八十四學年度大學聯考自然組數學試題解答及分析

吳隆盛

對於今年的大學聯考自然組數學試題以作者個人觀點加以解答及分析如下。

第一部分單一選擇題

[一] **九位學生的數學抽考分數分別為**:

30, 40, 60, 50, 70, 80, 60, 90, 60

1. 這九個分數的中位數爲何?

(A) 40 (B) 50 (C) 60 (D) 70 (E) 80

解: 先將這九個數由小而大依序排列

30, 40, 50, 60, 60, 60, 70, 80, 90

第五個數『 60 』就是中位數。

選 (C)

[**分析**] (1) 這是簡單的敍述統計知識。

(2) 這九個數由小而大排列之後, 第一個和第九個加起來除以二, 第二個和第八個加起來除以二, 第三個和第七個加起來除以二, 第四個和第六個加起來除以二, 都等於最中間的值。

2. 這九個分數的標準差爲何?

(A) $\frac{10\sqrt{34}}{9}$(B) $\frac{10\sqrt{34}}{3}$ (C) $\frac{20\sqrt{7}}{9}$ (D) $\frac{20\sqrt{7}}{3}$(E) $\frac{2800}{9}$

解: 先計算算術平均數: $(30+40+50+60+60+60+70+80+90)\div 9=60$

標準差$=\sqrt{\frac{[(30-60)^2+(40-60)^2+(50-60)^2]\times 2}{9}}=\sqrt{\frac{2800}{9}}=\frac{20\sqrt{7}}{3}$

選 (D)

[**分析**] (1) 根據上述對稱現象, 很容易看出算術平均數顯然就是 60 。

(2) 考你是不是『懂得』什麼是標準差。

(3) 中間三個數就等於算術平均數 60, 前後又都對稱於 60, 所以只要計算前三數

與 60 之差的平方和再乘以2就可以了, 不必每項都算。

現在使用簡單隨機抽樣法, 從這九個分數中取出三個。請回答下面三個小問題。

3. 所取出三個分數中至少有一個爲 60 分的取法有幾種?

(A) 18 (B) 21 (C) 35 (D) 40 (E) 64

解: 用反面算法: 由『所有取出三個數的方法數』減去『不含 60 分的取法數』

$${}_9C_3 - {}_6C_3 = 84 - 20 = 64$$

選 (E)

[**分析**] (1) 至少有一個60分, 表示可能有一個60分, 也可能有兩個60分, 也可能有三個60分。

(2) 一個 60 分的取法 ${}_3C_1 \cdot {}_6C_2 = 3 \cdot 15 = 45$

兩個 60 分的取法 ${}_3C_2 \cdot {}_6C_1 = 3 \cdot 6 = 18$

三個 60 分的取法 ${}_3C_3 = 1$

所以, 至少有一個爲 60 分的取法有 $45 + 18 + 1 = 64$ 種。

(3)『至少有一個 60 分』的否定句是『每一個都不是 60 分』, 所以只要由『所有取出三個數的方法數』減去『不含 60 分的取法數』就可以了。免去考慮各種『至少有一個 60 分』的情況, 以免疏漏。

(4) 通常遇到『至少有一 $\cdots$』的情況時, 就要立即想到『每一個都不 $\cdots$』。這樣, 解起問題就可輕鬆多了!

4. 所取出三個分數的中位數等於 60 分的取法有幾種?

(A) 18 (B) 27 (C) 43 (D) 46 (E) 55

解:

分類	取法數
三個分數都是 60	1
兩個 60, 一個其他	${}_3C_2 \cdot {}_6C_1 = 18$
一個 60, 一個較大, 一個較小	${}_3C_1 \cdot {}_3C_1 \cdot {}_3C_1 = 27$
合計	46

選 (D)

[**分析**] (1) 要看清楚題目說『從這九個分數中取出三個』, 當然『三個』60 不要只當作一個 60。

(2) 在計算『有幾種』『有幾個』的時候, 常常要用分類法, 但是要注意不可重複, 不可遺漏。

5. 若已知所取出三個分數中有一個爲 70 分, 則在此條件下, 這三個分數的中位數爲 60 分的機率爲何?

(A) $\frac{3}{14}$(B) $\frac{3}{7}$(C) $\frac{1}{6}$(D) $\frac{1}{3}$(E) $\frac{15}{56}$

解: 再取兩個數的方法: ${}_8C_2 = 28$

分類	取法數
再兩個 60 分	${}_3C_2 = 3$
一個 60, 一個較 60 小	${}_3C_1 \cdot {}_3C_1 = 9$
合計	12

所求之機率$= \frac{12}{28} = \frac{3}{7}$

選 (B)

[**分析**] (1) 所取三數中, 已經有一個數是 70, 所以只要在其餘8 個數中再取兩個數, 就得『所取出三個分數中有一個爲 70 分』的取法, 它的取法個數爲 ${}_8C_2 = 28$。

(2) 三個分數中已經有一個是 70 分, 它比 60 分大。想要使中位數爲 60 分, 必須有一個 60 分, 另外那一個也可以是 60 分, 不然就要比 60 分小。也就是說: 除了到手的 70 分外, 要從『 30, 40, 50, 60, 60, 60, 70, 80, 90 』當中, 再取兩個 60 分, 或者一個 60 分一個比 60 分小。

(3) 如果死抱著公式

$$\frac{\text{『從九個分數中任取三個分數, 其中有一個是70分, 而且中位數是70分』的機率}}{\text{『從九個分數中任取三個分數, 其中有一個是70分』的機率}}$$

就有得你累了!

[二] 考慮一次方程式組 $M_t \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, 其中 $M_t = \begin{bmatrix} t & 1 \\ 3-t & t+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ t+3 & 3t+1 \end{bmatrix}$, t 爲實數。

6. 使此方程組恆有解的充分且必要條件爲何?

(A) $t \neq 5$ (B) $t \neq 1$(C) $t \notin \{1, 5\}$ (D) $t \notin \{1, -3, 5\}$ (E) $t \notin \{-3, 1\}$

解: $\det(M_t) = \begin{vmatrix} t & 1 \\ 3-t & t+1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ t+3 & 3t+1 \end{vmatrix} = (t^2+2t-3)(t-5) = (t-1)(t+3)(t-5)$ 使此方程組恆有解的充分且必要條件爲 $\det(M_t) = (t-1)(t+3)(t-5) \neq 0$, 即 $t \notin \{1, -3, 5\}$

選 (D)

[**分析**] (1) 設 A, B, C 爲同階方陣, 若 $A = BC$, 則 $\det(A) = \det(BC) = \det(B) \cdot \det(C)$。

(2) 設 $A = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$, E 表方程組 $A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, 則

E 恰有一組解的充分且必要條件爲 $\det(A) \neq 0$

E 有無限多組解的充分且必要條件爲 $\det(A)=0$ 且 $\begin{vmatrix} a & m_{12} \\ b & m_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_{11} & a \\ m_{21} & b \end{vmatrix} = 0$

E 無解的充分且必要條件爲 $\det(A)=0$ 但 $\begin{vmatrix} a & m_{12} \\ b & m_{22} \end{vmatrix}$ 與 $\begin{vmatrix} m_{11} & a \\ m_{21} & b \end{vmatrix}$不皆爲0

所以, 無論 a,b 爲何值方程組 E『恆』有解的充分且必要條件爲 $\det(A)\neq 0$

7. 當 t 滿足第6 題的正確條件時, 下列何者成立?
(A) 對於任何一對 a,b, 此方程組恰有一組解
(B) 對於任何一對 a,b, 此方程組都有無限多組解
(C) 僅只有一對 a,b, 使此方程組恰有一組解
(D) 僅只有一對 a,b, 使此方程組有無限多組解
(E) 有不只一對 (但非所有的) a,b, 使此方程組有無限多組解

解: 只要 $\det(M_t)\neq 0$, 不管 a,b 究竟是多少, 這個方程組都是恰有一組解。選 (A)。

[**分析**] (1) 當 $\det(M_t)=0$ 時, 由於 a,b 的值的『搭配』, 可使這個方程組有無限多組解或無解。

(2) 當 $\det(M_t)\neq 0$ 時, 無論 a,b 的值如何地變, 這個方程組都是恰有一組解。

若 $t=0$, $a=0$, $b=1$, **則**

8. $\det(M_0^{-1})=$ (A) $\frac{1}{3}$ (B) $-\frac{1}{5}$ (C) $\frac{1}{15}$ (D) 1 (E) 0

解:

$$
\begin{aligned}
M_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad &\Rightarrow \quad \det(M_0) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-3)(-5) = 15 \\
&\Rightarrow \quad \det(M_0^{-1}) = (\det(M_0))^{-1} = 15^{-1} = \frac{1}{15}
\end{aligned}
$$

選 (C)

[**分析**] (1) 如果你還曉得或記得的話, 當然先求 $\det(M_0)$ 的值, 再用 $\det(M_0^{-1}) = (\det(M_0))^{-1}$的關係。

(2) 你也可用先前的 $\det(M_t)=(t^2+2t-3)(t-5)$ 得 $\det(M_0)=(-3)(-5)=15$。

(3) 要是忘了 $\det(M_0^{-1})=(\det(M_0))^{-1}$, 只好先用矩陣乘法算 M_0, 再求它的逆矩陣 M_0^{-1}, 最後再求行列式 $\det(M_0^{-1})$ 的值。

9. $x=$ (A) $\frac{1}{3}$(B) $-\frac{1}{5}$(C) $\frac{1}{15}$(D) 1(E) 0
10. $y=$(A) $\frac{1}{3}$(B) $-\frac{1}{5}$(C) $\frac{1}{15}$(D) 1(E) 0

解:

$$M_0=\begin{bmatrix}0&1\\3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&1\\6&7\end{bmatrix}\Rightarrow M_0^{-1}=\frac{1}{15}\begin{bmatrix}7&-1\\-6&3\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=M_0^{-1}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\frac{1}{15}\begin{bmatrix}7&-1\\-6&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}=\frac{1}{15}\begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/15\\-1/5\end{bmatrix}$$
故 $x=\frac{1}{15}, y=-\frac{1}{5}$

第9 題選 (C), 第 10 題選 (B) 。

[**分析**] (1) 當二階方陣 M 所相應的行列式 $\det(M)\neq 0$ 時, 方程組 $M\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ 之解爲
$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=M^{-1}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$$

第二部分

一、填充題

1. 設一圓與直線 $2x-5y-6=0$ 及 $2x-5y+10=0$ 都相切, 且圓心在直線 $x-2y+2=0$ 上, 則圓的方程式爲 ______ 。

解: 兩直線方程式的常數項相加後除以 2 $(-6+10)\div 2=2$
直線 $2x-5y-6=0$ 及 $2x-5y+10=0$ 是兩平行線,
圓心在這兩線的『正中央』$2x-5y+2=0$ 上。
解 $\begin{cases}2x-5y+2=0\\x-2y+2=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=-6\\y=-2\end{cases}$, 圓心就是 $(-6,-2)$
半徑$=\frac{|10-2|}{\sqrt{2^2+5^2}}=\frac{8}{\sqrt{29}}$ (這是兩平行線 $2x-5y+10=0$ 及 $2x-5y+2=0$ r 的距離) 所求圓之方程式爲 $(x+6)^2+(y+2)^2=\frac{64}{29}$。

[**分析**] (1) 要注意到直線 $2x-5y-6=0$ 及 $2x-5y+10=0$ 是兩條平行的直線。
(2) 一個圓要和兩平行直線『都相切』, 它的圓心就要在這兩直線的『正中央』上。
(3) 只要把這兩平行直線 $2x-5y-6=0$ 及 $2x-5y+10=0$ 的常數項相加再除以 2, 就得圓心在直線 $2x-5y+2=0$ 上了。

2. $\triangle ABC$ 的三頂點坐標爲 $A(2,-3,5)$, $B(3,0,10)$, $C(x,y,0)$, 則使 $\triangle ABC$ 的周長爲最小的 C 點之坐標爲 ______ 。

解: 因爲 $\overline{AB}$ 之長爲定值, 欲使 $\triangle ABC$ 之周長爲最小, 其實就是使 $\overline{AC}+\overline{BC}$ 爲最小! $C(x,y,0)$ 在 xy 平面上, A,B 在此平面之同側, 而到此平面的距離之比$=5:10=1:2$ 取 $A(2,-3,5)$ 對於 xy 平面的對稱點 $A'(2,-3,-5)$。按 1:2 之比取 A' 與 B 之內分點就得 C 點。

C 點之坐標爲 $\frac{2(2,-3,-5)+(3,0,10)}{2+1}=(\frac{7}{3},-2,0)$

[分析] (1) 不要被『周長爲最小』所唬住了, 已經有一邊是固定了呢。

(2) 怎樣用反射原理求 $\overline{AC}+\overline{BC}$ 的最小值, 總不該忘了吧!

(3) 如果不曉得用『A' 與 B 的內分點』去求 C 點的話, 那就只好求過 A', B 的點的直線與 xy 平面的交點了。

3. 設 $\triangle ABC$ 中, $\overline{AB}=2$, $\overline{AC}=1+\sqrt{3}$, $\angle A=30^\circ$, 則 $\overline{BC}$ 的長度爲 ______, $\angle C$ 的大小爲 ______ 度。

解:

按餘弦定理: $\overline{BC}^2=2^2+(1+\sqrt{3})^2-2\cdot 2\cdot(1+\sqrt{3})\cos 30^\circ=2$

故 $\overline{BC}=\sqrt{2}$

按餘弦定理: $\cos C=\dfrac{(1+\sqrt{3})^2+(\sqrt{2})^2-2^2}{2\cdot(1+\sqrt{3})\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

故 $\angle C=45^\circ$

[分析] (1) 已知一三角形的兩邊之長及一角之度數, 欲求這已知角的對邊之長, 當然是用餘弦定理了。

(2) 算完了 $\overline{BC}$ 之長以後, 三邊的長都知道了, 要算其中的一角, 當然也用餘弦定理的另一『型』了。

4. 曲線 $y=x^4-2x^3-x^2+2x$ 與 x 軸的交點中, 最左端的點坐標爲 ______。此曲線與 x 軸所圍成區域的面積爲 ______。

解:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4-2x^3-x^2+2x=x^3(x-2)-x(x-2)=x(x-2)(x^2-1)\\ &= x(x-2)(x-1)(x+1)\end{aligned}$$

令 $x^4-2x^3-x^2+2x=0$

得 $x(x-2)(x-1)(x+1)=0$

$x=-1,0,1,2$

故 此曲線與x 軸的最左端之交點爲 $(-1,0)$

此曲線與x軸所圍成區域的面積

$$= \int_{-1}^{0} -f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{2} -f(x)dx = \frac{49}{30}$$

[**分析**] (1) 注意到了 $f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$ 這個式子前兩項和後兩項的係數比相等, 就好分解了。

(2) 曲線與 x 軸所圍成區域分成三『塊』, 前後兩塊都在 x 軸『下方』, 只有中間那塊在 x 軸『上方』, 求面積時, 不要把式子列錯了。

5. 下圖中 $ABCDEF$ 為一正六邊形, 將各邊延長形成一個六角星形。令正六邊形所圍成之區域為 R_1, 斜線區域為 R_2。設 $f(x,y) = 5x - 4y$, 則 $f(x,y)$ 在 R_1 上之最大值為 ______ ; $f(x,y)$ 在 R_2 上之最小值為 ______ 。

解: 因為 x 坐標相同, 所以 $A(2,7)$, $D(2,3)$ 兩點連線與 x 軸垂直。

連 $\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}$, 將 R_1 分成六個正三角形, 其邊長等於 $\overline{AD}$ 之半 $=$ $(7-3) \div 2 = 2$。

E 點在 $D(2,3)$ 的右方 $\sqrt{3}$ 單位上方 1 單位, 故 E 點的坐標為 $(2+\sqrt{3}, 4)$。

B 點的上方之頂點 G 在 $A(2,7)$ 的左方 $\sqrt{3}$ 單位上方 1 單位,

故 G 點的坐標為 $(2-\sqrt{3}, 8)$。

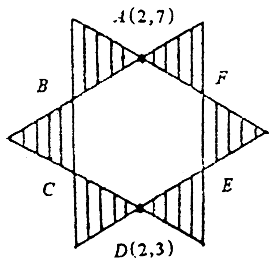
按 $\frac{5}{4}$ 的斜率, 將直線$L: 5x - 4y = k$ 由左上向右下平行移動。

就 R_1 而言, L 最後從 $E(2+\sqrt{3}, 4)$ 離開, 故 $f(x,y)$ 在 R_1 上之最大值為

$$f(2+\sqrt{3}, 4) = 5(2+\sqrt{3}) - 4 \cdot 4 = -6 + 5\sqrt{3}$$

就 R_2 而言, L 最先從 $G(2-\sqrt{3}, 8)$ 進入, 故 $f(x,y)$ 在 R_2 上之最小值為

$$f(2-\sqrt{3}, 8) = 5(2-\sqrt{3}) - 4 \cdot 8 = -22 - 5\sqrt{3}。$$



6. 設 $\frac{1}{p}+\frac{1}{3q}=12$, 其中 p,q 爲正數, 則 $3\log_{1/3}p+\log_{1/3}q$ 的最大值爲 ______ , 此時 $(p,q)=$ ______ 。

解:

已知: $12=\dfrac{1}{3p}+\dfrac{1}{3p}+\dfrac{1}{3p}+\dfrac{1}{3q}$

而有: $3=\dfrac{12}{4}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{3p}+\dfrac{1}{3p}+\dfrac{1}{3p}+\dfrac{1}{3q}\right)\geq\sqrt[4]{\dfrac{1}{3p}\cdot\dfrac{1}{3p}\cdot\dfrac{1}{3p}\cdot\dfrac{1}{3p}}$

$\Rightarrow$ $3^4\geq\dfrac{1}{3^4\cdot p^3\cdot q}$

$\Rightarrow$ $p^3q\geq 3^{-9}$

$\Rightarrow$ $\log_{1/3}p^3q\leq\log_{1/3}3^{-8}$

$\Rightarrow$ $3\log_{1/3}p+\log_{1/3}q\leq 8$

故 $3\log_{1/3}p+\log_{1/3}q$ 的最大值爲8

此時 $\dfrac{1}{3p}=\dfrac{1}{3q}=\dfrac{12}{4}=3,\quad p=q=\dfrac{1}{9}$

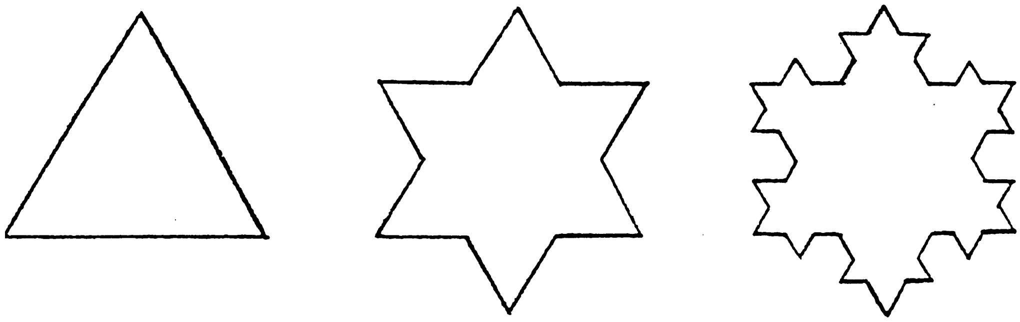
故 $(p,q)=\left(\dfrac{1}{9},\dfrac{1}{9}\right)$。

[**分析**] (1) 先把 $3\log_{1/3}p+\log_{1/3}q$ 化爲 $\log_{1/3}p^3q$, 就知道要先求 p^3q 的最大值了。

(2) p^3q 是由三個 p 和一個 q 乘起來的, 所以就找找看題目的已知中有沒有三個 p 和一個 q 加起來爲定值的。結果找不到。

(3) 但是由 $\frac{1}{p}+\frac{1}{3q}=12$ 找到三個 $\frac{1}{3p}$ 和一個 $\frac{1}{3q}$ 加起來爲定值。利用它, 根據『算幾不等式』就算出 $\frac{1}{p^3q}$ 的最小值, 從它的倒數, 就得 p^3q 的最大值了。

二、設 $T_1,T_2,T_3,\ldots$ 爲一群多邊形, 其作法如下: T_1 爲邊長等於 1 之正三角形; 以 T_n 每一邊中間三分之一的線段爲一邊向外作正三角形, 然後將該三分之一線段抹去所得的多邊形爲 T_{n+1}, $n=1,2,3,\ldots$ (如圖所示)。



T_1 T_2 T_3

令 a_n 表 T_n 的周長, 請計算 T_3 之面積及 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 之值。

解: T_1 之面積 $A=\frac{\sqrt{3}}{4}$

T_2 比 T_1 多了3個小三角形, 每一個的邊長是 T_1 邊長的 $\frac{1}{3}$,

每一個小三角形的面積等於 $\frac{1}{3^2}A$。

T_3 比 T_2 多了12個小三角形, 每一個的邊長是 T_1 邊長的 $\frac{1}{9}$,

每一個小三角形的面積等於 $\frac{1}{81}A$。

T_3 之面積$=A\times(1+\frac{1}{9}\times 3+\frac{1}{81}\times 12)=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{40}{27}=\frac{10\sqrt{3}}{27}$

T_n 的邊長是 T_{n-1} 的邊長的 $\frac{1}{3}$, T_n 的邊數是 T_{n-1} 的邊數的4倍, 故 a_n 是 a_{n-1} 的 $\frac{4}{3}$。

於是 $<a_n>$ 是一個等比數列, 首項爲 3, 公比爲 $\frac{4}{3}$。

而有 $<\frac{1}{a_n}>$ 是一個等比數列, 首項爲 $\frac{1}{3}$, 公比爲 $\frac{3}{4}$。

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}$。

三、試就實數 k 之值的變化, 討論二元二次方程式

$$x^2+y^2+2x+2y+k(x^2-y^2+2x+2y)=0$$

的圖形。

解: 原方程式可化爲 $\Gamma:(k+1)x^2+(1-k)y^2+2(k+1)x+2(k+1)y=0$

(1) 當 $k=0$ 時, $\Gamma:(x+1)^2+(y+1)^2=2$ 表一圓。

(2) 當 $k=1$ 時, $\Gamma:2x^2+4x+4y=0$, 即 $x^2+2x+2y=0$ 表一拋物線。

(3) 當 $k=-1$ 時, $\Gamma:y^2=0$ 表直線, 即 x 軸。

(4) 當 $-1<k<1$, 但 $k\neq 0$ 時, $\Gamma:(k+1)(x+1)^2+(1-k)(y+\frac{k+1}{1-k})^2=(k+1)+\frac{(k+1)^2}{1-k}$, 其中等號左端兩係數是不等兩正數, 而等號右端是一正數。Γ 之圖形爲一橢圓。

(5) 當 $k<-1$ 或 $k>1$ 時, $\Gamma:(k+1)(x+1)^2+(1-k)(y+\frac{k+1}{1-k})^2=(k+1)+\frac{(k+1)^2}{1-k}$ 其中等號左端兩係數一正一負, 而等號右端不等於0。Γ 之圖形爲一雙曲線。

四、考慮函數 $f(x)=\cos 2x+4\sin^2 x-\cos x-2$

1. 解方程式 $f(x)=0$

解: 把 $\cos 2x$ 化爲 $2\cos^2 x-1$ [不要化爲 $\cos^2 x-\sin^2 x$, 也不要化爲 $1-2\sin^2 x$] 把 $\sin^2 x$ 化爲 $1-\cos^2 x$ [這樣一來 $f(x)$ 就可化成單純的 $\cos x$ 的多項式了!]

原方程式變成

$$
\begin{aligned}
&(2\cos^2 x-1)+4(1-\cos^2 x)-\cos x-2=0\\
&-2\cos^2 x-\cos x+1=0\\
&-(2\cos x-1)(\cos x+1)=0\\
&\cos x=\frac{1}{2},-1\\
&x=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}\quad \text{或} \quad (2n+1)\pi, \qquad n\in Z
\end{aligned}
$$

[**注意**] 如果只有答 $x=\pm\frac{\pi}{3}$ 或 π 是不會得滿分的。

[**分析**] 從民國七十三年起, 高中數學教材裡就取消了反三角函數, 連帶也取消了三角方程式, 能夠完整寫出通解的考生恐怕不多。

2. 在 $0\le x\le 2\pi$ 的條件下, 解不等式 $f(x)>0$

解: 承上題, 不等式 $f(x)>0$ 變成

$$-(2\cos x-1)(\cos x+1)>0$$

而有 $(2\cos x-1)(\cos x+1)<0$ [去負號後, 記得要改變不等號的方向]

$-1<\cos x<\frac{1}{2}$ 又知 $0\le x\le 2\pi$

故 $\frac{\pi}{3}<x<\frac{5\pi}{3}$, 但 $x\ne\pi$

也就是說 $\frac{\pi}{3}<x<\pi$ 或 $\pi<x<\frac{5\pi}{3}$。

[**註**] 因爲 $x>-1$, 所以要去掉 $x=\pi$。

—本文作者任教於金甌女中—