從「聯考試題」談「數學」

羅添壽

今年聯考數學科試題, 由於命題教授, 精心設計, 用心良苦, 然缺失不少, 可說叫好不叫座。今筆者提出一些值得探討的問題與建議。

(A) 自然組方面

(1) 理科數學微積分僅佔5分, 影響課堂上「教與學」的意願甚鉅。

自然組各册配分如下:

册數	一	二	三	四	理科 (上)	理科 (下)
配分	25	30(20)	20	10	5(15)	10

(註): 若將填充題6歸成第二册, 則今年微積分僅考5分, 理科數學共佔15分, 且其計算要詳盡, 否則不易得分, 如此造成學生對理科數學學習情緒低落, 社會組學生跨組夢必將死灰復燃, 易造成學生投機取巧的心態, 不可不愼也。

(2) 單一選擇題 (二) 試題中一些敍述與命題方式皆不適當。

題目: 考慮一次方程式組 $M_t\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$, 其中 $M_t=\begin{bmatrix}t & 1\\3-t & t+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\t+3 & t+1\end{bmatrix}$, t 爲實數。

6. 使此方程組恆有解的充分且必要條件爲何?

(A) $t\neq 5$ (B) $t\neq 1$ (C) $t\not\in\{1,5\}$ (D) $t\not\in\{1,-3,5\}$ (E) $t\not\in\{-3,1\}$

若 $t=0$, $a=0$, $b=-1$, 則

9. $x=$ (A) $\frac{1}{3}$ (B) $-\frac{1}{5}$ (C) $\frac{1}{15}$ (D) 1 (E) 0

10. $y=$ (A) $\frac{1}{3}$ (B) $-\frac{1}{5}$ (C) $\frac{1}{15}$ (D) 1 (E) 0

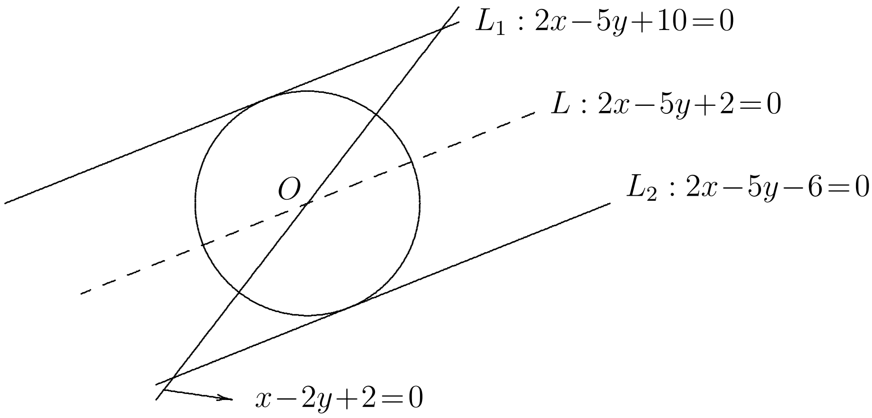
說明: (1) 第6小題學生作答時可試將 $t=1,-3,5$ 反代檢查, 故命題方式不當。

(2) 第9、10兩小題爲不可分割的試題, 故不宜分開計分, 否則有鼓勵猜答之嫌疑。

(3) 填充題第 (1) 題爲考古題, 有接受訓練的學生, 不必思考, 即可速解求出。

題目: 設一圓與直線 $2x-5y-6=0$ 及 $2x-5y+10=0$ 都相切, 且圓心在直線 $x-2y+2=0$ 上, 則此圓的方程式爲 ______。

註: 此題爲67夜甲乙丙丁, 74乙丁組考過之形式; 故一些學生可速解求出。



速解:

因爲 $\begin{cases} L_1: 2x-5y+10=0 \\ L_2: 2x-5y-6=0 \end{cases}$ 爲兩平行切線

所以圓心O落在L_1, L_2 之中間線 $L: 2x-5y+\dfrac{10-6}{2}=0$上

又O在 $x-2y+2=0$ 上 故 $\begin{cases} 2x-5y+2=0 \\ x-2y+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-6 \\ y=-2 \end{cases}$

所以$O(-6,-2)$ 又 $r=d(o,L_1)=\dfrac{|-12+10+10|}{\sqrt{29}}=\dfrac{8}{\sqrt{29}}$

所以$(x+6)^2+(y+2)^2=\dfrac{64}{29}$ 爲所求

註: 一般解法略

(4) 塡充題第 (6) 題不宜以塡充題形式命題, 否則難以鑑別學生眞正的程度。

題目: 設 $\frac{1}{p}+\frac{1}{3q}=12$, 其中 p,q 爲正數, 則 $3\log_{\frac{1}{3}} p+\log_{\frac{1}{3}} q$ 的最大値爲 ______ , 此時 $(p,q)=$ ______ 。

法則: 設 m,p,n,q,r,s 皆爲正數, $mp+nq=k$ (定數), 求 p^r, q^s 之最大值。

此試題死背下列過程即可。

當 $\frac{mp}{r}=\frac{nq}{s}=\frac{mp+nq}{r+s}=\frac{k}{r+s}$ 時, 得 $p=\frac{rk}{m(r+s)}$, $q=\frac{sk}{n(r+s)}$,

代入 $p^r\cdot q^s$ 即得最大值。

特解: (1) 因爲$3\log_{\frac{1}{3}} p+\log_{\frac{1}{3}} q=\log_{\frac{1}{3}} p^3+\log_{\frac{1}{3}} q=\log_{\frac{1}{3}} p^3q=\log_3 \frac{1}{p^3q}=\log_3(\frac{1}{p})^3(\frac{1}{q})^1$,

(2) 此題即已知 $\frac{1}{p}+\frac{1}{3q}=12$, p,q 爲正數, 求 $(\frac{1}{p})^3\cdot\frac{1}{q}$ 之最大値

故當 $\frac{\frac{1}{p}}{3}=\frac{\frac{1}{3q}}{1}=\frac{\frac{1}{p}+\frac{1}{3q}}{4}=\frac{12}{4}=3$ 即 $p=\frac{1}{9}$, $q=\frac{1}{9}$ 代入 $(\frac{1}{p})^3\cdot\frac{1}{q}$ 中,
得 $(\frac{1}{p})^3\cdot\frac{1}{q}=9^4=3^8$ 所以 $\log_3\frac{1}{p^3q}=\log_3 3^8=8$ 爲最大值且 $(p,q)=(\frac{1}{9},\frac{1}{9})$。

註: 此種解法, 學生們不一定了解, 甚至 $3\log_{\frac{1}{3}}p+\log_{\frac{1}{3}}q$ 是發生最大或最小值皆不知道, 但是還是答對得分。

(5) 計算題四 (1) 超過課本教材範圍, 如此教師無法控制教材內容, 學生不易準備, 有助長補習之風。

題目: 考慮函數 $f(x)=\cos 2x+4\sin^2 x-\cos x-2$

(1) 解方程式 $f(x)=0$。

(2) 在 $0\le x\le 2\pi$ 的條件下, 解不等式 $f(x)>0$。

解: (1)

$$\begin{aligned}
& \cos 2x+4\sin^2 x-\cos x-2=0\\
\Rightarrow\ & 2\cos^2-1+4(1-\cos^2 x)-\cos x-2=0\\
\Rightarrow\ & 2\cos^2 x+\cos x-1=0\\
\Rightarrow\ & (2\cos x-1)(\cos x+1)=0\\
\Rightarrow\ & \cos x=\frac{1}{2}\quad\text{或}\quad -1
\end{aligned}$$

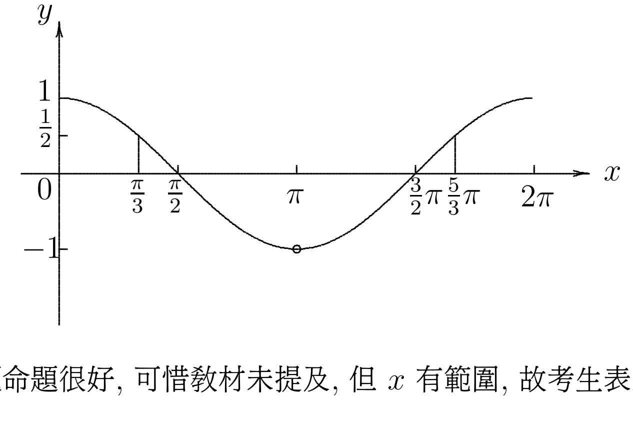
$$\text{所以}x = 2n\pi\pm\frac{\pi}{3}\quad\text{或}\quad x=(2n+1)\pi,\quad n\in Z$$

註: 此一般解因教材未提, 故很多考生不會表達其解, 很可惜。

(2) $f(x)>0$ 由 (1) 得 $(2\cos x-1)(\cos x+1)>0$

所以 $-1<\cos x<\frac{1}{2}$

但 $0\le x\le 2\pi$ 所以$\frac{\pi}{3}<x<\frac{5}{3}\pi$, 但 $x\neq\pi$。



註: 第(2) 小題命題很好, 可惜教材未提及, 但 x 有範圍, 故考生表達其解, 該較沒問題。

(B) 社會組方面

(1) 試題很靈活, 但沒有簡易試題, 對社會組學生來說易造成放棄數學的學生增加。今年數學試題選擇題, 填充題的第1題均必須好好的運算, 易造成心理恐懼而失常。故筆者建議第1題最好安排簡易試題, 讓每位學生心平氣和的應考, 考出眞正的實力。

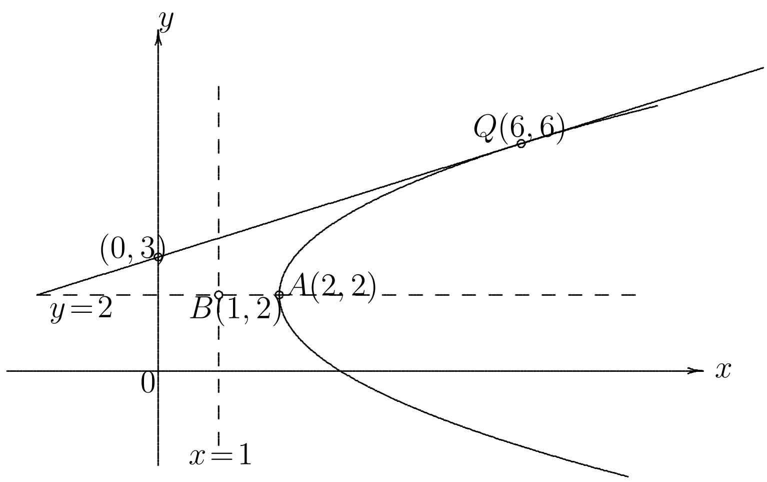
例如考: (1) 計算 $\sin^2 30^\circ + \sin^2 40^\circ + \sin^2 50^\circ =$ ______ Ans: $\frac{5}{4}$

(2) 求 $11^5 - 4\cdot 11^4 - 72\cdot 11^3 - 56\cdot 11^2 + 15\cdot 11 + 7$ 之值 ______ Ans: 51

讓學生有基本分數可得。

(2) 拋物線的切線課本未提, 有補充的學校較佔便宜。

題目: 已知拋物線 Γ 之頂點爲 $(2,2)$, 準線爲 $x=1$, Γ 爲通過點 $(0,3)$ 之直線, 其斜率大於 0, 且 L 與 Γ 有唯一之交點 Q, 試求 L 之斜率及 Q 點之坐標。



解: (1) 令拋物線 $\Gamma : (y-2)^2 = 4c(x-2)$

因爲$\overline{AB} = c = 1$ 所以$\Gamma : (y-2)^2 = 4(x-2)$

(2) 令切線 $L : y = mx+3$ 代入 Γ 中

得 $(mx+1)^2 = 4(x-2) \quad \Rightarrow \quad m^2x^2 + 2(m-2)x + 9 = 0 \qquad \cdots\cdots(*)$

因爲 相切 所以 $(*)$ 有重根 所以 判別式$= 4(m-2)^2 - 36m^2 = 0$

所以$2m^2 + m - 1 = 0$ 所以$m = \frac{1}{2}$ 或 -1 但 $m > 0$

所以$m = \frac{1}{2}$ 代入 $(*)$ 得 $\frac{x^2}{4} - 3x + 9 = 0$ 所以$(-6)^2 = 0$

所以$x = 6, y = 6$ 得 $Q(6,6)$

(C) 建議:

1. 聯考帶動數學教育的走向, 聯考如何考, 學生就如何聽, 與聯考無關的講解, 學生就不看不聽, 如“點至直線或平面的距離” “正餘弦定理” $\cdots$ 的證明, 這些定理教師辛苦講解與證明,

但學生們認爲聯考不考, 希望教師多講一些試題, 應付聯考, 如此的導向, 不是很殘忍嗎? 故希望命題教授注重課堂上簡易證明題的命題。

2. 請命題教授對試題的安排由淺入深合理化, 如此才能眞正測出學生的程度。

—本文作者任教於台南縣新化高中—