樹的計數–從樹到超樹

柳柏濂

一、滿目青蔥皆是樹

生活在世界上, 幾乎沒有一個人未見過樹。

從樹幹開始, 枝連著枝, 彎彎曲曲地伸向天空, 這就是自然界中的樹, 生物學家眼中的樹。

“宜春苑外最長條, 閑臭春風伴舞腰”這是詩人墨客眼中的樹。

從十九世紀中葉開始, 數學家也對樹感興趣了。

1857年, 英國著名數學家凱萊 (Cayley) 在考察有機化學中的碳氫化合物時, 發現了一族重要的圖, 稱爲樹。

凱萊考察一類飽和的碳氫化合物 C_nH_{2n+2} 的同分異構體。

當 $n=1$ 時 C_1 H_4 (即一個碳原子和四個氫原子) 組成甲烷。

當 $n=2$ 時, C_2 H_6 稱爲乙烷。

當 $n=3$ 時, C_3 H_8 稱爲丙烷。

當 $n=4$ 時, C_4 H_{10} 有兩個同分異構體, 丁烷和異丁烷。

甲烷

乙烷

丙烷

丁烷

異丁烷

從上述有機化合物的分子結構中, 若把

原子看作平面上的點, 原子間的化學鍵看作是兩點的連線, 它們有兩個特點: 第一, 從每一點都可以沿著線到達任何其它點。第二, 不含由點和線組成的圈, 這一類圖, 凱萊稱之爲樹。

我們把上述描述性的特徵進一步數學化。數學家在這裡考慮的圖, 是平面上的若干點 (稱爲頂點) 和兩點之間至多有一連線 (稱爲邊) 所成的圖形, 把頂點和邊分別用字母 v 和 e 來表示。點邊相間序列 $v_1\, e_1\, v_2\, e_2 \ldots v_{i-1}\, e_{i-1}\, v_i$ 是連結頂點 v_1 和 v_i 的一條路, 其中 e_i 是連結 v_i 和 v_{i+1} 的邊。如果一條路的兩個端點是重合的, 則稱爲圈。若一個圖的任兩點都有路, 則這個圖便稱爲連通圖, 沒有圈的連通圖就是樹。n 個頂點的樹稱爲 n 階樹。

用上述定義, 鑒定一下各類飽和碳氫化合物, 我們看到了一族樹圖。

在自然科學和社會科學中, 我們都經常遇到樹。

在計算機科學中, 經常遇到搜索樹, 語法樹, 決策樹等。例如, 圖二就是代數公式 $f*(g*h+b/c)$ 的樹表示。

在描述一個大系統及其子系統的關係時, 我們不可避免地構造出一棵樹。例如,「紅樓夢」中榮國府的世系就是如圖三的“賈氏樹”。

而圖四, 則是描述解一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的求根程序的框圖。它也可以看作是一棵樹。

圖二: $f*(g*h+b/c)$

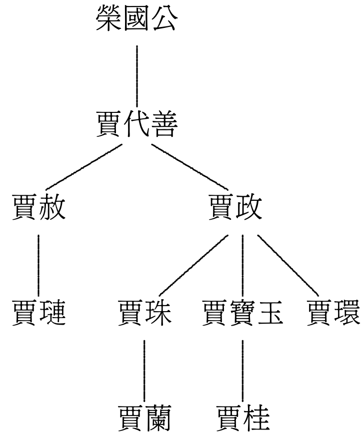
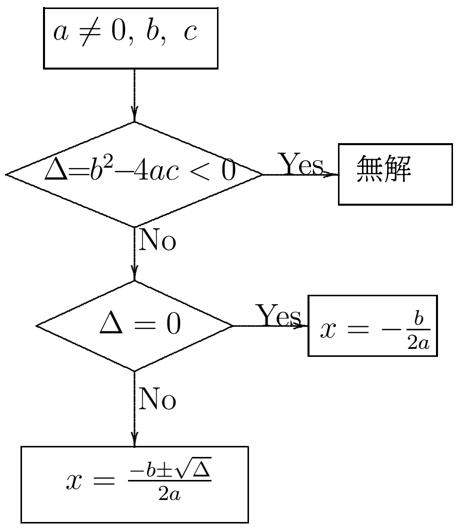


圖 三



圖四

樹的每一個頂點 v 所連接的邊數稱爲 v 的度數, 記作 $d(v)$ 。若 $d(v)=1$, 則 v 稱爲樹的懸掛點。每一棵樹至少有兩個懸掛點。

不難證明, 一個 n 階樹還有下列顯然的性質。

(1) 一棵樹是任兩頂點有唯一的路相連的圖。

(2) n 階樹是具有 $n-1$ 條邊的連通圖。

(3) n 階樹是具有 $n-1$ 條邊的無圈圖。可以證明,(1)(2)(3) 分別可以作爲 n 階樹的等價定義。

二、凱萊算出了樹, 數學家們並未罷手

凱萊對樹的研究是從求 n 階樹的個數開始的。

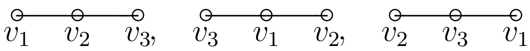
爲了知道具有一定原子數的不同飽和碳氫化合物的個數, 需要求出頂點爲 $v_1, v_2, \ldots v_n$ 的不同樹的個數。

試把一些階數不大的樹構造出來。

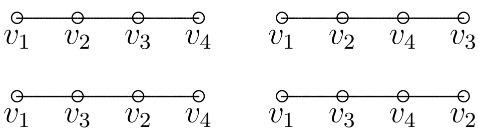
當 $n=1$ 時, 樹退化爲 $\circ v_0$

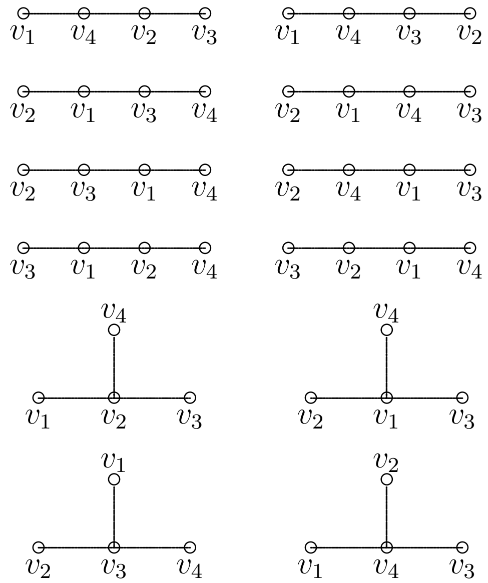
當 $n=2$ 時, 僅有1棵樹 $v_1 \circ - \circ v_2$

當 $n=3$ 時, 有3棵樹



當 $n=4$ 時, 有下列16棵樹。





圖五

當 n 越來越大時, 依賴構造的方法枚舉出所有的樹已經是力不從心了。數學家和化學家都希望能夠得出一個僅依賴於 n 的公式, 來計算樹的個數 T_n, 哪怕這個公式是如何複雜!

1881年, 凱萊 (見文獻 [1]) 成功地得到了具有 n 個 (標號) 頂點的不同樹個數的計數公式 $T_n=n^{n-2}$。

凱萊採用了一系列變換的技巧, 複雜的推理得到了一個十分漂亮的結果。令數學家也大吃一驚! 凱萊公式的形式是如此地簡明, 吸引了很多數學家銳意尋找推導它的更簡潔的方法。

1918年, 普法 (Prüfer) 採用了一一對應的方法。([2])

1937年, 波利亞 (Pòlya) 採用了分析樹的形心的方法。([3])

1948年, 奧特 (Otter) 採用了生成函數的方法,([4])

1956年, 哈拉里 (Harary) 把波利亞與奧特的方法統一起來,([5])

⋮

他們都獲得了成功。

我們這裡, 把兩個容易理解的證明提供給讀者鑒賞。

下面的證明採自於法國 數 學 家 貝 爾 熱 (Berge [6]) 的著作。

首先, 建立幾個引理

衆所周知, 二項展式 $(x_1 + x_2)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x_1^r x_2^{n-r}$, 把它推廣到多項展式, 便有

引理1:

$$(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n = \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_m=n} \left(\begin{matrix} n \\ n_1, n_2, \ldots, n_m \end{matrix}\right) x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_m^{n_m}$$

這裡 $\left(\begin{matrix} n \\ n_1, n_2, \ldots, n_m \end{matrix}\right) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_m!}$, $n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n$, 約定 $0! = 1$。

又, 我們運用 $(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n = (x_1+x_2+\cdots+x_m)(x_1+x_2+\cdots+x_m)^{n-1} = x_1(x_1+x_2+\cdots+x_m)^{n-1} + x_2(x_1+x_2+\cdots+x_m)^{n-1} + \cdots + x_m(x_1+x_2+\cdots+x_m)^{n-1}$ 再比較兩展式 $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_m^{n_m}$ 項的係數, 便得

引理2:

$$\left(\begin{matrix} n \\ n_1, n_2 \ldots n_m \end{matrix}\right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\begin{matrix} n-1 \\ n_1, \ldots n_i-1, \ldots n_m \end{matrix}\right)$$

如果把具有頂點 $v_1, v_2, \ldots, v_n$, 每個頂點 v_i 的度爲 $d(v_i) = d_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, 的樹的集合記爲 $A_n(d_1, d_2, \ldots d_n)$, 該集的基數記爲 $T(n, d_1, d_2, \ldots d_n)$, 則有

引理3:

$$\begin{aligned} & T(n, d_1, d_2, \ldots d_n) \qquad (1) \\ = & \left(\begin{matrix} n-2 \\ d_1-1, d_2-1, \ldots d_n-1 \end{matrix}\right), \ n \geq 2. \end{aligned}$$

證明: 因 n 階樹有 $n-1$ 邊, 於是 $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$。因此, 當且僅當 $\sum_{i=1}^{n} (d_i - 1) = 2(n-1) - n = n-2$ 時, $T \neq 0$。

不妨設 $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n = 1$ (即記 v_n 爲懸掛點)

我們考察 $A_n(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ 的子集 $A_{n,i}$ $(1 \leq i \leq n)$。$A_{n,i}$ 是 $A_n(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ 中有頂點 v_i $(d_i \geq 2)$ 與懸掛點 v_n 相連的那些樹的集合。由此定義, 易見

$$|A_{n,i}| = T(n-1, d_1, \ldots d_i - 1, \ldots d_{n-1})$$

下面, 我們對 n 用數學歸納法證明 (1) 式。

$n = 2$, 則 $d_1 = d_2 = 1$,

$$\begin{aligned} & T(2, d_1, d_2) \\ = & \left(\begin{matrix} 0 \\ d_1-1, d_2-1 \end{matrix}\right) = 1, \quad (1) \text{ 式成立。} \end{aligned}$$

設 (1) 式對 $n-1$ 成立, 則

$$\begin{aligned} & T(n, d_1, d_2, \ldots, d_n) \\ & = \textstyle\sum_{i, d_i \geq 2} |A_{n,i}| \\ = & \textstyle\sum_{i, d_i \geq 2} T(n-1, d_1, \ldots d_i - 1, \ldots d_{n-1}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i,d_i\ge 2}\binom{n-3}{d_1-1,\ldots,d_i-2,\ldots,d_{n-1}-1} \quad \text{(歸納假設)}\\
&= \binom{n-2}{d_1-1,\ldots,d_i-1,\ldots,d_{n-1}-1} \quad \text{(引理2)}\\
&= \binom{n-2}{d_1-1,\ldots,d_i-1,\ldots,d_{n-1}-1,d_n-1} \quad \text{(因 } d_n=1\text{), 證畢。}
\end{aligned}
$$

現在, 我們可以證明樹計數的凱萊公式。

定理1 (Cayley): 以 $v_1, v_2, \ldots v_n$ 爲頂點的不同樹的數目 $T_n = n^{n-2}$。

證明:

$$
\begin{aligned}
T_n &= \sum_{d_1,\ldots,d_n\ge 1} T(n, d_1, \ldots d_n)\\
&= \sum_{d_1,\ldots,d_n\ge 1}\binom{n-2}{d_1-1,\ldots d_n-1} \quad \text{(引理3)}\\
&= (\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n\text{個}})^{n-2} \quad \text{(引理1)}\\
&= n^{n-2}, \quad \text{證畢。}
\end{aligned}
$$

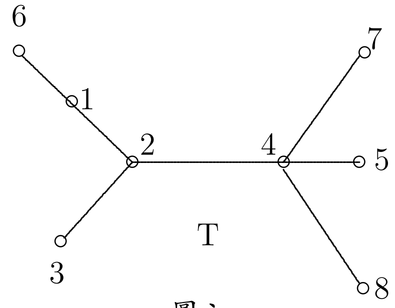
引理3有很多有趣的推論。例如, 若知道一個頂點 v_1 的度是 k, 可以算出具有頂點 $v_1, v_2, \ldots v_n$ 的不同樹的數目是 $\binom{n-2}{k-1}(n-1)^{n-k-1}$ (Clarke 公式)。讀者可以作爲一個練習把它做出來。

從凱萊的結果 n^{n-2} 直接分析, 它可以看作是一個 $n-2$ 元序列 $(a_1, a_2, \ldots a_{n-2})$, 每個元 a_i 有 n 種可能選擇, 所能構造的所有序列數。從這一思路, 啓發數學家去尋求證明凱萊公式的構造性方法。

1918年, 數學家普法 (Prüfer) 給出了這樣的一個方法。下面, 我們撇開嚴格的推理敍述, 而用具體例子, 讓讀者了解普法證明的精髓。

普法建立 n 階標號樹 T 與 $n-2$ 元序列 $(a_1, a_2, \ldots a_{n-2})$ 的一一對應, 其中 $a_i \in \{1, 2, \ldots n\}$, $i = 1, 2, \ldots n-2$。

以一個8階樹 T 爲例。(圖六)



圖六

由 T 可以用下列步驟得到一個6元序列。

(1) 取 T 中標號最小的懸掛點 (點3) 的鄰點的標號作爲 a_1, 即 $a_1 = 2$。

(2) 在 T 中刪去頂點3後, 得樹 $T^{(1)}$, 取 $T^{(1)}$ 中標號最小的懸掛點 (點5) 的鄰點的標號作爲 a_2, 即 $a_2 = 4$。

(3) 在 $T^{(1)}$ 中刪去頂點5後, 得樹 $T^{(2)}$, 取 $T^{(2)}$ 中標號最小的懸掛點 (點6) 的鄰點的標號作爲 a_3, 即 $a_3 = 1$。

如此繼續, 可得 $a_4 = 2$, $a_5 = 4$, $a_6 = 4$。

最後, 到 $T^{(6)}$ 是一棵兩階樹 $4 \circ - \circ 8$, 到此結束, 便得到一個6元序列 $S : (2, 4, 1, 2, 4, 4)$。

現在, 我們看看如何從序列 S (唯一地) 構造一個8階樹。

記頂點集 $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

(1) 在 V 中取不在序列 S 的標號最小的點3, 用點3連 S 中的 (左邊) 第一個點2。得 $3 \circ - \circ 2$

(2) 把 S 刪去 2 得序列$S^{(1)} = (4,1,2,4,4)$, 把 V 刪去3, 得集 $V^{(1)} = \{1,2,4,5,6,7,8\}$。在 $V^{(1)}$ 中取不在 $S^{(1)}$ 出現的標號最小的點5, 連結 $S^{(1)}$ 的第一個點4, 得 $5 \circ - \circ 4$

(3) 把 $S^{(1)}$ 刪去4, 得 $S^{(2)} = (1,2,4,4)$, 把 $V^{(1)}$ 刪去5, 得 $V^{(2)} = \{1,2,4,6,7,8\}$, 類似上面第 (2) 步, 得 $6 \circ - \circ 1$

如此類推, 得 $1\circ-\circ 2$, $2\circ-\circ 4$, $7\circ-\circ 4$ 最後, $S^{(7)} = \phi$

$$V^{(7)} = \{4,8\}, \quad \text{又得} \quad 8 \circ - \circ 4$$

把每一步得到的線段按標號粘連起來, 便得 T。

容易看出, 上述的對應是一一的。把這個例子的對應作一般化的敍述和論證, 就是普法的證明。

三、 一種"胖"起來的樹──超樹

對於一棵樹, 我們可以把它的每一邊看作是一個二元子集。於是, 一個自然而然的推廣是: 如果這些“邊”是一個 k 元子集 $(k \geq 2)$, 那麼, 這些“胖”起來的樹, 就是超樹。(hypertree)

以數學的意義上, 我們研究超圖 (hypergraph) 或超樹, 實質上是研究集族。我們把集與集之間的“交”關係, 作爲“邊”的連接關係來處理, 便產生了下列超圖的概念。

設 $X = \{x_1, x_2, \ldots x_p\}$ 是有限集, $\varepsilon = \{E_i | i = 1,2,\ldots,q\}$ 是 X 的子集的一個族。若 $E_i \neq \phi$, $1 \leq i \leq q$, 且 $U_{i=1}^{q} E_i \subset X$, 則稱二元組 $H = (X, \varepsilon)$ 爲一個超圖。$|X| = p$ 稱爲階。X 中的元稱爲頂點, ε 中的元稱爲邊。若 $E_i \in \varepsilon$ 且 $|E_i| = 1$, 則 E_i 稱爲環 (Loop)。又 $\max_i |E_i|$ 稱爲 H 的秩, 記作 $\gamma(H)$。

在超圖 $H = (X, \varepsilon)$ 中, 一個點邊交錯序列 $(x_1, E_1, x_2, E_2, \ldots E_m, x_{m+1})$ 稱爲一個長爲 m 的連接 x_1, x_{m+1} 的鏈, 如果 $x_1, x_2, \ldots x_{m+1}$ 是 H 的互不相同的頂點, $E_1, E_2, \ldots E_m$ 是 H 的互不相同的邊, 且對一切 $i = 1,2,\ldots m$ 均有 $x_i, x_{i+1} \in E_i$。若 $m > 1$ 且 $x_{m+1} = x_1$, 則這鏈是長爲 m 的圈。在超圖 $H = (X, \varepsilon)$中, 若任兩個不同頂點 x, y 之間均存在一條鏈連接 x, y, 則稱 H 是連通的, 否則是不連通的。我們容易看到, 超圖的概念是圖概念的直接推廣。

例1: $X = \{1,2,3,4\}$, $\varepsilon = \{E_1 = \{1,2,3\},\ E_2 = \{2,3,4\},\ E_3 = \{1,4\}\}$, $H = (X, \varepsilon)$ 就是一個超圖。而 $1\ E_1\ 3\ E_2\ 4\ E_3\ 1$ 是 H 的一個圈。圖七就是這一超圖的形象描述。

E_1

E_2

E_3

圖七

現在, 我們把樹的概念拓廣爲超樹。

如果超圖 $H=(X,\varepsilon)$ 是連通的且不含圈, 則稱 H 爲超樹。若任意 $E_i\in\varepsilon$, $|E_i|=M$ (常數), 則稱 H 是秩爲 M 的匀稱超樹。

在例1的超圖中, 若把 E_3 刪去, 則 $H=(X,\varepsilon)$ 還不是一棵超樹, 因爲它含有圈 2 E_1 3 E_2 2。若 $\varepsilon=\{E_1=\{1,2,3\}$, $E_2=\{3,4\}\}$, 則 $H=(X,\varepsilon)$ 便是一棵超樹。若 $\varepsilon=\{E_1=\{1,2\}$, $E_2=\{2,3\}$, $E_3=\{2,4\}\}$, 則 $H=(X,\varepsilon)$ 是一棵秩爲2的匀稱超樹, (圖八) 顯見, 秩爲2的匀稱超樹就是通常的樹。

由此可見, 在超樹中, 任兩邊的交所含的元素至多是一個。本世紀六十年代, 著名數學家厄爾多斯 (Erdös) 和哈那尼 (Hanani)([7]) 曾研究過一種 n 元集 N 的至多1交疊集系 (at most 1-overlapping systems), 即 N 的具有下述性質的子集族 φ: 對任意的 X, $Y\in\varphi$, $X\neq Y$, 有 $|X\cap Y|\leq 1$。超樹, 便是這類集系的一種特殊形式。便是一類超圖集合 (其中包括超樹) 的表達形式。

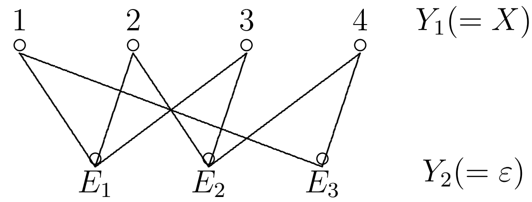
在超樹 $H(X,\varepsilon)$ 中, 我們稱這樣的邊 E_i 爲懸掛邊: $|E_i|\geq 2$ 且 E_i 中恰有一點是與其它邊的公共點。例如, 圖八的三邊均是懸掛邊。

E_1 E_2

E_3

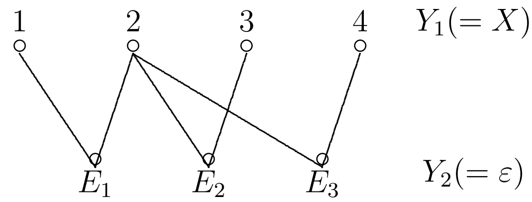
圖八

既然超圖是圖的拓廣, 我們也可以把超圖 $H(X,\varepsilon)$ 與一個二部圖 $G(H)=(Y_1,Y_2,E)$ (這裡, Y_1, Y_2 是 G 的兩部分頂點集, E 是邊集) 建立一一對應: 其中 $Y_1=X$, $Y_2=\varepsilon$ (即把 H 中的邊 E_i 看作是 G 中 Y_2 的點), 在 G 中, 兩點 $x_i\in Y_1$, $E_j\in Y_2$ 之間聯一條邊當且僅當 $x_i\in E_j$ (在 H 中)。我們稱 $G(H)$ 是 H 的對應二部圖。我們看例1的超圖, 它對應於如圖九的二部圖



圖九

而圖八所示的超樹, 則對應於如圖十的二部圖



圖十

在理論上, 我們可以證明下列的結論 ([8])

引理4: H 是超樹當且僅當 $G(H)$ 是樹。

引理5: 若 $H(X,\varepsilon)$ 是超樹, 則對任意的 $E_i, E_j \in \varepsilon$, $i \neq j$, 均有 $|E_i \cap E_j| \leq 1$。

引理6: 若 $H=(X,\varepsilon)$ 是超樹, 無環且 $|\varepsilon| \geq 2$, 則 E 至少有2條懸掛邊。

引理7: 若 $H=(X,\varepsilon)$ 是 $(k+1)$ 秩的勻稱超樹, $|X|=p$, $|\varepsilon|=q$, 則 $q=(p-1)/k$。

四、超樹的計數——凱萊公式的拓廣

我們完成了從樹到超樹的推廣。既然, 勻稱超樹的特款就是樹, 那麼, 能否把凱萊公式拓廣爲勻稱超樹的計數式呢?

回答是肯定的。

設 p 階和 q 邊的 $(k+1)$ 秩的勻稱超樹的個數是 $T_{k+1}(p,q)$, 我們得到下列一個並不複雜的結果 ([8])

$$T_{k+1}(p,q)=\begin{cases}\frac{p!p^{q-2}}{q!(k!)^q} & , p=qk+1\\ \\ 0 & , \text{其餘}\end{cases} \tag{2}$$

容易看到, 當 $k=1$, $T_2(p,q)$ 就是 p 階樹的計數式, 由 (2) 直接算得 $T_2(p,q)=(q+1)^{q-1}=p^{p-2}$, 這便是著名的凱萊公式。

下面, 我們給予 (2) 式的一個嚴格證明。

先建立一些, 有用的計數式。

引理8:

$$\sum_{j=0}^{q}(-1)^j\binom{q}{j}(q-j)^t=0, \quad \text{這裡 } t<q。 \tag{3}$$

(3) 式可直接查看 H. W. Could 著的“*Combinatorial Identities*”。

引理9:

$$(qk+1)^{q-2}=\sum_{j=1}^{q}(-1)^{j+1}\binom{q}{j}(qk+1-jk)^{q-2} \tag{4}$$

證明: 因

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{q}(-1)^j\binom{q}{j}(qk+1-jk)^{q-2}\\
=&\sum_{j=0}^{q}(-1)^j\binom{q}{j}\sum_{t=0}^{q-2}\binom{q-2}{t}(q-j)^t k^t\\
=&\sum_{t=0}^{q-2}k^t\binom{q-2}{t}\sum_{j=0}^{q}(-1)^j\binom{q}{j}(q-j)^t\\
=&\ 0 \quad (\text{見引理8})
\end{aligned}$$

把上式的左邊第一項移項, 整理, 便得 (4) 式, 證畢。

設 $(k+1)$ 秩 $(k>0)q$ 邊 $(q>0)$ 的 p 階勻稱超樹個數是 $T_{k+1}(p,q)$, 又, 邊也有標號的上述超樹個數記爲 $T^*_{k+1}(p,q)$。由引理7, 必有 $p=qk+1$。故

$$T^*_{k+1}(p,q)=T^*_{k+1}(qk+1,q),$$

顯見

$$T^*_{k+1}(p,q)=q!T_{k+1}(p,q) \tag{5}$$

引理10:

$$T^*_{k+1}(p,q) = \sum(-1)^{j+1}\binom{p}{jk}\binom{q}{j}\frac{(jk)!}{(k!)^j}(p-jk)^jT^*_{k+1}(p-jk,q-j)$$

, 其中　$p=qk+1$。　(6)

證明: 由引理4, 我們只須求邊有標號的匀稱超樹 $H=(X,\varepsilon)$ 所對應的標號二部圖 $G(H)=(Y_1,Y_2,E)$ 的個數。因 $|X|=p$, $|\varepsilon|=q$ 且 $\gamma(H)=k+1$ $(k>0)$, 故 $G(H)$ 有下列性質

1. $|Y_1|=p$, $|Y_2|=q$, $p=kq+1$。
2. $G(H)$ 是點有標號的樹。
3. Y_2 中的每一點都是 $(k+1)$ 度, 即無懸掛點。
4. H 的每條懸掛邊對應於 Y_1 的 k 個懸掛點, 這種懸掛點簡稱爲匹配懸掛點,Y_1 中匹配懸掛點的總個數是 k 的倍數。由引理6, Y_1 中至少有 $2k$ 個匹配懸掛點。$(k>0)$。

我們計算 Y_1 中至少有 jk 個標號匹號懸掛點的 $G(H)$ 的個數 W_{jk}。

因 Y_1 中 jk 個標號匹配懸掛點與 Y_2 中 j 個標號點相連, 選擇和連接的方法有 $\binom{p}{jk}\binom{q}{j}\frac{(jk)!}{(k!)^j}$ 種, 注意到 Y_2 中的 j 個點均是 $(k+1)$ 度, 故其每一個須和 Y_1 中剩下的 $(p-jk)$ 個點中的一個相連, 連結方法有 $(p-jk)^j$ 種。又, Y_1, Y_2 分別剩下的 $(p-jk)$, $(q-j)$ 個點可構作標號樹 (Y_2 中的點全是 $(k+1)$ 度) $T^*_{k+1}(p-jk,q-j)$ 個。

由乘法原則

$$W_{j,k} = \binom{p}{jk}\binom{q}{j}\frac{(jk)!}{(k!)^j}(p-jk)^j \, T^*_{k+1}(p-jk,q-j)。$$

由容斥原理, 在 Y_1 中無匹配懸掛點的 $G(H)$ 的個數是 $\sum_{j=0}^{q}(-1)^jW_{j,k}$, 由上述 $G(H)$ 的性質 (4), 知

$$\sum_{j=0}^{q}(-1)^jW_{j,k}=0,$$

即

$$\sum_{j=0}^{q}(-1)^j\binom{p}{jk}\binom{q}{j}\frac{(jk)!}{(k!)^j}(p-jk)^j \, T^*_{k+1}(p-jk,q-j)=0。$$

把上式 $j=0$ 的項移項並整理, 得 (6) 式。證畢。

現在, 我們可以證明

定理2:

$$T^*_{k+1}(qk+1,q)=\frac{(qk+1)!(qk+1)^{q-2}}{(k!)^q},\ (k>0)$$

證明: (數學歸納法)

當 $q=1$, $T^*_{k+1}(k+1,1)=\frac{(k+1)!(k+1)^{1-2}}{(k!)}=1$, 用直接構作方法易知定理成立。

設邊數小於 q 時, 定理成立。由引理10

$$\begin{aligned}
&T^*_{k+1}(qk+1,q)\\
=\ &\sum_{j=1}^{q}(-1)^{j+1}\binom{qk+1}{jk}\binom{q}{j}\frac{(jk)!}{(k!)^j}(qk+1-jk)^j\\
&\times T^*_{k+1}(qk+1-jk,q-j)\\
=\ &\sum_{j=1}^{q}(-1)^{j+1}\binom{qk+1}{jk}\binom{q}{j}\frac{(jk)!}{(k!)^j}(qk+1-jk)^j\\
&\cdot\frac{(qk+1-jk)!(qk+1-jk)^{q-j-2}}{(k!)^{q-j}}\\
=\ &\frac{(qk+1)!}{(k!)^q}\sum_{j=1}^{q}(-1)^{j+1}\binom{q}{j}(qj+1-jk)^{q-2}
\end{aligned}$$

$$= \frac{(qk+1)!(qk+1)^{q-2}}{(k!)^q} \quad \text{(引理9)。證畢。}$$

於是, 由 (5) 式, 立即有

定理3:

$$T_{k+1}(qk+1,q) = \frac{(qk+1)!(qk+1)^{q-2}}{q!(k!)^q}$$

匀稱超樹公式的推導, 我們運用了一些組合數學的技巧, 例如容斥原理, 用類似的方法, 我們還可以得到 p 階 q 邊的無環超樹個數 $T(p,q)$ 的計數式: $T(p,q) = p^{q-1}S_2(p-1,q)$, 這裡 $S_2(m,n)$ 是第二類 Stirling 數。有興趣的讀者可參閱文獻 [8]。

參考文獻

1. Cayley, A., On the analytical forms called trees, Amer. Math. J. 4 (1881), 266-268.
2. Prüfer, H., Neuer Beweis eines Satzes über Permutation, Arch. Math. Phys., 27 (1918), 742-744.
3. Pòlya, G., Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und Chemische Verbindungen. Acta Math., 68 (1937), 145-254.
4. Otter, R., The number of trees, Ann. of Math., 49 (1948), 583-599.
5. Harary, F., Note on the Pòlya and Otter formulas for enumerating trees, Mich. Math. J., 3 (1956), 109-112.
6. Berge, C., Graphs and Hypergraphs, English Trans. by Edward Minieka, North Holland, 1973.
7. Erdös and Hanani, On a limit theorem in combinatorial analysis, Publ. M. Debrecem, 10 (1963), 10-13.
8. Bolian Liu (柳柏濂), Enumeration of hypertrees, Appl. Math., A Journal of Chinese Universities, 9 (1988), 359-363.

—本文作者任教於中國華南師範大學數學系—