔望月與交點月或交點年等天文常數。

交食周期就是人們給出這些常數間的一種簡單的數學關係，沒有一組整數：m, n, l，使

$$n \cdot \text{朔望月} = m \cdot \text{交點月} = l \cdot \text{交點年} \quad (1)$$

其中 $l = m - n$。天文學史上很有名的沙羅周期 (Saros) 即是巴比倫人發現的一個交食周期：取223個朔望月 = 19 個食年 ($n/l = 223/19$)。

中國古代早期的曆法通常以半個食年 (太陽從一個黃白交點運行至另一交點的時間) 給出其交食周期，稱爲一會積日。例如漢代的三統曆即取135個朔望月=23個一會積日 ($n/l = 270/23$)。

但是，由於這些天文常數之間不可通約，所以，交食周期均不過是對它們之間比值的某種有理逼近的結果。換句話說，在曆法推算愈來愈準確的情形下，交食周期總不如直接運用朔望月等常數在日月食推求中更精確。因此，唐代之後，中國曆法在日月食計算中一律不再使用交食周期預推其發生時間。

然而，有趣的是，絕大多數唐宋曆法中仍然可以發現一些不同的交食周期，曆法家們稱其爲：交率 $= l$，交數 $= m$。它們用於如下算式中：

$$\begin{aligned}\text{入交定日} = \quad & \text{入交常日} + \text{太陽改正} \\ & + \tfrac{l}{m} \cdot \text{月亮改正}\end{aligned}$$

其中入交定日與入交常日分別表示定朔望與平朔望時刻月亮距離黃白交點的運行時間。

有關這個算式的數理分析與幾何解釋, 藪內清與劉金沂分別做過精辟的論述[3,4]。我們感興趣的僅僅是, 這些曆法中的 $\frac{\text{交率}}{\text{交數}} = \frac{l}{m}$ 是如何得來的?

因爲 $\frac{l}{m} = \frac{\text{交點月}}{\text{交點年}}$, 而唐宋曆法中均不列出交點年數據, 因此, 令 $n = m - l$, 我們可依

$$\frac{m}{n} = \frac{\text{朔望月}}{\text{交點月}} = \frac{B}{J}$$

來探討曆取值 $\frac{B}{J}$ 與 $\frac{m}{n}$ 之關係。其中 B 與 J 分別爲曆取朔望月與交點月常數之分數。

二、唐宋曆法交食周期分析

從唐代李淳風的麟德曆 (664年) 至元代郭守敬的授時曆 (1280年), 基本上保存下來的曆法共23部, 其中有16部於步交會章中列出一交食周期, 其餘7部情形如次: 欽天曆 (956年) 近似以月亮日行速13.375表示 $\frac{m}{l}$; 應天曆 (962年) 與明天曆 (1064年) 未計算入交定日[5], 而是以另一種算法步之; 開禧曆 (1207年) 與成天曆 (1271年) 未載有關術文與數據; 重修大明曆 (1180年) 與庚午元曆 (1220年) 則以 $\frac{m}{l} = 12.7$ 曆近似計算[6]。

表 1. 唐宋曆法交食周期常數

曆名	作者	年代	朔望月/交點月 $= B/J$	交數 l	交率 m	$n = m - l$	$\Delta = \lvert\frac{B}{J} - \frac{m}{n}\rvert$
麟德曆	李淳風	664	$39571/36464\ \frac{113}{300}$	61	777	716	5.9×10^{-7}
大衍曆	一行	724	89773/82725.1322	343	4369	4026	1.3×10^{-8}
五紀曆	郭獻之	762	39571/36464.3767	61	777	716	5.9×10^{-7}
正元曆	徐承嗣	784	32336/29797.3815	61	777	716	4.9×10^{-7}
宣明曆	徐昻	822	248057/228582.6512	202	2573	2371	2.6×10^{-8}
崇玄曆	邊岡	892	398663/367364.9673	263	3350	3087	3.5×10^{-8}
乾元曆	吳昭素	981	86820/80003.9455	142	1809(1)	1667	1.4×10^{-5}
儀天曆	史序	1001	298259/274843.2279	45	573	528	3.0×10^{-5}
崇天曆	楚衍	1024	312729/288177.4277	141	1796	1655	3.5×10^{-7}
觀天曆	皇居卿	1092	355253/327362.9944(2)	183	2331	2148	3.8×10^{-6}
紀元曆	姚舜輔	1106	215278/198377.0880	324	4127	3803	1.1×10^{-8}
統元曆	陳得一	1135	204647/188580.6457	42	535	493	3.5×10^{-6}
乾道曆	劉孝榮	1167	885917.76/816366.6034	80	1019	939	1.0×10^{-6}
淳熙曆	劉孝榮	1176	166552.56/153476.9543	61	777	716	3.6×10^{-7}
會元曆	劉孝榮	1191	1142834/1053113.2140	507	6458	5951	3.0×10^{-10}
統天曆	楊忠輔	1199	354368/326547	19	242	223	4.3×10^{-6}

(1) 乾元曆 $\frac{B}{J} \approx \frac{86820}{80004} = \frac{1808.75}{1666.75} \approx \frac{1809}{1667}$, 原文將 1809 誤爲 1802。

(2) 原文 327361.9944; 觀天曆交食週期 $l:m:n=61:777:716$。

16部給出交食周期的曆法的基本情況如表1所示, 我們的目的主要是探討這些曆法中之 $\frac{m}{n}$ 與連分數算法之關係。在此之前, 我們必須先明確一下 $\frac{m}{n}$ 與 $\frac{B}{J}$ 之關係。

由表1可見, $\Delta=|\frac{B}{J}-\frac{m}{n}|$ 大致在 10^{-7} 左右, 如此逼近的程度, 表明 $\frac{m}{n}$ 與 $\frac{B}{J}$ 必有一定聯繫。假定 $\frac{B}{J}$ 係據 $\frac{m}{n}$ 推導而來, 則因爲朔望月爲基本曆取常數, 而必然導得 $J=\frac{m}{n}\cdot B$的結論; 亦即曆取交點月 $\frac{J}{A}$ (A 爲日法) 係據 $\frac{m}{n}\cdot\frac{B}{A}$ 而大致推定的常數。

但事實上, 自從祖沖之大明曆 (463年) 首次給出交點月常數以來[7], 歷家所取 $\frac{J}{A}$ 基本上在 27.21222 ~ 27.21223 之間, 精度已達 10^{-5}, 且十分穩定。與此相類, 中國古代曆法中的朔望月 $\frac{B}{A}$ 取值在 29.53059 ~ 29.53060 之間, 精度亦達 10^{-5}, 曆法家認爲在此範圍內調取的朔月望 $\frac{B}{A}$ 皆合要求[8]。因此, 曆法家在調取其交點月 $\frac{J}{A}$ 時, 完全有理由以27.21222爲參照值進行附會既定上元時的選擇推算, 實無必要刻意追求某個新的 $\frac{m}{n}$ 來推導曆取交點月常數 $\frac{J}{A}$。換言之, $\frac{B}{J}$ 的選擇根本無需參考交食周期 $\frac{m}{n}$。

實際上, 以統天曆爲例, $\frac{m}{n}\cdot B=326545.7\neq J$, 由於統天曆交點月不從統天上元起算, 因此其曆取交點月 $\frac{J}{A}$ 無需調整 (即 J 取整數, 無餘分), 因此, 該曆 $\frac{J}{A}$ 顯然不是 $\frac{m}{n}\cdot\frac{B}{A}$ 導出的結果。

另外, 設若各曆交點月參照值係依 $\frac{m}{n}\frac{B}{A}$ 推定, 無妨取 $\frac{B}{A}=29.530595$, 則有些曆法的 $\frac{J}{A}$ 參照值將十分粗疏, 例如儀天曆: $\frac{528}{573}\cdot\frac{B}{A}=27.211438$; 統天曆: $\frac{493}{535}\cdot\frac{B}{A}=27.212305$; 這樣粗劣的數據根本不具備做交點月 $\frac{J}{A}$ 的參照值的資格。

由此可見, 曆取交點月 $\frac{J}{A}$ 的調取完全沒有必要參照某個預先推定的交食周期 $\frac{m}{n}$。況且唐宋曆法家已不再使用交食周期來推算日月食發生之期, 作爲月亮改正項的係數 $\frac{l}{m}$, 人們對它的精度要求不必很高。因此, 也就不太可能在導得交點月 $\frac{J}{A}$ 之前, 獨立選擇一個新的交食周期 $\frac{m}{n}$。因爲, 事實上, 欲獲得一個好的交食周期亦並非一件簡單的事, 例如, 表1有多部曆法取 $\frac{m}{n}=\frac{777}{716}$, 此即有名的紐康 (Newcomb) 周期, 設若此數得之極易, 也就不顯得有什麼珍貴了。

綜上所述, 我們認爲唐宋曆法中的交食周期基本上不應是先於 $\frac{B}{J}$ 而預爲推定的常數。

三、交食周期與漸近分數

如果說, 表1中之交食周期 $\frac{m}{n}$ 係據 $\frac{B}{J}$ 導出的結果, 則最容易想到的算法即所謂

的"調日法"。此法據文獻記載創始於南北朝劉宋時期的何承天 (370 ~ 447年), 其大意是說, 假定已知某實數 θ 介於分數 $\frac{a_1}{b_1}$ 與 $\frac{a_2}{b_2}$ 之間, 設 $\frac{a_1}{b_1} > \theta > \frac{a_2}{b_2}$, 稱 $\frac{a_1}{b_1}$ 爲強率, $\frac{a_2}{b_2}$爲弱率, 於是可令

$$\frac{m}{n} = \frac{a_1 \cdot x + a_2 \cdot y}{b_1 \cdot x + b_2 \cdot y}$$

其中 x、y 分別稱爲強、弱數, 不斷調整正整數 x、y, 使 $\frac{m}{n}$ 與已知實數 θ 相逼近。

調日法作爲中算家發明的一種有效的數值逼近算法, 曾廣泛地用於朔望月、近點月及閏周等古代曆法天文常數的選擇上。因此, 有人推測, 中國古代諸多交食周期 $\frac{m}{n}$ 亦可能出自這種算法。

不過, 按上述思想調取交食周期, 將會遇到如下矛盾: 其一, 找不出合適的、史有明據的強、弱二率 $\frac{a_1}{b_1}$ 與 $\frac{a_2}{b_2}$, 即令取東漢王充的周期 $\frac{a_1}{b_1} = \frac{89}{82}$、三統曆的周期 $\frac{a_2}{b_2} = \frac{293}{270}$, 按

$$\frac{m}{n} = \frac{89 \cdot x + 293 \cdot y}{82 \cdot x + 270 \cdot y} \tag{2}$$

則有會元曆周期 $\frac{m}{n} = \frac{89\times17+293\times83}{82\times17+270\times83} = \frac{6458}{5951}$ 強數與弱數 x、y 分別爲17與83, 計算量之大, 不難想像; 其二, 由表1知, 各曆 $\Delta = |\frac{B}{J} - \frac{m}{n}|$ 皆十分小, 若按 (2) 式不斷調整 x、y 與 $\frac{B}{J}$ 進行比較, 則通常應使 $\frac{B}{J}$ 計算至小數點後 8 位數以上, 考慮到唐宋元曆法中的朔望月 $\frac{B}{A}$ 與交點月 $\frac{J}{A}$ 曆取值不過精確至 10^{-5}, 因此, 要求 $\frac{B}{J}$ 算至 8 位小數之上顯然有悖常理。

因此, 總體上來說, 曆法家不會以 (2) 式或類似的算式調取其交食周期 $\frac{m}{n}$。

在我們將表1中的 $\frac{B}{J}$ 按連分數展開時, 發現其中16部曆法中的10部曆取周期 $\frac{m}{n}$ 爲 $\frac{B}{J}$ 的漸近分數, 爲了進一步分析探討 $\frac{m}{n}$ 與 $\frac{B}{J}$ 連分數展式的數理關係, 我們引入了如下定理:

定理 1. 當 $a_n > 1$ 時, 令 $\varphi_n = [a_0, \ldots a_n]$, $\varphi_{n+1} = [a_0, \ldots, a_n, 1]$, 則實數 θ 以 φ_n 爲其漸近分數的充要條件爲: θ 介於 φ_n 與 φ_{n+1} 之間。

其中 $[a_0, \ldots, a_n]$ 表示有理數 $\frac{m}{n} = \varphi_n$ 的連分數展式。由於有限連分數展式有且僅有兩種不同的形式, 即令 $a_n > 1$ 時, 有

$$[a_0, a_1, \ldots, a_n] = [a_0, a_1, \ldots, a_n - 1, 1] = \frac{m}{n}$$

因爲如果 $\theta_1 = [a_0, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots]$, 而 $\theta_2 = [a_0, \ldots, a_n - 1, 1, \ldots]$, 雖然 $\theta_1 \neq \theta_2$, 但它們皆以 $\frac{m}{n}$ 爲其漸近分數之一。定理1中 $a_n > 1$ 的限定, 就是爲了保證 $\frac{m}{n}$ 的連分數展式唯一。定理1證明從略。

由於定理1限定 $a_n > 1$, 因此用起來有些不便, 不過可以利用它, 獲得更具體的刻劃性定理。

設 $\frac{m}{n} = [a_0, \ldots, a_{n-1}, a_n]$,
$\frac{m_0}{n_0} = [a_0, \ldots, a_{n-1}]$, $a_n > 1$, 則

$$\frac{m - m_0}{n - n_0} = [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n - 1]$$

因爲 $a_n > 1$, 所以 $n > 2n_0$, $m > 2m_0$, 且 $\frac{m}{n}$ 介於 $\frac{m_0}{n_0}$ 與 $\frac{m-m_0}{n-n_0}$ 之間。於是, 由定理1可證:

1. $\frac{m-m_0}{n-n_0} > \frac{m}{n} > \frac{m_0}{n_0}$ 時, θ 以 $\frac{m}{n}$ 爲其漸近分數的充要條件爲:

$$\frac{2m - m_0}{2n - n_0} > \theta > \frac{m}{n}$$

或

$$\frac{m}{n} > \theta > \frac{m+m_0}{n+n_0}$$

因爲 $m \cdot n_0 - m_0 \cdot n = 1$, 所以有

$$\frac{1}{n \cdot (2n-n_0)} > \theta - \frac{m}{n} > \frac{-1}{n \cdot (n+n_0)}$$

2. $\frac{m_0}{n_0} > \frac{m}{n} > \frac{m-m_0}{n-n_0}$ 時, θ 以 $\frac{m}{n}$ 爲其漸近分數的充要條件爲:

$$\frac{m+m_0}{n+n_0} > \theta > \frac{m}{n}$$

或

$$\frac{m}{n} > \theta > \frac{2m-m_0}{2n-n_0}$$

因爲 $m \cdot n_0 - m_0 \cdot n = -1$, 所以有

$$\frac{1}{n \cdot (n+n_0)} > \theta - \frac{m}{n} > \frac{-1}{n \cdot (2n-n_0)}$$

綜合上述結果, 可得

定理 2. (必要條件) 若 $|\theta - \frac{m}{n}| < \frac{1}{n \cdot (2n-n_0)}$, 則實數 θ 必以 $\frac{m}{n}$ 爲其漸近分數之一; (充分條件) 若實數 θ 以 $\frac{m}{n}$ 爲其漸近分數之一, 則必有 $|\theta - \frac{m}{n}| < \frac{1}{n \cdot (n+n_0)}$。

其中 $\frac{m}{n} = [a_0, \ldots, a_{n-1}, a_n]$,

$\frac{m_0}{n_0} = [a_0, \ldots, a_{n-1}]$, $a_n > 1$。

比較表1的 $\Delta = |\frac{B}{J} - \frac{m}{n}|$ 與表2中的 $\frac{1}{n \cdot (2n-n_0)}$, 可以發現, 共有11部曆法中的 $\Delta < \frac{1}{n(2n-n_0)}$, 按定理2知, 其 $\frac{m}{n}$ 必爲 $\frac{B}{J}$ 之漸近分數之一, 表2中列出的 $\frac{B}{J}$ 與 $\frac{m}{n}$ 之連分數展式, 證實了這一結果。

另外, 由於乾元、儀天、崇天、統元與乾道5曆的 $\Delta > \frac{1}{n \cdot (n+n_0)}$, 因此, 由定理2知, 其 $\frac{m}{n}$ 必不爲 $\frac{B}{J}$ 的漸近分數。由表1可知, 這些曆法的 Δ 差不多皆是表1 中16部曆法中的較大者, 它們的交食周期 $\frac{m}{n}$ 均較粗糙, 皆非連分數算法的產物。

其中乾元曆之 $\frac{m}{n}$ 係 $\frac{B}{J}$ 約分而得之近似分數; 儀天曆 $\frac{m}{n} = \frac{573}{528} = \frac{191}{176}$, 尚不知從何而來; 乾道曆 $\frac{m}{n} = \frac{1019}{939}$ 就是何承天元嘉曆 (443年) 曾經用過的交食周期。

崇天曆 $\frac{m}{n} = \frac{1019+777}{939+716}$、統元曆 $\frac{m}{n} = \frac{293+777}{270+716}$, 可能皆是利用前代曆法中的交食周期 $\frac{m}{n}$ 加成而得的結果。與此相類, 觀天曆 $\frac{m}{n} = \frac{2331}{2148} = \frac{4369+293}{4026+270}$, 即可能是大衍曆與三統曆交食周期加成的結果, 因爲按連分數展開, 所獲之漸近分數應爲一既約分數, 而觀天曆交食周期則不是。

這種加成算法, 可以說是“調日法”的一種應用, 是由陳久金先生提出來的。[9] 不過, 如果推而廣之認爲其餘10部曆法之交食周期 $\frac{m}{n}$ 全部是照此加成算法導出的結果, 則顯然不太可能。以大衍、宣明、崇玄、紀元及會元5曆爲例, 查表2可知, 其交食周期 $\frac{m}{n}$ 幾乎均僅僅是各自曆取值 $\frac{B}{J}$ 的漸近分數, 這一點絕非巧合。而據定理2, 欲令這些曆法的 $\frac{m}{n}$ 爲其 $\frac{B}{J}$ 的一個漸近分數, 則必使 $\frac{B}{J}$ 展至8位小數以上 ($\Delta = |\frac{B}{J} - \frac{m}{n}| < 10^{-7}$), 前文已述, 這是不太可能的。況且, 即使曆法家將 $\frac{B}{J}$ 計算至8位小數以上, 則仍需進行數次乃至數十次的加成運算, 且每次加成均需將其計算至8位小數以上同 $\frac{B}{J}$ 進行比較, 運算量之巨實在是不勝其繁。因此, 按調日法依 (2) 式或其它方式的加成算法以取得 $\frac{B}{J}$ 的漸近分數 $\frac{m}{n}$, 幾乎可以說是不切實際的。

表 2. 唐宋曆法交食周期與連分數展式

曆名	$\frac{B}{J}$的連分數展式	$\frac{m}{n}$的連分數展式	$\frac{m_0}{n_0}$	$\frac{1}{n(2n-n_0)}$	$\frac{1}{n(n+n_0)}$
麟德	$1,11,1,2,1,4,\underline{3},3,93,\cdots$	1,11,1,2,1,4,3	242/223	1.2×10^{-6}	
大衍	$1,11,1,2,1,4,3,2,1,\underline{1},3,\cdots$	1,11,1,2,1,4,3,2,2	1796/1655	3.9×10^{-8}	
五紀	$1,11,1,2,1,4,\underline{3},3,61,\cdots$	1,11,1,2,1,4,3	242/223	1.2×10^{-6}	
正元	$1,11,1,2,1,4,\underline{3},3,1,\cdots$	1,11,1,2,1,4,3	242/223	1.2×10^{-6}	
宣明	$1,11,1,2,1,4,3,\underline{3},6,3,\cdots$	1,11,1,2,1,4,3,3	777/716	1.0×10^{-7}	
崇玄	$1,11,1,2,1,4,3,3,\underline{1},2,5,\cdots$	1,11,1,2,1,4,3,4	777/716	5.9×10^{-8}	
乾元	$1,11,1,2,1,4,3,1,1,21,\cdots$	1,11,1,2,1,5,6	293/270		3.1×10^{-7}
儀天(1)	$1,11,1,2,1,4,3,1,5,3,\cdots$	1,11,1,2,1,3	51/47		2.5×10^{-5}
崇天	$1,11,1,2,1,4,3,3,1,1,\cdots$	1,11,1,2,1,4,3,2	777/716		2.5×10^{-7}
觀天(2)	$1,11,1,2,1,4,\underline{3},4,5,\cdots$	1,11,1,2,1,4,3	242/223	1.2×10^{-6}	
紀元	$1,11,1,2,1,4,3,\underline{5},6,5,\cdots$	1,11,1,2,1,4,3,5	777/716	3.8×10^{-8}	
統元	$1,11,1,2,1,4,3,2,1,1,\cdots$	1,11,1,2,1,4,2	242/223		2.8×10^{-6}
乾道	$1,11,1,2,1,4,3,3,1,70,\cdots$	1,11,1,2,1,4,4	242/223		9.2×10^{-7}
淳熙	$1,11,1,2,1,4,\underline{3},5,8,\cdots$	1,11,1,2,1,4,3	242/223	1.2×10^{-6}	
會元	$1,11,1,2,1,4,3,\underline{8},87,\cdots$	1,11,1,2,1,4,3,8	777/716	1.5×10^{-8}	
統天	$1,11,1,2,1,\underline{4},4,1,\cdots$	1,11,1,2,1,4	51/47	1.1×10^{-5}	

(1) 儀天曆 $\frac{m}{n}=\frac{573}{528}=\frac{191}{176}$

(2) 觀天曆 $\frac{m}{n}=\frac{2331}{2148}=\frac{777}{716}$

那麼, 這些取 $\frac{B}{J}$ 的漸近分數爲其交食周期 $\frac{m}{n}$ 的曆法, 所獲 $\frac{m}{n}$ 究竟有多麼好呢? 爲此, 我們引入如下定理:

定理 3. 令 $\frac{m}{n}=[a_0,\ldots,a_{n-1},a_n]$, $\frac{m_1}{n_1}=[a_0,\ldots,a_{n-1}]$, 實數 $\theta=[a_0,\ldots,a_n,\ldots]$, 於是對於任意給定的 $q,p\in N$, 當 $q<a\cdot n+n_1$, 時 ($a=\left[\frac{1}{2n^2\cdot|\theta-\frac{m}{n}|}-\frac{n_1}{n}\right]+1$), 必有

$$|\theta-p/q|>|\theta-m/n|$$

定理3的證明比較簡單, 實際上令 $\frac{p}{q}=\frac{a\cdot m+m_1}{a\cdot n+n_1}$, 則欲令 $|\frac{p}{q}-\frac{m}{n}|<2|\theta-\frac{m}{n}|$, 便立得

$$a>\frac{1}{2n^2\cdot|\theta-\frac{m}{n}|}-\frac{n_1}{n}$$

通過表3 可以看出, 在分母 <268511 的一切有理數中, 沒有比 $\frac{m}{n}=\frac{6458}{5951}$ 更接近會元曆的 $\frac{B}{J}$。與祖沖之圓周率 $\pi=\frac{355}{113}$ 相比較, 在分母 <16604 的一切有理數中, $\frac{355}{113}$ 是 π 的最佳分

數。由此可見, 這些曆法中所取得的交食周期 $\frac{m}{n}$, 多是 $\frac{B}{J}$ 的一個極好的漸近分數。對它的選擇必定是設計了某種巧妙的算法。

表 3. 交食周期的逼近度分析

曆名	$\frac{m}{n}$	$\frac{m_1}{n_1}^{(1)}$	$a^{(2)}$	$\frac{p}{q}=\frac{a\cdot m+m_1}{a\cdot n+n_1}$	$\Delta=\lvert\frac{B}{J}-\frac{m}{n}\rvert$
大衍曆	4369/4026	2573/2371	2	11311/10423	1.3×10^{-8}
宣明曆	2573/2371	777/716	4	11069/10200	2.6×10^{-8}
崇玄曆	3350/3087	2573/2371	1	5923/5458	3.5×10^{-8}
紀元曆	4127/3803	777/716	4	17285/15928	1.1×10^{-8}
會元曆	6458/5951	777/716	45	291387/268511	3.0×10^{-10}
π	355/113	333/106	146	52163/16604	2.7×10^{-7}

(1) $\frac{m}{n}$、$\frac{m_1}{n_1}$ 爲 $\frac{B}{J}$之相鄰的兩個漸近分數。

(2) $a=[\frac{1}{2n^2\cdot\Delta}-\frac{n_1}{n}]+1$

由表2可知, 除統天曆外, 其餘15部曆法的 $\frac{B}{J}$ 的連分數展式中, 皆以沙羅周期 $\frac{m}{n}=\frac{242}{223}$ 與紐康周期 $\frac{m}{n}=\frac{777}{716}$ 爲相鄰的兩個漸近分數。因此唐宋曆法中有多部採用 $\frac{777}{716}$ 爲其交食周期並非偶然。

相鄰兩個漸近分數的同時出現, 在中國古代曆法中尚有多例, 比如唐代之前何承天以

$$\frac{26\cdot x+9\cdot y}{49\cdot x+17\cdot y}\quad x、y\in N$$

來調取曆法中朔望月常數之奇零部分。實際上當 $0.53030=\frac{26+9}{49+17}<$朔餘$<\frac{26}{49}=0.53061$時, $\frac{9}{17}$ 與 $\frac{26}{49}$ 即爲朔望月 -29 的兩個相鄰的漸近分數。

當時曆家通常取朔望月 $=29.53059$。

又如, 唐代之前的革新閏周通常表示爲

$$\begin{aligned}\text{閏餘}&=\frac{7\cdot x+4}{19\cdot x+11}\\&=\frac{\text{回歸年}-12\cdot\text{朔望月}}{\text{朔望月}}\end{aligned}$$

意即 $19\cdot x+11$ 個回歸年內, 共置入 $7\cdot x+4$ 個閏月。當 $0.3667=\frac{4+7}{11+19}<$ 閏餘 $<\frac{7}{19}=0.3684$ 時, $\frac{4}{11}$ 與 $\frac{7}{19}$ 即爲閏餘的兩個相鄰的漸近分數。

當時曆家通常取閏餘 $=0.3683$。

再如, 宋代以前曆家常以下式調取近點月

$$\frac{5\cdot x+56\cdot y}{9\cdot x+101\cdot y}=\text{近點月}-27$$

當 $0.55445 = \frac{56}{101} <$ 近點月$-27 < \frac{5+56}{9+101} = 0.55455$ 時, $\frac{5}{9}$ 與 $\frac{56}{101}$ 即爲近點月餘數的兩個相鄰漸近分數。

當時曆家通常取近點月 $= 27.55450$。

非常有意思的是, 在唐宋曆法中我們還發現了另一類常數亦與漸近分數相關。

我們知道, 24節氣是中國曆法中的一個很重要的概念, 若以平氣而論, 則每氣的長度應爲: 回歸年/24。由於節氣長度在曆法中多處用到, 而回歸年/24通常取數較繁, 因此, 唐代崇玄曆 (892年) 便以 $\frac{7305}{480}$ 近似表示一平氣長度, 並稱480爲乘法, 7305爲除法。[10] 按此數係據四分曆回歸年而來: $\frac{365.25}{24} = \frac{7305}{480} = \frac{487}{32}$, 約分所得的結果後爲宋代崇天曆 (1024年) 採用。

表 4. 宋代曆法之乘法/除法分析

曆名	$\frac{\text{除法}m}{\text{乘法}n}$	回歸年T	$\left\|\frac{T}{24} - \frac{m}{n}\right\|$	$\frac{T}{24}$的漸近分數列 (從第6個起)	$\frac{1}{n(n+n_0)}$
崇天曆	$\frac{487}{32}$	$\frac{3867940}{10590}$	2.3×10^{-4}	$\mathbf{\frac{487}{32}}, \frac{1811}{119}, \frac{2298}{151}, \cdots$	7.6×10^{-4}
紀元曆	$\frac{1811}{119}$	$\frac{2662626}{7290}$	3.2×10^{-6}	$\frac{487}{32}, \frac{1324}{87}, \mathbf{\frac{1811}{119}}, \frac{39355}{2586}, \cdots$	5.6×10^{-5}
乾道曆	$\frac{1324}{87}$	$\frac{10957308}{30000}$	9.3×10^{-5}	$\frac{487}{32}, \mathbf{\frac{1324}{87}}, \frac{1811}{119}, \frac{24867}{1634}, \cdots$	9.7×10^{-5}
淳熙曆	$\frac{1811}{119}$	$\frac{2059974}{5640}$	3.4×10^{-6}	$\frac{487}{32}, \frac{1324}{87}, \mathbf{\frac{1811}{119}}, \frac{37544}{2467}, \cdots$	5.6×10^{-5}
會元曆	$\frac{1811}{119}$	$\frac{14134932}{38700}$	9.8×10^{-7}	$\frac{487}{32}, \mathbf{\frac{1811}{119}}, \frac{130879}{8600}$。	5.6×10^{-5}

宋代曆法多數給出一乘法和除法, 以近似表示其平氣長度。這些分數係據其曆取回歸年約化而來, 應當沒有問題。當我們以連分數展開其回歸年 /24時, 便發現, 曆家選取的 $\frac{1324}{87}$ 或 $\frac{1811}{119}$ 皆是其曆回歸年/24的一個很好的漸近分數。查表4可知, 曆家取 $\frac{1811}{119}$ 爲平氣長度, 更是一個極佳的近似分數。倘若沒有類似連分數展開之類的算法, 要想獲得 $\frac{1324}{87}$ 或 $\frac{1811}{119}$這樣的數據是不易做到的。

參考文獻

1. 呂子方: 三統曆曆意及其數源, 中國科學技術史論文集, 成都: 四川人民出版社, 1983。
2. 李繼閔: "通其率"考釋, 中國數學史論文集 (一), 濟南: 山東教育出版社, 1985。
3. 藪內淸: 隋唐曆法史之研究, 東京: 三省堂版, 1944, 96-98。
4. 劉金沂: 隋唐曆法中入交定日術的幾何解釋, 自然科學史研究, 1983, 2(4)。
5. 宋史律曆志, 曆代天文律曆等志匯編 (八), 北京: 中華書局, 1976。
6. 元史曆志, 曆代天文律曆等志匯編 (九), 同5。
7. 宋書律曆志, 曆代天文律曆等志匯編 (六), 同

5。

8. 李繼閔: “調日法”源流考, 第三屆中國科學史國際討論會論文集, 北京: 科學出版社, 1990。
9. 陳久金: 調日法研究, 自然科學史研究, 1984, 3(3)。
10. 新唐書曆志, 曆代天文律曆等志匯編 (七), 同5。

—本文作者任教於西北大學數學系—