哥尼斯堡七橋問題與數學抽象

朱 茉

數學是抽象性極強的一門科學, 並且數學對象的本身也是抽象思維的產物。現代腦科學和思維科學的研究表明: 抽象思維乃是典型的左腦思維, 但在某些特殊情況下, 也需要左右腦思維的相互配合作用。本文擬以哥尼斯堡 (Konigsberg) 七橋問題爲例, 談談數學抽象問題。

一、哥尼斯堡七橋問題

哥尼斯堡七橋問題, 在當時是一個著名的遊戲問題, 後來才逐漸認識到它是一個拓撲問題和圖論問題。

著名數學家歐拉 (I. Euler, 1707-1783) 在1727年時年僅20歲, 應聘到俄國聖彼德堡 (現在改名爲列寧格勒) 科學院從事研究工作。在此期間, 他的德國朋友告訴他一個曾經令許多人感到困惑的問題, 東普魯士故都哥尼斯堡 (konigsberg), 位於普雷格爾 (Pregl) 河的兩條支流之間, 這兩條支流匯合流入波羅的海。河中的島叫克奈芳福 (kneiphof) 島, 這個島上建有大教堂和哲學家康德 (I. Kant) 墓。市內有七座各具特色的大橋, 橫跨普雷格爾河, 其中有六座橋把河岸與河中的克奈芳福島相連接如圖一。當地市民設想能否在一次散步中走過所有的橋, 而且每座橋只過一次, 最後再返回原地。許多人都作過試驗, 但是都未能如願, 後來就提請歐拉來解決這個難題。

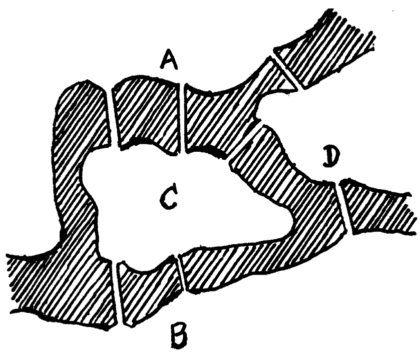


圖 一

1736年, 大數學家歐拉仔細地研究了這個問題。他利用數學抽象法, 將其中的四塊陸地, 即普雷格爾河的兩岸及夾在河中的兩個小島, 抽象爲四個點, 以 A,B,C,D 表示之, 將陸地之間所架之橋, 都抽象爲線。經過這樣抽象之後, 哥尼斯堡七橋, 就變成由點和線所組成的圖形, 即四點七線圖, 如圖二。而所謂七橋問題, 即是從圖二中任一點出發通過每條邊一次而後返回原點之迴路是否存在? 以此爲基礎, 歐拉找到存在這樣一條迴路之充

分而且必要的條件, 並由此而推得哥尼斯堡七橋問題是沒有解的。當時歐拉的研究, 奠定了圖論的基礎, 因此, 歐拉被公認爲圖論之父, 而圖二也被稱爲歐拉圖。

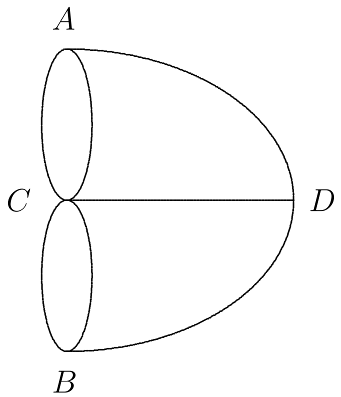


圖 二

那麼歐拉當時是怎樣解決這個問題的呢? 歐拉考慮圖二如果能夠一筆畫成, 則七橋問題即可迎刃而解。於是, 他首先研究能夠一筆畫成的圖形應該具備什麼樣的性質? 爲此歐拉引入兩個關鍵詞偶點和奇點, 把進出的邊之總數是偶數之點, 叫做偶點, 把進出的邊之總數是奇數之點, 叫做奇點。

如果一個圖形能夠一筆畫成, 則該圖一定存在一個始點和一個終點, 而該圖上的其他各個點, 都是過路點。所有過路點, 必定會有一條邊進入該點, 而且又從該點出去, 這樣過路點進出的邊之總數應是偶數, 即所有過路點均爲偶點。

當始點和終點是同一個點時, 則該點爲偶點, 這時圖上一切點均爲偶點。當始點和終點不是同一個點時, 則二者均爲奇點, 這時圖上只有這兩個奇點。因此, 能夠一筆畫成的圖形, 可以分爲兩類: 一是圖中的點全部是偶點; 另一類是圖中的點, 存有兩個奇點。即圖形可以一筆畫成的必要條件是其中奇點的數目是零或二。由於圖二中奇點的數目是四, 不是零或二, 因而圖二不能一筆畫成, 所以哥尼斯堡七橋問題無解。

當然, 還可以證明上述條件也是圖形能夠一筆畫成的充分條件。亦即是, 如果一個圖形[1]存在零個或二個奇點, 則該圖一定能夠一筆畫成。很顯然, 當奇點的個數爲零時, 則存在一條歐拉回路, 這時可以圖中任一點爲始點, 並且以同一點爲終點, 此路稱爲歐拉回路。當奇點的個數爲二時, 則存在一條歐拉路, 這時可以這兩點之一爲始點, 而以另一點爲終點。

國外數學文獻中所說的中國郵遞員問題[2], 也是以歐拉路爲基礎而提出的, 中國數學家管梅谷於1962年發表了關於這個問題的研究結果。關於中國郵遞員問題, 可以敍述爲:

一個郵遞員自郵局取出信件後出發, 若能經過他的轄區內的每一街道僅一次, 則他回到郵局後所走的路線, 就是一條歐拉回路。很顯然, 這是一條最優路線。如果郵遞員轄區的街道, 不可能一次走遍, 要另設計一個方案, 使重覆走過的街道長度爲最小。

現在的哥尼斯堡, 在普雷格爾河上共有九座橋, 如圖三所示。現在的巴黎市區也有一條河, 河內有兩個島, 聯結兩島和對岸的橋, 共有十五條, 如圖四所示, 請讀者使用數學抽象法, 將圖三和圖四抽象爲網絡圖, 並且研究在其中是否存在歐拉路和歐拉迴路。

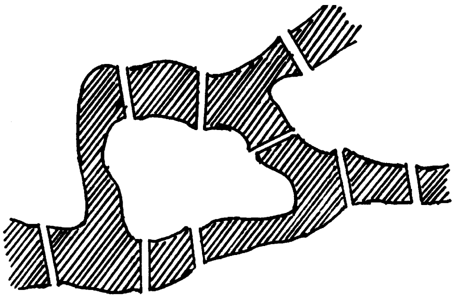


圖 三

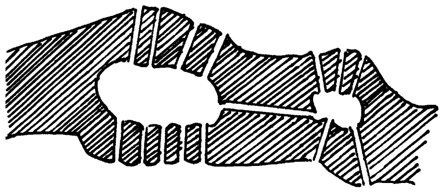


圖 四

對於哥尼斯堡七橋問題的拓撲意義, 也是在日後才發現的。 拓撲學研究的主要內容之一, 是同胚變換下的不變性質。“變”中有“不變”, 乃是數學研究的普通規律。在同胚變換下, 距離和角度要變, 而由圖形所圍成的內部區域的連通性不變。例如, 橡皮筋和橡皮膜的伸縮變形, 就是一種同胚變換。同胚變換是一種連續變形, 在這種變形中, 不斷裂, 不粘貼, 斷裂則破壞連續性, 粘貼則破壞一一對應關係。關於同胚的嚴格數學定義爲:

> 設 A 和 B 是兩個拓撲空間, 如果存在一個映射 f, 構成 A 到 B 的雙射 (bijection), 且 f 和 f^{-1} 都是連續的, 則稱 A 和 B 是同胚的。

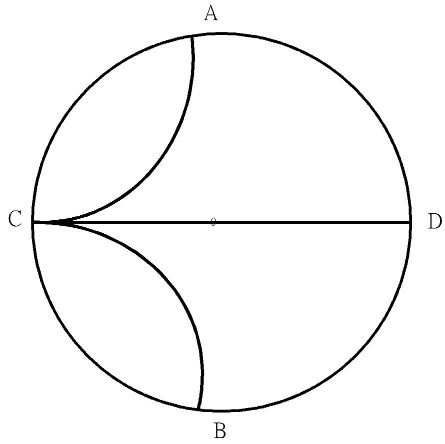


圖 五

對於哥尼斯堡七橋, 也可以抽象爲圖五, 並且圖五與圖二之間是同胚的。亦即圖五與圖二中, 對應線段的長度以及其間的夾角都變了, 但其中點線間的結合關係不變, 也可以說是其中各點的奇偶性不變。

二、數學抽象

隨著電子計算機的出現和不斷改善, 數學應用已逐步深入到經濟、生態、人口、社會等更爲複雜的領域之中。在利用數學方法解決實際問題時, 首先要進行的工作, 是建立數學模型, 而對於實際問題的理論分析乃是在此模型的基礎上進行的。如果所建立的模型本身, 與實際問題相差甚遠, 則在理論分析中無論採用怎樣精巧的數學工具, 也很難求得正確的結果。例如, 圖二和圖五這兩個同胚圖形, 都是哥尼斯堡七橋問題的數學模型, 歐拉利用數學抽象方法, 首先建立了這個數學模型, 這正是他成功地解決哥尼斯堡七橋問題的關鍵。E.A. Berder 提出數學模型乃是“關

於部分現實世界爲一定目的而作的抽象、簡化的數學結構”。其實, 一切數學模型, 都是經過數學抽象之後, 使用數學符號、數學式子、程序、圖形等來刻劃和模擬客觀事物的內在聯繫。下面來進一步談談數學抽象的一些深層次的問題。

“抽象”一詞, 來源於拉丁文“abstvactio”, 原文含有“排除”、“抽出”的意思。當代世界著名數學家菲爾茲 (Fields) 獎獲得者 M.F. 阿提亞 (Atiyah, 1929) 認爲: 要處理複雜性驟增的數學問題, 就必須建立和發展相應的抽象的數學概念。現代數學中三個有代表性的主要領域, 都是處理各自的抽象概念, 如群論中的對稱性, 拓撲學中的定性分類, 概率論中的概率測度等..., 假若沒有抽象概念, 那麼, 現在數學就會被一大堆複雜的數學事件壓得透不過氣來, 並且, 將會分裂成無數互不相結合的特殊情況[3]。我們高興地看到, 現代的數學家之所以能夠著手解決那些他們前輩認爲無望的複雜問題, 就在於他們掌握了有高度概括性的、能作爲數學統一性基礎的科學抽象概念。

數學抽象的主要特性有三, 現分別討論如下:

1.數學中的抽象是從貌似不同的同類事物中抽出共同的東西。

數學的理論和概念都是抽象思維的產物, 而抽象思維則是抽取同類事物中共同的數量關係特徵。古人云:“有所得必有所失”。一般地說, 經過抽象後而獲得的數學概念, 在概念的外延上更寬廣一些, 而在概念的內涵上則要貧乏一些。

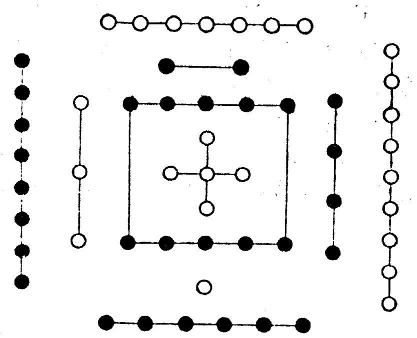


圖 六

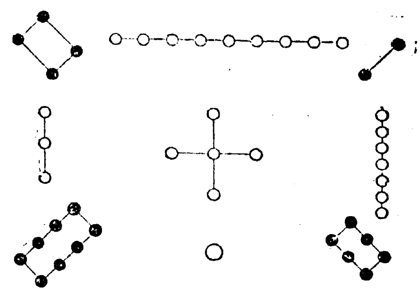


圖 七

河圖和洛書是我國古代巨著《周易》開篇前的兩張圖, (如圖六、圖七[4])。對於洛書而言, 在進行數學抽象時, 如果只抽取其數量結構關係, 而捨棄其符號中圓圈和圓點在內涵上的差異, 對於「線」這種符號, 也只考慮其在該圖中聯絡圓圈、圓點以供計數的作用, 不再作爲一種獨立的符號, 則洛書可以抽象爲一個三階幻方。我國著名數學家陳景潤教授在他的《組合數學》一書中曾這樣寫道:

「楊輝稱這種圖爲縱橫圖, 而且是第一個中國數學家對這方面的深入研究。後來外國人也開始研究楊輝研究過的這一種洛書, 並且把它推廣, 即將 $1, 2, \ldots, n^2$ 個自然數放進由 n^2 個小正方形組成的正方形方陣裡, 要求縱橫及對角線的和都相等, 滿足這些要求的方陣稱爲『n 階縱橫圖』, 國外稱爲『 n 階魔術方陣』或『 n 階幻方』。這樣看來, 洛書就是三階縱橫圖或三階幻方。」[5]

數學中的抽象, 往往是等同性抽象。大數學家歐拉在對哥尼斯堡七橋問題進行數學抽象時, 對於七座橋, 不管其內部結構和外表形象有無差異, 一概抽象爲線; 而對於四塊陸地, 不管它是河岸或是小島, 一概抽象爲點。這種抽象的特點是完全不考慮它的度量性質, 而突出它的組合拓撲性質。同樣德國數學家 G.W. 萊布尼茲 (Leibniz,1646-1716) 在對易圖進行數學抽象時, 也是一概將陰爻「⚋」抽象爲「0」將陽爻「⚊」抽象爲「1」, 這樣以來, G.W.萊布尼茲經過一番抽象思維, 遂即將他所得到的兩張易圖[6] 譯爲0-63的二進制數圖, 圖八爲其中的方圖。並且在1703年發表一篇文章, 題爲《關於僅用 0 與 1 兩個記號的二進制算術的說明, 並附有其效用及關於據此解釋古代中國伏羲圖的探討》[7]。

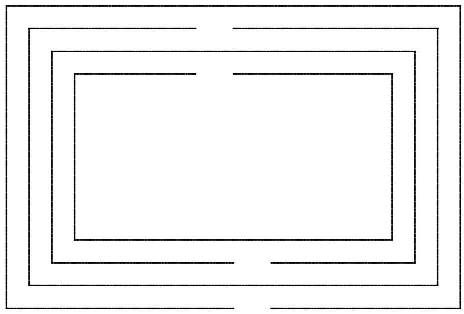
000000 00	000001 01	000010 02	000011 03	000100 04	000101 05	000110 06	000111 07
001000 08	001001 09	001010 10	001011 11	001100 12	001101 13	001110 14	001111 15
010000 16	010001 17	010010 18	010011 19	010100 20	010101 21	010110 22	010111 23
011000 24	011001 25	011010 26	011011 27	011100 28	011101 29	011110 30	011111 31
100000 32	100001 33	100010 34	100011 35	100100 36	100101 37	100110 38	100111 39
101000 40	101001 41	101010 42	101011 43	101100 44	101101 45	101110 46	101111 47
110000 48	110001 49	110010 50	110011 51	110100 52	110101 53	110110 54	110111 55
111000 56	111001 57	111010 58	111011 59	111100 60	111101 61	111110 62	111111 63

圖八

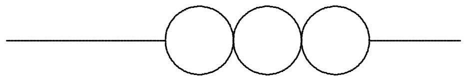
數學家在研究具體問題時, 利用抽象思維方法不僅可簡化問題, 而且有助於迅速抓住問題的實質。法國數學家丟東涅 (J. Dieudonne) 曾指出:「只有抽象和綜合, 才能眞正導致本來就很特殊的情況和經常掩蓋著事物本質的那些現象的消失。只是由於它們, 才能弄淸楚外表完全不同的問題的深刻聯繫, 進而, 弄淸楚整個數學的深刻的統一性[8]。」

2. 數學中的抽象化是逐步發展的

數學抽象思維的發展是具有層次性的, 它是由最低層次逐步向最高層次發展的。隨著數學家們對於數學思維中具體特徵的認識, 又可構成新的抽象的出發點。因之, 數學中的研究對象, 往往是抽象化的抽象化。美國數學家 R. 庫朗曾說:「在數學中,『具體』和『抽象』、『個別』和『一般』種種概念, 並沒有固定不變或者絕對的含意。它們主要依賴於心理狀態、知識水平以及數學材料的性質。例如, 由於很熟悉而已經吸收的東西, 就很容易被看作是具體的。『抽象化』和『一般化』這兩個詞所描述的, 並不是靜止狀態或最終結果, 而是從某個具體層次出發, 並試圖達到『更高級』層次的能動過程[9]。

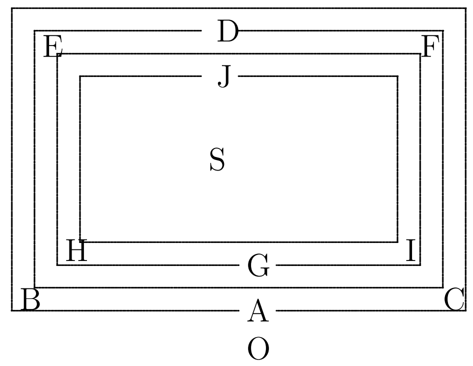


圖九

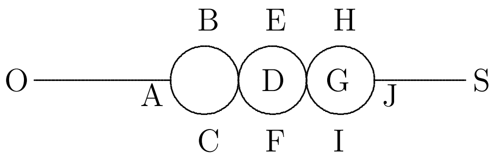


圖十

例如, 圖九是一系列套盒的剖面, 圖十是一段珍珠項鏈的剖面, 很顯然, 這兩個剖面圖, 也是關於客觀事物的一種抽象。為了便於說明事理, 我們不妨將這種抽象, 稱爲第一次抽象。從表面上來看, 這兩個圖 (即圖九和圖十) 並沒有甚麼必然的聯繫, 然而, 我們也可以從這兩個貌似不同的數學對象中, 抽取其共性, 即關於二者的組合性質和拓撲性質。如若僅從通行路線著眼, 則可把圖九視爲迷宮, 其結構關係如圖十一所示。對於該圖可作如下描述:



圖十一



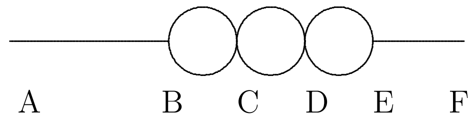
圖十二

從外界 O 進入迷宮之門 A, 然後有兩條通路 B 和 C, 都可通往門 D; 進入 D 門之後, 有兩條通路 E 和 F, 都可通往門 G; 進入門 G 之後又有兩條通路 H 和 I, 都可通往門 J; 進入門 J 之後, 即是最內層的居室 S。

如若將圖十的結構關係表示爲圖十二, 並對圖十二類似地作如下描述: 當我們從左向右旅行時, 從 O 點出發, 行至 A 點, 然後有兩條通道 B 和 C 都可達到 D 點; 行至 D 點, 然後有兩條通道 E 和 F 都可達到 G 點; 行至 G 點, 然後有兩條通道 H 和 I 都可達到 J 點, 而後有唯一的通道可到達 S 點。

假設我們把圖九和圖十稱之爲第一次抽象, 則如圖十一和圖十二所示, 這種抽象即可以稱爲是第二次抽象, 通過這次抽象, 即可把貌似不同的數學對象 (如圖九和圖十) 抽取爲網絡圖。

這種抽象過程, 也可以再進行一個較高的層次, 在上述網路圖中, 用字母表示通道的交點, 用兩個字母來表示兩點間的通道。經過這種抽象而得到的網絡圖, 如圖十三所示。這種網絡關係, 亦可進一步表示爲: AB,1; BC,2; CD,2; EF,1。(字母表示通道的交點, 兩個字母表示兩點間的通道, 其後所附阿拉伯數字, 表示該通道的條數)



圖十三

這種抽象可以相對地稱之爲第三次數學抽象, 經過這種層次的抽象, 即可以將網絡圖抽象爲結點對與結點對間通道的條數。

美國數學家 R. 庫朗就是把「抽象化」和「一般化」這兩個詞相提並論的。其實「一般化」也是一種數學抽象, 而且在這種抽象化過程中, 可

能會捨棄或引進一些結構關係。所謂數學概念的一般化, 即是對概念外延的推廣。以乘法運算而論, 由數字乘法運算, 可以逐步推廣到多項式乘法運算、矩陣乘法運算、矢量乘法運算等。這時已發現矩陣乘法運算無交換律, 矢量叉積運算具有反交換律, 然而, 卻仍然保留著數字乘法運算的許多性質。及至推廣到置換乘法運算, 數字乘法運算的性質所能保留者則更少了, 而其結合律還成立。但是, 如果把數字乘法運算推廣到集合乘法運算, 這時外延得到了擴張, 而其內涵則更加豐富了。例如, 設 A,B,C 都是集, 則有

交換律 $A\cap B=B\cap A$

結合律 $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

分配律 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

德國大數學家 D. 希爾伯特曾經指出:「數學科學是一個不可分割的有機整體, 它的生命力正是在於各個部分之間的聯繫。... 數學理論越是向前發展, 它的結構就變得越是更加調和一致, 並且這門科學一向相互隔絕的分支之間也會顯露出原先意想不到的關係。因此, 隨著數學的發展, 它的有機的特性不會喪失, 只會更清楚的呈現出來[10]。」在數學抽象化過程中, 有時能夠把一些表面上看起來互不相關的概念有機地聯繫起來, 以便引進某種新的結構關係。比如, 在函數概念中引入連續性, 以構成連續函數; 在線性空間中引入拓撲結構, 以構成線性拓撲空間; 在點、線、面等幾何元素之間, 引進各種幾何變換, 可以構成相似變換、仿射變換、射影變換、同胚變換等等。經過這樣的抽象化之後, 所獲得的數學概念, 在概念外延上要窄一些, 而在概念的內涵上則更加豐富多彩[11]。

3. 數學抽象往往是理想化抽象

(1) 數學中的理想化抽象最早始於歐幾里德。

瑞士數學家 I. 歐拉將哥尼斯堡七橋問題, 抽象爲四點七線圖, 如圖二所示, 其中所用的「點」和「線」都是理想化抽象, 也就是說這種「點」即是理想化的「點」, 這種「線」即是理想化的「線」。自然界中的「點」各色各樣, 它們總有一定的大小, 只有理想化的「點」, 才是無有大小可言的, 自然界中的「線」千姿百態, 它們總有一定的寬度, 只有理想化的「直線」, 才是只有長度而沒有寬度的。

在歐幾理得 (Euclid, 約公元前 330 ∼ 公元前 275) 之前, 幾何學家認爲構成平面圖形和立體圖形的基本元素是「磚塊」。歐幾里得在《原本》中, 引入 23 條定義, 5 條公設, 8 條公理

作為展開歐氏幾何的理論基礎, 在這23條定義中的前三條乃是

i) 點是不可分的;

ii) 線是有長無寬的;

iii) 線的界是點。

很顯然, 歐幾里得的這種定義, 乃是對於「點」和「線」的理想化抽象, 因為現實的「點」總是可分的, 而現實的「線」總是有寬度的。同樣, 歐幾里得對於三角形、四邊形、圓等幾何圖形的抽象, 也都是理想化抽象[12]。

(2) 沒有理想化抽象也就沒有整個數學

以球面而論, 它有許多客觀原型, 就這些原型的曲面來說, 都是坎坷不平的。如果幾何學從研究這些坎坷不平的曲面出發, 那麼, 它絕對不可能得到關於球體積和球面積的計算公式。然而, 我們從一個半徑等長、表面光滑的理想化球面而求得的計算公式, 在實際應用中雖然會出現某些誤差, 但其近似結果仍然能夠滿足於實際問題的需要。

理想化抽象也是一種等同性抽象, 同等性即是將所有的球作等同看待, 只有這樣才可以得到關於球的一般化概念, 同樣, 只有將所有三角形都作等同看待, 才可以得到關於三角形的一般化概念。

在幾何學中, 有很多概念都是等同性的理想化概念, 例如點、直線、平面、球、三角形、平行四邊形等, 如果沒有這些等同性的理想化數學抽象, 那麼, 幾何學乃至整個數學就不可能建立並得到發展。關於抽象化的建立和推廣在數學發展中的作用問題, 美國數學家M. 克萊因曾這樣寫道:「自由創造、抽象化和推廣的勢頭, 還是沒有被堵住。數學從自然界和科學中解脫出來, 繼續著它自己的行程[13]。」

(3) 沒有理想化抽象就無法解決數學理論發展中的自身矛盾

一個數學概念被提出之後, 還需要有一個比較長期的過程, 使之不斷純化, 這種純化即是逐步實現理想化抽象。以函數概念而論, 自從1665年以後, 牛頓 (I.Newton, 1642-1727) 一直是用“流量”(Fluent) 一詞來表示變量間的關係; 萊布尼茲 (G.W.Leibniz 1646-1716) 在1673年的一篇手稿中首次提出函數 (function) 概念, 並以此來表示隨著曲線上的點的變動而變動的量。到1714年萊布尼茲在《歷史》一書中, 將“函數”一詞解釋為依賴於一個變量的量。關於函數的表示符號問題, 1717年, 伯努利 (J. Bernoulli, 1667-1748) 使用記號 ϕk 來表示函數, 到1734年, 歐拉 (L.Euler, 1707-1783) 才正式引入函數符號 $f(x)$ [14]。經過多次演變, 直到黎曼 (G.F.B.Riemann, 1826-1866) 時期, 才得到現代通用的函數定義, 即作為一種規律, 根據它可以由自變量的值來確定因變量的值。

基於數學概念在邏輯發展上的需要, 數學家有時也引入一些理想化的數學對象, 例如, 無限小量、無限遠點等。將這些新元素加入於某種數學結構系統之中, 即可使運算和推理在該系統中變得暢通無阻。這種思想方法, 在數學上一般稱之爲擴張。例如, 爲了使加減法通行無阻, 則需要把自然數集擴張爲整數集; 爲了使四則運算通行無阻, 則需要把整數集擴張爲有理數集, 爲了使任意長度都可以用旣定的單位長度來測量, 或者說是爲之使形如 $x^2 = r$ (r 爲正有理數) 的方程都有解, 則需要把有理數域擴張爲實數域; 爲了使任何代數方程都有解, 則需要把實數域擴張爲複數域, 如此等等。

在數學理論發展中, 有些新公理系統或基本法則的引入, 也是來自於數學家的理想化抽象。比如, 物理學家伽利略 (Galileo) 很早就發現: 自然數集和由自然數的一切平方數所構成的集合, 可以建立一一對應關係。而這個現象正好與“部分小於整體”的傳統見解相矛盾, 這乃是著名的伽利略悖論。後來, G.康托 (Contor, 1845-1918) 和 J.W.G. 戴德金 (Dedekind, 1831-1916) 經過理想化抽象引入一個新法則“一一對應法則”, 作爲比較有限集和無限集大小關係的基本法則, 從此, 伽利略悖論即被排除。俄國數學家 H.U. 羅巴切夫斯基 (Lobatchevsky, 1793-1856) 經過理想化抽象, 大膽地引入羅氏平行公理, 從此, 徹底地解決了兩千多年來數學家們所試證的第五公設問題。E. 策墨略 (Zermelo, 1871-1953) 和 A.A. 弗倫克林 (Fraenkel, 1891-1965) 在集合論中, 經過理想化抽象, 引入 ZF 公理系統, 從此初步緩決了多年來一直纏繞於集合論的悖論問題。

然而, 理想化抽象的數學對象, 也並非是隨意地予以取捨, 而是要符合於邏輯的相容性的原則。德國大數學家 D. 希爾伯特 (Hilbert, 1862-1943) 特意把無限稱爲理想元素, 並把以實無限的存在爲前提的命題, 稱之爲理想化命題。他的理由是: 「只有不因之而把矛盾帶入於那原有的較狹窄的領域裡, 通過增加理想元素的擴張, 才是可以允許的[15]。」

三、 在數學教育中講授抽象概念應當注意的幾個問題

1. 講授數學抽象概念要從典型的眞實事物引發

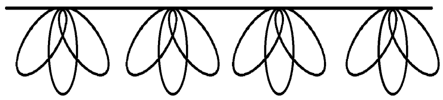
講授或記憶抽象數學概念, 一定要以具體事實爲基礎, 如果是單純地從抽象概念入手, 一直是從概念到概念, 就容易形成空中樓閣。追本求源, 由於數學抽象一般是從數學認

識活動中最初接觸到的表象而開始的, 人們從中發現一些反覆出現的並且預示著某種規律性的東西, 經過深入探討, 才能形成抽象概念。例如, 幾何圖形的表象, 來源於土地測量、傢俱編織和陶器製作等實際活動; 數字的表象, 來源於市場貿易和觀日計時等實際活動。然而, 數學抽象往往在開始時只能抓住一些特殊的表象, 只有經過深化, 才能從特殊中發現一般。正如 F. 克萊因 (Klein) 所說的那樣:「能在絕然不同的問題中洞察到統一的思想, 並有一種集中必要的材料來闡明其統一見解的藝術[16]。」只有這樣數學表象才能轉化爲抽象概念。

在抽象的數學概念中, 有一些是來自於對眞實事物的直接抽象, 而另一些則是來自於對已有概念的抽象分析, 例如, 將自然數列無限制的繼續數下去, 就會出現大得驚人的數字, 這些數的抽象概念與眞實事物的距離就會變得越來越遙遠, 這些抽象概念乃是理性思維的產物, 亦即是「思維的自由創造物和想像物」, 對於這種想像物, 在數學中又稱之爲理想元素。

數學中的抽象概念–虛數, 也是一種想像物。大數學家 L. 歐拉 (Euler, 1707-1783) 曾經說過:「因爲所有可以想像的數或者比 0 大, 或者比 0 小, 或者等於 0。很顯然, 負數的平方根決不會包含在可能的數中, 因而, 我們必須說它們是不可能的數。在這種情況下, 使我們得到一種數的概念, 就其本性來說是不可能的, 通常叫做虛數或想像中的數, 因爲它們只存在於想像之中。」只有承認虛數的合理性, 在數學教學中, 我們才能順利地理解和證明「代數基本定理[17]」

在數學教學中, 把直線說成可以向兩側無限延伸, 這也是一種理性思維的抽象, 因爲在現實世界中, 怎麼也找不到這種無限直線的原型。對於直線上的無窮遠點, 數學家也認爲是一種想像物, 並稱之爲理想元素。如果沒有像詩人那樣豐富的想像力, 我們怎麼能在數學教學中, 把直線看成是一種封閉圖形, 把直線上的無窮遠點看成是無窮多條與已知直線相平行的直線的交點, 並且進一步把一個平面上的所有無窮遠點所構成的直線看成是無窮遠直線呢? 匈牙利著名數學家路茨・波得在他的名著《無窮的玩藝》中, 對於這種理想元素的誘人魅力描寫得淋漓盡致、娓娓動聽。他寫道:「直線是向兩側無限延伸的, 由於我們在每條直線上只加了一個無窮遠點, (不然的話, 就會破壞點與直線間的對偶關係), 直線的兩端就會在無窮遠處相遇, 即將變成某種形式的圓。所有這些直線都將懸掛在無窮遠直線的各個點上, 而且是互相平行的直線都懸掛在同一個點, 它們排列得就像果樹上的一串串果實一樣, 如圖十四。我們本來是不應該把圖十四中的無窮遠直線畫得如此平直的。實際上, 誰也不知道這種直線究竟應當怎樣去畫。因爲它一個點代表著正東和正西, 而另一個點卻代表著正南和正北, 等等。還是讓我們完全放棄這件事情吧! 因爲它確實不屬於可以理解的世界。」無窮遠點和無窮遠直線都是理想元素, 我們在數學教學中, 只有以眞實事物爲嚮導而引進它們, 而後再給以繪聲繪色的描寫, 才能夠保證「對偶原理」在射影幾何中的有效性。



圖十四

隨著數學理論本身的飛速發展, 它自身不斷地和積極主動地向更高層次作抽象, 數學家們也在自覺地, 運用自如地發揮著數學的抽象性特點, 致使理想元素在數學中佔據著越來越重要的位置。數學家M. 克萊因曾經說過「1700年以後 , 越來越多的、更遠離自然界的、從人的腦子中源源不斷地湧出的概念, 進入了數學。」這些由理想化抽象而獲得的概念, 逐漸地居於數學理論體系的主導地位。因此, 我們在數學教學中, 應該循循善誘, 注意啓發和培養學生的抽象思維能力, 給學生的思維插上想像的翅膀, 讓其振翅高飛!

2. 講授數學抽象概念要重視概念之間的內在聯繫

數學抽象概念在不同的體系中可能會出現相同或相近的名稱, 例如歐氏幾何中空間和線性空間、初等代數與抽象代數中的「域上的代數」, 這些「空間」和「代數」在含義上是有較大差異的。如果不注意它們之間的聯繫, 學生在掌握和理解這些概念時, 就會受到干擾。對於克服先前實例的干擾, 在心理學上稱之爲「負遷移」。

對於一個新出現的數學抽象概念, 在講授時一定要重視它與已有數學理論的邏輯聯繫, 德國數學家 D. 希爾伯特 (Hilbert, 1862-1943) 曾經對此作過一個生動風趣的比喻:「一個新的問題, 特別是當它來源於外部經驗世界時, 很像一株幼嫩的新枝, 只要我們小心地、按照嚴格的園藝學規則將它移植到已有數學成就粗實的老幹上去, 就會茁壯成長, 開花結果。[18]」

由於數學抽象概念之間的相互聯繫, 必然會導致數學中不同分支和不同領域的相互結合與滲透。這也就是數學理論的統一性。這一點在講授數學抽象概念時, 是應該給以足夠重視的。現代數學呈現出高度的抽象和統一, 由於不同分支和不同領域中相互滲透, 使得現代數學徹底改變了代數、幾何、分析三足鼎立的局面。所謂抽象和統一, 就是把不同對象中共同的東西抽象出來, 作爲高一層次的數學對象, 加以研究, 從而把原來許多不同的對象分支統一起來, 以求得共同的規律。抽象和統一是一個問題的兩個方面, 爲了統一, 必須抽象, 有了抽象就能統一。例如, 集合概念就是對數學中所研究的各種對象的統一, 而一般集合理論又成爲現代數學的研究對象。

3. 講授數學抽象概念不可超越青年學子抽象思維的接受能力

使學生在很低的抽象思維能力基礎上, 去接受較高層次的抽象理論, 這就是「揠苗助長」。例如, 有的小學教師只注意到集合的純數量特徵, 把一些在物質性質上風馬牛不相及的東西, 硬湊成集合, 如{氣球、馬車、跳繩}、{太陽,23, 滑鐵盧戰役}等, 這種教學不僅有損於兒童抽象思維的訓練, 而且在成年人眼裡也帶有某種超現實主義的味道[19]

本世紀六十年代, 在西歐、北美和日本曾經出現過中學數學現代化的熱潮, 這個熱潮被稱之爲「新數學」運動。這個運動的倡導者受到法國布爾巴基 (Bourbaki) 學派的影響, 把布爾巴基學派的基本觀點機械地搬用到數學教育中來, 認爲學習中學數學也應該是從最抽象、最基本的概念和理論開始, 他們所編寫的教材, 過於形式化和抽象化, 超越了中學學生的接受能力, 從而遭到學生家長和教師的非難。

法國數學家 R. 托姆 (Thom) 曾經激烈地批評過這個「新數學」運動取消歐幾里得幾何體系的做法, 他認爲幾何思維是由日常思維過渡到形式抽象思維所必不可少的程序, 他還認爲: 集合論方面的練習題, 過於抽象, 作多了會損害孩子們的智力平衡[20]。其實,「新數學」運動的失誤, 主要在於違背抽象思維發展的規律, 未能認識到培養青年學子的抽象思維能力是一個艱巨的歷史過程, 妄圖造就一個沒有相應思想基礎的精神實體, 硬塞進學生腦子裡去, 這樣將會畫虎不成反類犬!

注釋

1. 這裡所說的圖形, 是指網絡圖。它的定義爲: 一個圖是由有限、非零條邊組成, 其中除頂點而外, 任何兩條邊都不相交。
2. J.A.Bond, U.S.R Murty Graph theory with Applications. Macmillau Press LTD, 1976, p.62
3. M.F.Atigah, Wanclel und Fortschritt in der Mathemalik, Michael Atiyah Collected works, Vo1.1. p.209。
4. 如果把圓圈之數表示爲奇數, 把圓點之數表示爲偶數, 而「線」不作爲獨立符號, 只起聯結圓點或圓圈以計數之作用。經過如此的數學抽象, 即可將河圖抽象爲天地生成數圖而將洛書抽象爲九宮數圖。歷史事實是這樣的:《易傳・系辭》中有云:「河出圖、洛出書、聖人則之。」這才是河圖、洛書兩個詞匯的出處。東漢末年鄭玄對《系辭》中的一句話加以發揮, 從而繪出天地生成數圖, 繼而, 鄭玄又對《易緯·乾鑿度》中的一句話加以發揮, 從而繪出九宮數圖。及至北宋時, 即開始以鄭玄所繪的天地生成數圖和九宮數圖來解釋河圖與洛書。當時有兩種解釋, 而傳於後世者, 則是阮逸在《易傳》中以天地生成數圖作爲河圖, 以九宮數圖作爲洛書。

	(南) 七、 二	
(東) 八、三	五、十	四、九 (西)
	一、 六 (北)	

天地生成數圖

四	九	二
三	五	七
八	一	六

九宮數圖

5. 陳景潤著《組合數學》, 河南教育出版社出版, 1985, p.4。
6. 德國大數學家 G.W. 萊布尼茲於1701年, 從法國傳教士 J·鮑威特 (Bouvet, 1656-1730) 那裡得到中國古代的易圖。當時他所得到的易圖, 是六十四卦圖, 這種卦圖可能是後漢時期魏伯陽的著作, 後經宋代大文豪朱熹重印而推薦的。
7. 近年來, 德國一些學者經過科學抽象, 又發現易圖中的六十四卦與分子遺傳學中的三聯遺

傳密碼十分相似。他們目前正在進一步研究六十四卦是否是對於人類遺傳密碼的一種破譯。如果是的話, 那又將會把生物遺傳學推向一個新的階段。

8. 《數學史譯文集》,　上海科技出版社出版, p.128。
9. 《數學史譯文集續集》, 上海科技出版社出版, p.84。
10. C. 瑞德 (Reid) 著《希爾伯特》, 上海科技出版社出版, 1982, p.97。
11. 對於這種數學抽象, 有人稱之爲強抽象, 這是因爲它會把概念的內涵變得更加豐富多彩。相反地, 在另外一些情況下, 經過數學抽象, 往往要捨棄一些性質, 使得概念的內涵變得更加貧乏, 更加軟弱。對於該種數學抽象, 有人相對地稱之爲弱抽象。
12. 對於數學的理想化抽象, 在歐幾里得之前, 已有學者予以研究。如柏拉圖 (Ploto, 公元前427 - 公元前347) 在《共和國》中就曾提出:「厭棄在辯論中引入可見的和可捉摸的現象」。
13. M. 克萊因著《古今數學思想》第4冊, 上海科技出版社出版, 1984, p.114。
14. 書名同 [13]第二冊, p.46。
15. 王憲均著《數理邏輯引論》, 北京大學出版社出版, 1982, p.325。
16. 書名同 [10] p.61。
17. 該定理在1799年, 由德國數學家 K.F. 高斯 (Gauss, 1777-1855) 所證明。
18. 書名同 [10] p.97。
19. 魯道夫 · 阿思海姆著《視覺思維》, 光明日報社出版, 1986年, p.312-313。
20. R. 托姆:《「新數學」是教育和哲學上的錯誤嗎?》,《數學譯林》, 1980年, 第2期。

—本文作者任教於阜陽師範學院—