輾轉相除法、黃金分割與費氏數列(下)

蔡聰明

四、歐氏對局

從畢氏求音律的輾轉相減法精煉成步步扣盡的歐氏輾轉相除法, 以求最大共度單位或最大公約數, 其步數從最多的 $P(m,n)$ 變成最少的 $E(m,n)$, 介於其間的就是所謂的歐氏對局, 這是兩人玩的一種數學遊戲。

歐氏對局的比賽規則如下: 雙方各自寫一個自然數, 猜拳以決定誰先手。先手者從較大的數扣去較小數的任何倍數, 但不能使差變成負數, 後手亦然。兩人輪流對局, 最先得到一對數含有一個零者得勝。例如, 甲、乙兩人分別寫出 78 與 35 兩個數, 假設甲是先手, 整個對局過程可以是:

(i)$\{78,35\}\xrightarrow{\text{甲}}\{43,35\}\xrightarrow{\text{乙}}\{8,35\}\xrightarrow{\text{甲}}\{8,11\}\xrightarrow{\text{乙}}\{8,3\}\xrightarrow{\text{甲}}\{2,3\}\xrightarrow{\text{乙}}\{2,1\}\xrightarrow{\text{甲}}\{0,1\}$, 經過7步甲先手得勝。也可以是:

(ii)$\{78,35\}\xrightarrow{\text{甲}}\{8,35\}\xrightarrow{\text{乙}}\{8,11\}\xrightarrow{\text{甲}}\{8,3\}\xrightarrow{\text{乙}}\{2,3\}\xrightarrow{\text{甲}}\{2,1\}\xrightarrow{\text{乙}}\{0,1\}$, 經過6步乙後手得勝。

一般而言, 任給兩個自然數 m 與 n, 令 $L(m,n)$ 表示歐氏對局的步數, 則

$$L:\mathcal{N}\times\mathcal{N}\longrightarrow\mathcal{N}$$

爲一個“多值函數”, 並且

$$E(m,n)\leq L(m,n)\leq P(m,n)。\tag{23}$$

換言之, 歐氏對局的步數可在 $E(m,n)$ 與 $P(m,n)$ 之間變化, 因而存在有講究對局藝術的空間。

問: 先手必勝嗎?

許多時候, 兩人的對局, 先手較有利, 甚至先手必勝。例如: 在一個正方形的桌面上, 兩人輪流放置一個10元硬幣, 最先沒有空位放置硬幣的人就輸。顯然, 這是先手必勝的對局 (致勝之道是什麼?) 又如下圍棋或打網球, 先手較有利, 常言道:「先下手爲強」也。

但是, 歐氏對局則不然, 先手不一定有利, 例如:

1. $\{5,8\}\to\{5,3\}\to\{2,3\}\to\{2,1\}\to\{0,1\}$, 恰好4步, 故先手必敗;

2. $\{4,7\} \to \{4,3\} \to \{1,3\} \to \{1,0\}$ 恰好3步, 故先手必勝。

我們也可以用歸謬法來證明歐氏對局先手不一定有利: 我們稱任意兩自然數 $\{a,b\}$ 爲一個狀相 (configuration)。假設由任意狀相出發, 先手必勝。考慮狀相 $\{m,n\}$, 不妨設 $m<n$ 且 n 不是 m 的整倍數。如果先手者可將 n 扣掉某 k 倍的 $m\,(0<k<\frac{n}{m}, k\in \mathcal{N})$, 成爲 $\{m,n'\}\,(n'=n-km)$, 使得後手者必敗, 那麼先手者若遇到狀相 $\{m,n'\}$, 則必敗無疑, 這就得到一個矛盾。

要知舉反例與歸謬法是幫助我們作思考、論證的利器, 且不僅限於數學中才有用。

問: 歐氏對局有無勝敗的規律? 這個規律是什麼? 在什麼條件下先手必勝? 在先手必勝的條件下如何走法才可致勝?

爲了研究這些問題, 首先我們給出一些術語的定義, 以方便使用。

利用歐氏輾轉相除法求兩自然數的最大公約數時, 將狀相的演變過程寫下來, 用箭頭連結起來, 例如

$$\{7,9\} \to \{7,2\} \to \{1,2\} \to \{1,0\} \tag{24}$$

就叫做一條歐氏路徑 (Euclidean path)。此路徑的長爲4, 經過 $E(7,9)=3$ 步求得最大公約數 1, 路徑長與步數相當於植樹問題的樹數與間隔數一樣。

若兩自然數 m 與 n 滿足 $m<n<2m$, 那麼在作歐氏對局時, 只能將 $\{m,n\}$ 變成 $\{m,n-m\}$, 沒有第二種選擇, 這種情形就稱 $\{m,n\}$ 爲一個「死板狀相」, 其它的狀相叫做「活絡狀相」。例如在 (24) 式中 $\{7,9\}$ 爲死板狀相; 而 $\{7,2\}$ 爲一個活絡狀相, 可以變爲 $\{5,2\}$ 或 $\{3,2\}$ 或 $\{1,2\}$, 有兩種以上的選擇。

當 $2m \le n$ 時, $\{m,n\}$ 爲一個活絡狀相。令 l_0 爲 $\frac{n}{m}$ 的整數部分, 則由 $\{m,n\}$ 可以變成 $\{m,n-m\}$ 或 $\{m,n-2m\}\cdots$ 或 $\{m,n-l_0m\}$, 一共有 l_0 種走法。由 $\{m,n\}$ 變成 $\{m,n-l_0m\}$ 的走法叫做「扣盡走法」(Ultimate move) (輾轉相除法就是一直用扣盡走法); 由 $\{m,n\}$ 變成 $\{m,n-(l_0-1)m\}$ 的走法叫做「準扣盡走法」(Penultimate move)。這是兩種致勝的關鍵走法。

下面我們遵循思考的常理來探求歐氏對局的勝敗規律。在求知的道路上, 找到規律是最令人欣喜的事。

由於有對稱性, 對於兩自然數 m 與 n 討論歐氏對局, 只需考慮 $m\le n$ 的情形, 以下皆作此假設。

(i) 只有一步的歐氏對局: 當 m 可以整除 n 時, 記爲 $m|n$, 則 $E(m,n)=1$, 例如 $E(2,4)=E(1,9)=E(5,5)=1$ 。這種情形先手必勝, 而且一步就得勝。

(ii) 在歐氏路徑中, 如果除了最後兩個狀相之外, 其餘皆爲死板狀相, 則當 $E(m,n)$ 爲奇數時, 先手必勝, 當 $E(m,n)$ 爲偶數時, 先手必敗。例如, 當 m 與 n 是費氏數列相鄰兩項時, 就是屬於這種情形, 並且

$$\begin{aligned} &E(1,2)=1, \quad E(2,3)=2,\\ &E(3,5)=3, \quad E(5,8)=4,\\ &E(8,13)=5, \quad E(13,21)=6,\cdots \end{aligned}$$

因此 $\{1,2\}$, $\{3,5\}$, $\{8,13\}$, $\{21,34\}$ $\cdots$ 都是先手必勝的狀相, 而 $\{2,3\}$, $\{5,8\}$, $\{13,21\}$, $\cdots$ 都是先手必敗的狀相, 非常有規律。我們圖示如下:

先手必勝

$$1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 5\ ,\ 8\ ,13,\ \ 21,\ \ 34,\ \ 55,\ \ \ \cdots$$

先手必敗

進一步, 我們尋求勝敗的代數條件。在定理5中, 我們已證過

$$\frac{3}{2}<\frac{8}{5}<\frac{21}{13}<\cdots<\frac{1+\sqrt{5}}{2}<\cdots$$
$$<\frac{13}{8}<\frac{5}{3}<\frac{2}{1}$$

因此黃金分割比值 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 恰好是扮演勝敗的「楚河漢界」。

定理6: 設 m 與 n 爲費氏數列相鄰的兩項且 $m<n$, 則

(i) 當 $\frac{n}{m}>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 時, $\{m,n\}$ 爲先手必勝之狀相;

(ii) 當 $\frac{n}{m}<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 時, $\{m,n\}$ 爲先手必敗之狀相; 並且只有單純的扣盡走法而已。

對於不是相鄰的兩費氏數, 乃至任意的兩自然數又如何? 定理6的代數條件是否仍然成立? 讓我們先用各種例子來試驗看看。

例1: 考慮狀相 $\{5,21\}$, 若按輾轉相除法 (扣盡走法), 則得歐氏路徑

$$\{5,21\}\longrightarrow\{5,1\}\longrightarrow\{0,1\}$$

這是先手必敗的局面。但是對於歐氏對局而言, $\{5,21\}$ 是活絡狀相, 先手者可以採用准扣盡走法而得到

$$\{5,21\}\longrightarrow\{5,6\}\longrightarrow\{5,1\}\longrightarrow\{0,1\}$$

變成先手必勝的局面。我們注意到: $\frac{21}{5}>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, 而先手者採准扣盡走法就是留給對手 $\{5,6\}$ 狀相, 滿足 $\frac{6}{5}<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$。因此定理6也適用於 $\{5,21\}$ 狀相。

例2: 考慮狀相 $\{7,10\}$, 則歐氏路徑爲

$$\{7,10\}\longrightarrow\{7,3\}\longrightarrow\{1,3\}\longrightarrow\{1,0\}$$

似乎是先手必勝, 其實不然! 因爲 $\{7,3\}$ 爲一個活絡狀相, 由後手者掌控, 採准扣盡走法就可致勝:

$$\begin{aligned}\{7,10\}\longrightarrow\ &\{7,3\}\longrightarrow\{4,3\}\\ \longrightarrow\ &\{1,3\}\longrightarrow\{1,0\}\end{aligned}$$

因此 $\{7,10\}$ 是先手必敗之狀相。我們注意到 $\frac{10}{7}<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, 故定理6適用於 $\{7,10\}$ 狀相。

例3: 考慮狀相 $\{49,107\}$, 歐氏路徑爲

$$\begin{aligned}\{49,107\}\longrightarrow\ &\{49,9\}\longrightarrow\{4,9\}\\ \longrightarrow\ &\{4,1\}\longrightarrow\{1,0\}\end{aligned}$$

顯然 $\frac{107}{49}>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, 這是否先手必勝? 我們觀察到 $\{49,107\}$, $\{49,9\}$ 與 $\{4,9\}$ 皆

爲活絡狀相, 先手者握有主控權, 採准扣盡走法必可致勝:

$$\begin{aligned}\{49,107\} &\longrightarrow \{49,58\} \longrightarrow \{49,9\}\\ &\longrightarrow \{13,9\} \longrightarrow \{4,9\} \longrightarrow \{4,5\}\\ &\longrightarrow \{4,1\} \longrightarrow \{1,0\}\end{aligned}$$

先手者留給對方的狀相 $\{49,58\}$, $\{13,9\}$, $\{4,5\}$ 滿足: $\frac{58}{49}$, $\frac{13}{9}$ 與 $\frac{5}{4}$ 皆小於 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, 而立於不敗之地。

例4: 考慮狀相 $\{3,11\}$, 此時 $\frac{11}{3} > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 。在歐氏路徑

$$\{3,11\} \longrightarrow \{3,2\} \longrightarrow \{1,2\} \longrightarrow \{1,0\}$$

之中, 只有 $\{3,11\}$ 是活絡狀相。此時先手者若採用准扣盡走法:

$$\begin{aligned}\{3,11\} &\longrightarrow \{3,5\} \longrightarrow \{3,2\}\\ &\longrightarrow \{1,2\} \longrightarrow \{1,0\}\end{aligned}$$

反而授人以柄, 變成失敗的局面。讓後手者得到狀相 $\{3,5\}$, 滿足 $\frac{5}{3} > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, 導致後手勝利。因此面對狀相 $\{3,11\}$, 先手者應採扣盡走法, 而得到先手必勝的結局。

經過上述例子的試驗, 結果是屢試不爽。因此定理6似乎可以推廣到任意兩自然數的情形。

由任意狀相 $\{m,n\}\,(m < n)$ 出發, 我們猜測到神奇的黃金分割比值 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 也許就是歐氏對局勝敗的關鍵: $\frac{n}{m} > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 是先手必勝的代數條件 ($\frac{n}{m} < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 則是先手必敗)。

爲了證明這個猜測, 我們必須研究一下 $\{m,n\}$ 的下一步的變化情形:

(i) 當 $\{m,n\}$ 爲死板狀相時, 則下一步必是 $\{m,n-m\}$;

(ii) 當 $\{m,n\}$ 爲活絡狀相且 n 不爲 m 的倍數時, 令 l 爲 $\frac{n}{m}$ 的整數部分 $(l > 1)$, 則下一步只需走成 $\{m,n-(l-1)m\}$ (即採准扣盡走法) 或 $\{m,n-lm\}$ (即採扣盡走法), 因爲歐氏對局的勝負只是一步之差而已, 這一步可透過採用扣盡或准扣盡走法來調整。

我們必須掌握住: 在 $\frac{n}{m} > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 的條件下, 下一步狀相的兩數相比之條件。

補題: 設 m 與 n 爲兩個自然數。

(i) 若 m 與 n 滿足, $\frac{n}{2} < m < n$, 即 $\{m,n\}$ 爲死板狀相, 則

$$\frac{n}{m} > \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Longleftrightarrow \frac{m}{n-m} < \frac{1+\sqrt{5}}{2} \tag{25}$$

(ii) 設 m 與 n 滿足 $0 < m < \frac{n}{2}$, 即 $\{m,n\}$ 爲活絡狀相。令 l 爲 $\frac{n}{m}$ 之整數部分。若 $\frac{n}{m} > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 且 n 不爲 m 的倍數, 則

$$\frac{n-(l-1)m}{m} < \frac{1+\sqrt{5}}{2} \tag{26}$$

或

$$\frac{m}{n-lm} < \frac{1+\sqrt{5}}{2} \tag{27}$$

證明: (i)

$$\frac{n}{m} > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$
\begin{aligned}
\iff \quad & \frac{n}{m} > 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\
\iff \quad & \frac{n-m}{m} > \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\
\iff \quad & \frac{m}{n-m} < \frac{1+\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}
$$

(ii) 我們只有

$$\frac{m}{n-lm} < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

或

$$\frac{m}{n-lm} > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

兩種情形。若後者成立, 則

$$
\begin{aligned}
& m > \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot (n-lm) \\
\iff \quad & \frac{\sqrt{5}-1}{2} m > n - lm \\
\iff \quad & \frac{\sqrt{5}-1}{2} m + m > n - lm + m \\
\iff \quad & \frac{1+\sqrt{5}}{2} m > n - (l-1)m \\
\iff \quad & \frac{n-(l-1)m}{m} < \frac{1+\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}
$$

證明完畢。

定理7: 設 m 與 n 爲兩自然數, $m<n$, 則
(i) 當 $\frac{n}{m} > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 時, $\{m,n\}$ 爲先手必勝之狀相;
(ii) 當 $\frac{n}{m} < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 時, $\{m,n\}$ 爲先手必敗之狀相。

證明: 我們對 n 來作數學歸納法之證明。

當 $n=2$ 時, m 只能是1, 此時 $\frac{n}{m} = 2 > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, 並且 $\{1,2\}$ 爲先手必勝之狀相, (i) 與 (ii) 成立。

當 $n=3$ 時, m 可爲1或2, 此時 $\frac{3}{1} = 3 > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, 並且 $\{1,3\}$ 爲先手必勝之狀相。另外 $\frac{3}{2} < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 並且 $\{2,3\}$ 爲先手必敗之狀相, 所以 (i) 與 (ii) 成立。

令 N 爲任意大於3的自然數。假設對於所有 $n<N$, 滿足 $\frac{n}{m} > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 與 $m<n$ 的所有 $\{m,n\}$ 皆爲先手必勝之狀相, 而滿足 $\frac{n}{m} < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 與 $m<n$ 的所有 $\{m,n\}$ 皆爲先手必敗之狀相 (歸納假設)。今考慮狀相 $\{M,N\}$, $(M<N)$, 滿足

$$\frac{N}{M} > \frac{1+\sqrt{5}}{2}。 \tag{28}$$

如果 N 可被 M 整除, 則顯然 $\{M,N\}$ 爲先手必勝之狀相。如果 N 不可被 M 整除, 則 $\{M,N\}$ 只有下面兩種情形:

(甲) 當 $\frac{N}{2} < M < N$ 時, $\{M,N\}$ 爲死板狀相。此時先手者只能從 $\{M,N\}$ 走成 $\{M,N-M\}$ 。根據上述補題, 由 (25) 式可得

$$\frac{M}{N-M} < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

再由歸納假設知, 後手面對狀相 $\{M,N-M\}$ 必敗無疑。換言之, $\{M,N\}$ 是先手必勝之狀相。

(乙) 當 $0<M<\frac{N}{2}$ 時, $\{M,N\}$ 爲活絡狀相。令 l 爲 $\frac{N}{M}$ 之整數部分。根

據上述補題, 由 (28) 式可得

$$\frac{N-(l-1)M}{M} < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

或

$$\frac{M}{N-lM} < \frac{1+\sqrt{5}}{2}。$$

由歸納假設知, 後手面對狀相 $\{M, N-(l-1)M\}$ 或 $\{M, N-lM\}$ 時必敗無疑, 亦即 $\{M, N\}$ 是先手必勝之狀相。

因此, 定理7由數學歸納法證畢。

推論1: 設 m 與 n 爲兩自然數且 $m<n$, 則 $\{m,n\}$ 爲先手必勝狀相之充要條件是 $\frac{n}{m} > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 。

推論2: 設 m 與 n 爲任意兩自然數, 則 $\{m,n\}$ 爲先手必勝之充要條件是

(i) m 爲 n 的整數倍或 n 爲 m 的整數倍或

(ii) $\frac{n}{m} > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 或

(iii) $\frac{n}{m} < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

並且在 (ii) 或 (iii) 的先手必勝條件下, 先手者要採用扣盡走法或准扣盡走法作出狀相 $\{m', n'\}$ 給對方, 使得

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} < \frac{n'}{m'} < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

如此這般, 先手者可立於不敗之地。

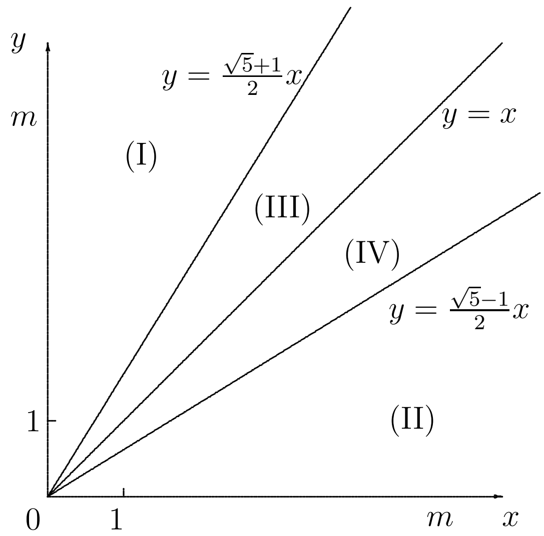

圖6

圖6就是推論2的圖解。在坐標平面上, 作三條直線 $y=x$, $y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}x$ 及 $y=\frac{\sqrt{5}-1}{2}x$, 將第一象限分割成 (I)、(II)、(III) 及 (IV) 四塊領域, 落在 (I)、(II) 及 $y=x$ 上的格子點就是先手必勝的狀相, 落在 (III) 及 (IV) 中的格子點就是先手必敗的狀相。

至此, 歐氏對局完全破解, 而且破解的關鍵涉及黃金數 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 及黃金分割比值 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, 這兩個互逆的神奇數。

參考文獻

1. H. E. Huntley: The Divine proportion, a study in mathematical beauty, Dover, 1970.
2. Rager Herz-Fischler: A Mathematical History of Division in Extreme and Mean Ratio, Wilfrid Laurier University Press, 1987.

3. N. N. Vorob'ev: Fibonacci Nambers, Pergamon press, 1961.
4. A. J. Cole and A. J. T. Davie: A game based on the Euclidean algorithm and a winning strategy for it, Math. Gaz. 53, 354-357, 1969.
5. E. L. Spitznagel: Properties of a game based on Euclid's algorithm, Mathematics Magazine, 46, 87-92, 1973.
6. Joe Roberts: Elementary number theory, M.I.T. press, 1977.
7. J. D. Dixon: The number of steps in the Euclidean algorithm, J. Number theory, 2, 414-422, 1970.
8. J. D. Dixon: A simple estimate for the number of steps in the Euclidean algorithm, Am. Math. Monthly, 78, 374-376, 1971.
9. W. Sierpinski: Theory of numbers, Warszawa, 1964.
10. 楊維哲: 談輾轉相除法, 數學傳播, 第七卷第一期, 1983.

—本文作者任教於台灣大學數學系—