八十四學年度大學聯考社會組數學試題解答及分析

吳隆盛

對於今年的大學聯考社會組數學試題就作者個人觀點加以解答及分析如下。

第一部分

1. 若實數 x 滿足不等式 $\log_3(3^x+8) < \frac{x}{2}+1+\log_3 2$, 則 x 的範圍為

(A) $\log 2 < x < \log 8$　(B) $1 < x < \log 12$　(C) $\log 4 < x < \log 8$

(D) $\log 4 < x < \log 16$　(E) $\log 8 < x < \log 16$

解:
$$\begin{aligned}
\log_3(3^x+8) < \frac{x}{2}+1+\log_3 2 &\Leftrightarrow \log_3(3^x+8) < \log_3 3^{x/2} + \log_3 3 + \log_3 2 \\
&\Leftrightarrow \log_3(3^x+8) < \log_3(3^{x/2}\cdot 3\cdot 2) \\
&\Leftrightarrow 3^x + 8 < 6\cdot 3^{x/2} \\
&\Leftrightarrow 3^x - 6\cdot 3^{x/2} + 8 < 0 \\
&\Leftrightarrow (3^{x/2}-2)(3^{x/2}-4) < 0 \\
&\Leftrightarrow 2 < 3^{x/2} < 4 \\
&\Leftrightarrow 4 < 3^x < 16 \\
&\Leftrightarrow \log_3 4 < x < \log_3 16
\end{aligned}$$

[分析] 先把不帶 $\log$ 的 $\frac{x}{2}+1$ 這一部分寫成 $\log_3 3^{x/2}+\log_3 3$, 使每一項都帶有 $\log_3$。不等號右端的式子就可以合併成一個 $\log_3$ 的式子, 從而與左式平起平坐。現在不等號兩端都可脫掉 $\log_3$ 這件外套了! 移項過來就成了一個準二次不等式, 當然你要看得出來 3^x 是 $3^{x/2}$ 的平方才行。接下來經過簡單的分解因式以後, 就好辦了!

2. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\overline{BC}=1$, $\sin A < \sin B$, 且 $\sin A$ 與 $\sin B$ 為 $8x^2-4\sqrt{3}x+1=0$

的兩根, 則 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑等於

(A) $\sqrt{3}-1$　(B) $2\sqrt{3}-1$　(C) $\sqrt{3}+1$　(D) $\sqrt{3}+2$　(E) $2\sqrt{3}+1$

解:

由所給之方程式　$8x^2-4\sqrt{3}+1=0$

利用根的公式, 得　$x=\dfrac{2\sqrt{3}\pm\sqrt{(2\sqrt{3})^2-8}}{8}=\dfrac{2\sqrt{3}\pm 2}{8}=\dfrac{\sqrt{3}\pm 1}{4}$。

$\sin A$ 是其中的小根, 所以　$\sin A=\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$,

依正弦定理, $\triangle ABC$ 的外接圓之半徑 $=\dfrac{\overline{BC}}{2\sin A}=\dfrac{1}{2\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{4}}=\sqrt{3}+1$,

[**分析**] 這一題本來就只是套公式而已 — 套用正弦定理, 由三角形的一邊長及對角正弦計算外接圓半徑, 不過命題者又捨不得直接告訴你 $\sin A$ 的值, 而要賣一個關子, 叫你先解一個一元二次方程式。這一招當然躲不過明眼人。很多人把這種『利用兩個不相干的問題, 硬生生的把它們湊在一起, 拿甲題的結果當乙題的已知』認爲是很漂亮的綜合應用題。唉, 唉!

3. 方程式 $x+y+z+u\le 9$ 之正整數解之個數爲

(A) $\sum\limits_{k=1}^{9}{}_4H_k$　(B) $1+\sum\limits_{k=1}^{5}{}_kH_4$　(C) $\dfrac{9\,!}{5\,!}$　(D) 56　(E) 126

解:

$$
\begin{aligned}
&\text{『}x+y+z+u\le 9\text{ 之正整數解』之個數}\\
=\ &\text{『}x+y+z+u=k,\ \text{其中 } k=9,8,7,6,5,4\text{ 之正整數解』之個數}\\
=\ &\text{『}x+y+z+u=10-w,\ \text{其中 } w=1,2,3,4,5,6\text{ 之正整數解』之個數}\\
=\ &\text{『}x+y+z+u+w=10\text{ 之正整數解』之個數}\\
=\ &{}_9C_4\\
=\ &126
\end{aligned}
$$

[**分析**] 欲求『$x+y+z+u\le 9$ 之正整數解』之個數

通常都分別求　『 $x+y+z+u=9$ 之正整數解』之個數

『 $x+y+z+u=8$ 之正整數解』之個數

『 $x+y+z+u=7$ 之正整數解』之個數

『 $x+y+z+u=6$ 之正整數解』之個數

『 $x+y+z+u=5$ 之正整數解』之個數

『 $x+y+z+u=4$ 之正整數解』之個數

再把它們加起來。

即

$$\begin{aligned} & {}_8C_3+{}_7C_3+{}_6C_3+{}_5C_3+{}_4C_3+{}_3C_3 \\ = & \ 56+35+20+10+4+1 \\ = & \ 126 \end{aligned}$$

不過, 如果加一個正整數 w 進來『搗蛋』, 變成

$$x+y+z+u+w=10$$

其中 $x+y+z+u$ 的值還是 $9,8,7,6,5,4$ 所以只要算出『$x+y+z+u+w=10$ 之正整數解』之個數, 就可以了!

4. 十位考生之國文與數學成績列表如下:

考生編號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
國 文	89	65	76	69	82	57	66	72	78	66
數 學	75	57	65	65	83	63	58	62	63	69

今已算出國文成績之標準差爲 8.9 (取至小數點第一位), 數學成績之標準差爲 7.5 (取至小數點第一位), 則此十位考生兩科成績之相關係數最接近

(A) -0.85 (B) 0.25 (C) 0.66 (D) 0.78 (E) 0.85

解: 先算出: 國文之算術平均數$=72$ 數學之算術平均數$=66$

$$\begin{aligned} & (89-72)(75-66)+(65-72)(57-66)+(76-72)(65-66)+(69-72)(65-66) \\ + & (82-72)(83-66)+(57-72)(63-66)+(66-72)(58-66)+(72-72)(62-66) \\ + & (78-72)(63-66)+(66-72)(69-66) \\ = & 442 \end{aligned}$$

$$442\div 10=44.2$$

$$\frac{44.2}{8.9\times 7.5}=0.66$$

[**分析**] 只要知道標準差的定義, 照著算就好了!

第二部分

一、填充題

1. 已 知 n 及 k 爲 正 整 數, 且 $n>k$, 若 ${}_nC_{k-1}:{}_nC_k:{}_nC_{k+1}=1:2:3$, 則

$n=$ ______。

解: ${}_nC_{k-1}:{}_nC_k=1:\dfrac{n-k+1}{k}=1:2\Longrightarrow n-k+1=2k\Longrightarrow n=3k-1$

${}_nC_k:{}_nC_{k+1}=1:\dfrac{n-k}{k+1}=2:3\Longrightarrow 2n-2k=3k+3\Longrightarrow 2(3k-1)-2k=3k+3$。

故 $k=5,\ n=3\times5-1=14$。

[**分析**] (1) 這只是 n 和 k 的二元一次方程組而已。

(2) ${}_nC_{k-1}:{}_nC_k$

$=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+2)}{(k-1)!}:\frac{n(n-1)\cdots(n-k+2)(n-k+1)}{k\cdot(k-1)!}$

$=1:\frac{n-k+1}{k}$

(3) 至於 ${}_nC_k:{}_nC_{k+1}$ 只要把上式化簡結果中的 k 代之以 $k+1$ 就好了, 不必再算一遍。

2. 有一複數等比數列, 首項爲 $1+2i$, 第二項爲 $3+i$, 則此數列前五項之和爲 ______。

解: 公比$=\frac{3+i}{1+2i}=1-i$, 前五項之和$=\frac{(1+2i)[(1-i)^5-1]}{(1-i)-1}=\frac{(1+2i)(-5+4i)}{-i}=6-13i$。

[**分析**] (1) 由前兩項求公比, 再利用首項及公比求前五項之和, 這層認知, 顯而易見。

(2) 反倒是含有 i 的計算要小心些, 否者容易算錯。

3. 若多項式 $f(x)=2x^3-4x^2+2x+(2c+4)$ 與多項式 $g(x)=3x^3-6x^2+2x+(3c+5)$ 的最高公因式爲一次式, 則 c 之值爲 ______。

解: $3f(x)-2g(x)=2x+2=2(x+1)$ 就是 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的最高公因式。

令 $f(-1)=-2-4-2+2c+4=0$, 得 $c=2$。

[**分析**] (1) 題目故意安排 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的前兩項 $2(x^3-2x^2)$ 和 $3(x^3-2x^2)$ 係數成比例,『應該』很容易看出利用 $3f(x)-2g(x)$ 消去三次項和二次項, 得一次式, 就是最高公因式了。

(2) 再下來就根據因式定理求 c 的了。

4. 若圓 C 通過點 (4,2) 及 (1,−5), 且其圓心在直線 $x-3y-7=0$ 上, 則圓 C 之圓心是 ______, 半徑是 ______。

解: 點 $A(4,2)$ 與點 $B(1,-5)$ 連線的垂直平分線爲:$3x+7y=-3$

此線與直線 $x-3y-7=0$ 的交點爲 $P\left(\frac{5}{2},-\frac{3}{2}\right)$, 這就是圓 C 的圓心。

圓 C 的半徑$=\sqrt{(\frac{5}{2}-4)^2+(-\frac{3}{2}-2)^2}=\frac{\sqrt{58}}{2}$。

[**分析**] 其實直線 $x-3y-7=0$『恰好』就通過 A,B 連線的中點 P, 它就是圓心。圓 C 的半徑$=\overline{AB}$ 長之半$=\sqrt{(4-1)^2+(2+5)^2}\div2=\frac{\sqrt{58}}{2}$

5. 若 α 及 β 為兩實數, 且聯立方程式 $\begin{cases}(1-\alpha)x+7y=1\\ x+y+\alpha z=\beta\\ 2\alpha y+z=0\end{cases}$ 有兩組以上之解, 則 α 之值為 ______ , β 之值為 ______ 。

解:

$$令\triangle=\begin{vmatrix}1-\alpha & 7 & 0\\ 1 & 1 & \alpha\\ 0 & 2\alpha & 1\end{vmatrix}=0,\ 得\ 2\alpha^3-2\alpha^2-\alpha-6=0$$

$$\Longrightarrow(\alpha-2)(2\alpha^2+2\alpha+3)=0,$$

而 α 為一實數, 故 $\alpha=2$。

$$令\ \triangle=\begin{vmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & \beta & 2\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=0,\quad 得\ \beta=-1。$$

6. 空間上一平面 E 與正 X 軸, 正 Y 軸及正 Z 軸分別交於 A,B,C三點。已知 C 點之坐標為 (0,0,1), $\overline{CB}=\overline{CA}$, 且 $\triangle ABC$ 之面積為 $\frac{3\sqrt{7}}{2}$, 則 A 點之坐標為 ______ , 平面 E 之一個單位法向量為 ______ 。

解: 給予之三點: $A(a,0,0)$, $B(0,a,0)$, $C(0,0,1)$ 其中 $a>0$

(因為 $\overline{CA}=\overline{CB}$, 所以 A 的 x 坐標與 B 的 y 坐標相同)

$\triangle ABC$ 之面積$=\frac{1}{2}\sqrt{\overline{OB}^2\cdot\overline{OC}^2+\overline{OC}^2\cdot\overline{OA}^2+\overline{OA}^2\cdot\overline{OB}^2}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{a^2\cdot 1^2+1^2\cdot a^2+a^2\cdot a^2}$

$$\begin{aligned}由已知\qquad & \frac{1}{2}\sqrt{a^2\cdot 1^2+1^2\cdot a^2+a^2\cdot a^2}=\frac{3\sqrt{7}}{2}\\ \Longrightarrow\quad & a^4+2a^2=9\cdot 7\\ \Longrightarrow\quad & a^4+2a^2-9\cdot 7=0\\ \Longrightarrow\quad & (a^2+9)(a^2-7)=0\\ \Longrightarrow\quad & a^2=7\qquad 但\ a>0\\ \Longrightarrow\quad & a=\sqrt{7}\end{aligned}$$

故 A 點之坐標為 $(\sqrt{7},0,0)$, B 點之坐標為 $(0,\sqrt{7},0)$。

$\overrightarrow{CA}=(\sqrt{7},0,-1),\qquad \overrightarrow{CB}=(0,\sqrt{7},-1)$

$\overrightarrow{CA}$ 與 $\overrightarrow{CB}$ 的公垂方向比為 $\begin{vmatrix}0 & -1\\ \sqrt{7} & -1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}-1 & \sqrt{7}\\ -1 & 0\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}\sqrt{7} & 0\\ 0 & \sqrt{7}\end{vmatrix}$

$=\sqrt{7}:\sqrt{7}:7=1:1:\sqrt{7}$

而 $\sqrt{1^2+1^2+(\sqrt{7})^2}=3$

故平面E之單位法向量爲 $\pm\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{\sqrt{7}}{3}\right)$。

7. 一盒中有10個球, 球上分別印有號碼1到10。今由盒中取4球, 則4球之號碼中第二大數目是7的機率爲 ＿＿＿＿ 。

解: 所求機率爲 $\frac{{}_3C_1\cdot {}_6C_2}{{}_{10}C_4}=\frac{3}{14}$。

[**分析**] 10球中取4球的取球數爲 ${}_{10}C_4=10\cdot 3\cdot 7$。

7號是第二大, 表示有一球比7號大, 有兩球比7號小。

7以上的號碼有8,9,10。由其中取一球的取球數爲 ${}_3C_1=3$。

7以下的號碼有1,2,3,4,5,6。由其中取兩球的取球數爲 ${}_6C_2=3\cdot 5$,

所求機率爲 $\frac{{}_3C_1\cdot {}_6C_2}{{}_{10}C_4}=\frac{3\cdot 3\cdot 5}{10\cdot 3\cdot 7}=\frac{3}{14}$。

8. 設有一橢圓形運動場地。令長軸兩頂點爲A及B, 短軸兩頂點爲C及D。在D點豎有一垂直於地面的旗桿, 高10公尺。若從C點地面到旗桿頂的仰角爲22.5°, 而 $\angle ACD=60°$, 則短軸 $\overline{CD}$ 之長度爲 ＿＿＿＿ 公尺, 長軸AB之長度爲 ＿＿＿＿ 公尺。

解: $\overline{CD}=10\cot 22.5°=10(\sqrt{2}+1)$, $\overline{AB}=10(\sqrt{2}+1)\tan 60°=10(\sqrt{2}+1)\cdot\sqrt{3}$
$=10(\sqrt{6}+\sqrt{3})$

[**分析**] (1)『橢圓』在這個題目中, 無關緊要, 只要曉得 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 互相垂直就夠了。

(2) 考你一下 $\cot 22.5°$ 怎麼算: $\cot 22.5°=\frac{\cos 22.5°}{\sin 22.5°}=\frac{2\cos^2 22.5°}{2\sin 22.5°\cos 22.5°}=\frac{1+\cos 45°}{\sin 45°}$
$=\sqrt{2}+1$。

二、若 $\triangle ABC$ 的三項點坐標爲 $A(2,5)$, $B(5,1)$ 及 $C(3,7)$, P 爲線段 $\overline{BC}$ 上的一點, 且向量 $\overrightarrow{AP}$ 在向量 $\overrightarrow{AB}$ 的正射影向量爲 $(\frac{6}{25},-\frac{8}{25})$, 試求 P 點的坐標。

解: P 點在 $\overline{AB}$ 上的正射影爲 $H=(2,5)+(\frac{6}{25},-\frac{8}{25})=(\frac{56}{25},\frac{117}{25})$

通 H,P 的直線之方程式爲 $3x-4y=-12$ (1)

通 B,C 的直線之方程式爲 $3x+y=16$ (2)

解 (1), (2) 得 P 點之坐標爲 $(\frac{52}{15},\frac{28}{5})$。

三、已知拋物線 Γ 之頂點爲 $(2,2)$, 準線爲 $x=1$。L 爲通過點 $(0,3)$ 之直線, 其斜率大於0, 且 L 與 Γ 有唯一之交點 Q。試求 L 之斜及 Q 點之坐標。

解: 拋物線 $\Gamma:(y-2)^2=4(x-2)$ (1)

直線 L: $y=mx+3$ (2)

代 (2) 入 (1) $(mx+1)^2=4(x-2)$

$$\Longrightarrow m^2x^2+2(m-2)x+9=0 \tag{3}$$

令其判式為0：$(m-2)^2-m^2\cdot 9=0$

$$\Longrightarrow -8m^2-4m+4=0$$

$$\Longrightarrow 2m^2+m-1=0$$

$$\Longrightarrow (2m-1)(m+1)=0 \qquad \text{但 } m>0$$

故 $m=\frac{1}{2}$

代入 (3), 得 $x^2-12x+36=0$

$$(x-6)^2=0$$

$$x=6, y=6$$

切點 Q 之標為 $(6,6)$。

—本文作者任教於金甌女中—