n 個正數的算術平均與幾何平均的插值問題

宋秉信

提要: 兩個正數的幾何平均與算術平均之間可以插入這兩個正數的對數平均的問題在文(1)、(2)、(3) 中已作詳細的研究工作。本文的目的在於以此爲基礎進一步論述對於 n 個正數的 算術平均與幾何平均的插值問題。

引理一: 設 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 連續, 在 (a,b) 內存在兩階導數, 且 $f''(x)>0$, 則

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

當 $f(x)$ 爲線性函數時等號成立。

證明: 令

$$\begin{aligned} F(t) = &\quad \textstyle\int_a^t f(x)dx-(t-a)f(\frac{a+t}{2}),\\ G(t) = &\quad \textstyle\int_a^t f(x)dx-(t-a)\frac{f(a)+f(t)}{2}。\end{aligned}$$

其中 $t \in [a,b]$ 。

由拉格朗日中值定理, 得

$$\begin{aligned} F'(t) &= f(t)-f(\frac{a+t}{2})-(t-a)\frac{1}{2}f'(\frac{a+t}{2})\\ &= \frac{t-a}{2}f'(\frac{a+t}{2}+\alpha_1\frac{t-a}{2})-\frac{t-a}{2}f'(\frac{a+t}{2})\\ &= \frac{t-a}{2}\alpha_1\frac{t-a}{2}f''(\frac{a+t}{2}+\alpha_1\alpha_2\frac{t-a}{2})\\ &= \alpha_1(\frac{t-a}{2})^2f''(\frac{a+t}{2}+\alpha_1\alpha_2\frac{t-a}{2})。\\ G'(t) &= -\frac{1-\beta_1}{2}(t-a)^2f''(t+\beta_2(\beta_1-1)(t-a))。\end{aligned}$$

其中 $\alpha_i \in (0,1)$, $\beta_i \in (0,1)$, $i=1,2$ 。

當 $f''(x)>0$ 時, 有 $F'(t)>0,\ G'(t)>0$, 易知 $F(x)$ 爲 $[a,b]$ 內的單調遞增函數, 故有

$$F(b)\geq F(a)。\quad 即\quad \int_a^b f(x)dx-(b-a)f(\frac{a+b}{2})\geq 0。$$

同理可知, 由 $G'(t)<0$ 知 $G(t)$ 在 $[a,b]$ 內爲單調遞減函數, 故有

$$G(b)\leq G(a)。\quad 即\quad \int_a^t f(x)dx-(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}\leq 0。$$

綜合上述兩式, 可得

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)dx}{b-a}\leq \frac{f(a)+f(b)}{2}。$$

若設 $f(x)=e^x$, 則 $f''(x)=e^x>0$, $x\in(-\infty,\infty)$ 。那麼對於任何 a,b , 有

$$e^{\frac{a+b}{2}}\leq \frac{\int_a^b e^x dx}{b-a}\leq \frac{e^a+e^b}{2}。$$

即 $e^{\frac{a+b}{2}}\leq \dfrac{e^b-e^a}{b-a}\leq \dfrac{e^a+e^b}{2}$。

令 $e^b=x$, $e^a=y$, 則有

$$\sqrt{xy}\leq \frac{x-y}{\ln x-\ln y}\leq \frac{x+y}{2}。$$

記 $L(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x-y}{\ln x-\ln y} & (\ x\neq y\ \ 時)\\ x & (\ x=y\ \ 時)\end{cases}$, 我們稱 $L(x,y)$ 爲對數平均。從而有

$$\sqrt{xy}\leq L(x,y)\leq \frac{x+y}{2} \tag{1}$$

不等式 (1) 說明在兩個正數的幾何平均與算術平均之間可以插入其對數平均。我們在此基礎上進一步研究 n 個正數的對數平均對幾何平均與算術平均的插入問題。

引理二: 設 $a_i\,(i=1,2,3,\ldots n)$ 爲 n 個互不相同的正數, 令

$$A=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1}\end{vmatrix}\qquad A_i=\begin{vmatrix}1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1\\ a_1 & \cdots & a_{i-1} & a_{i+1} & \cdots & a_n\\ a_1^2 & \cdots & a_{i-1}^2 & a_{i+1}^2 & \cdots & a_n^2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_1^{n-2} & \cdots & a_{i-1}^{n-2} & a_{n+1}^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2}\end{vmatrix}$$

則

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(x+a_i)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}A_i}{A(x+a_i)} \tag{2}$$

證明: 設

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(x+a_i)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{(x+a_i)} \tag{3}$$

則 $\sum_{i=1}^{n} b_i(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_{i-1})(x+a_{i+1})\cdots(x+a_n) = 1$ 。
若令 $a_i = -x$, 則

$$b_i(a_1-a_i)(a_2-a_i)\cdots(a_{i-1}-a_i)(a_{i+1}-a_i)\cdots(a_n-a_i) = 1。$$

所以有

$$\begin{aligned} b_i &= \frac{1}{[(a_1-a_i)(a_2-a_i)\cdots(a_{i-1}-a_i)(a_{i+1}-a_i)\cdots(a_n-a_i)]} \\ &= \frac{1}{(-1)^{i-1}\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}(a_j-a_i)} = (-1)^{i-1}\frac{\prod\limits_{\substack{0\le k<j\le n \\ 1<i\neq k}}^{n}(a_j-a_k)}{\prod\limits_{1\le k<j\le n}^{n}(a_j-a_k)}。\end{aligned}$$

因 A 與 A_i 均為範德蒙行列式, 所以有

$$A = \prod_{1\le k<j\le n}^{n}(a_j-a_k),\ \ A_i = \prod_{\substack{1\le k<j\le n \\ 1<k\neq i}}^{n}(a_j-a_k)$$

從而有 $b_i = (-1)^{n-1}\frac{A_i}{A}$, 將 b_i 代入 (3) 即可得到引理的結論。

n 個互不相同的正數 $a_1, a_2, \ldots a_n$ 的對數平均定義為:

$$L(a_1, a_2, \ldots a_n) = \left(\frac{A}{(n-1)\sum_{i=1}^{n}(-1)^i A_i \ln a_i}\right)^{\frac{1}{n-1}} \tag{4}$$

引理三: 設 $a_i\,(i=1,2,\ldots n)$ 為 n 個互不相等的正數, 則

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\prod_{i=1}^{n}(x+a_i)} = \frac{1}{n-1}\left[L(a_1, a_2, \ldots a_n)^{(1-n)}\right] \tag{5}$$

證明: 由引理二可知

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{dx}{\prod\limits_{i=1}^n (x+a_i)} &= \int_0^\infty \sum \frac{(-1)^{i-1}A_i}{A(x+a_i)}\ dx \\
&= \frac{1}{A}\left[\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1}A_i \ln(x+a_i)\right]\Bigg|_0^\infty \\
&= \frac{1}{A}\ln \prod_{i=1}^n (x+a_i)\cdot(-1)^{i-1}\cdot A_i\Bigg|_0^\infty \\
&= -\frac{1}{A}\ln\left(\prod_{i=1}^n a_i(-1)^{i-1}A_i\right) \\
&= \frac{1}{A}\sum_{i=1}^n (-1)^i A_i \ln\ a_i \\
&= \frac{1}{n-1}[L(a_1,a_2,\ldots a_n)]^{-(n-1)}。
\end{aligned}$$

引理四: 設 x_i , y_i , $(i=1,2,\ldots n)$ 爲任意的正數, 則

$$\left[\prod_{i=1}^n (x_i+y_i)\right]^{\frac{1}{n}} \geq \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{i=1}^n y_i\right)^{\frac{1}{n}}。$$

當且僅當 $x_i = ky_i$ 時等式成立。

定理: n 個互不相同的正數的幾何平均與算術平均之間可以插入其對數平均。其插值爲

$$\left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^{\frac{1}{n}} < L(a_1,a_2,\ldots a_n) < \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i \tag{6}$$

證明: 由引理三知(或(4))

$$L(a_1,a_2,\ldots a_n) = \left(\frac{A}{(n-1)\sum\limits_{i=1}^n (-1)^i A_i \ln\ a_i}\right)^{\frac{1}{n-1}} = \left[(n-1)\int_0^\infty \frac{dx}{\prod\limits_{i=1}^n (x+a_i)}\right]^{-\frac{1}{n-1}}$$

又由引理四知,

$$\left[\prod_{i=1}^n (x+a_i)\right]^{\frac{1}{n}} > x + (\prod_{i=1}^n a_i)^{\frac{1}{n}}。$$

因爲 x 爲正數, $a_i\,(i=1,2,\ldots n)$ 爲互不相等的正數, 所以有

$$\prod_{i=1}^n (x+a_i) > [x+(\prod_{i=1}^n a_i)^{\frac{1}{n}}]^n。\text{即}\quad \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^n (x+a_i)} < \frac{1}{\left[x+(\prod\limits_{i=1}^n a_i)^{\frac{1}{n}}\right]^n}。$$

$$所以\int_0^\infty \frac{dx}{\prod\limits_{i=1}^{n}(x+a_i)} < \int_0^\infty \frac{dx}{\left[x+(\prod\limits_{i=1}^{n} a_i)^{\frac{1}{n}}\right]^n}$$

由於 $$\int_0^\infty \frac{dx}{\left[x+(\prod\limits_{i=1}^{n} a_i)^{\frac{1}{n}}\right]^n} = \left[\frac{1}{(n-1)\left[x+(\prod\limits_{i=1}^{n} a_i)^{\frac{1}{n}}\right]^{(n-1)}}\right]\Bigg|_0^\infty = \frac{1}{(n-1)(\prod\limits_{i=1}^{n} a_i)^{\frac{n-1}{n}}}。$$

$$即 \quad \int_0^\infty \frac{dx}{\prod\limits_{i=1}^{n}(x+a_i)} < \frac{1}{(n-1)(\prod\limits_{i=1}^{n} a_i)^{\frac{n-1}{n}}}。$$

$$所以\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}} < \left[(n-1)\int_0^\infty \frac{dx}{\prod\limits_{i=1}^{n}(x+a_i)}\right]^{-\frac{1}{n-1}} = L(a_1, a_2, \ldots a_n)。$$

$$所以\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}} < L(a_1, a_2, \ldots a_n) \tag{7}$$

$$又因\left[\prod_{i=1}^{n}(x+a_i)\right]^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x+a_i) = x + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i。$$

$$所以\prod_{i=1}^{n}(x+a_i) < \left[x+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right]^n。\quad 即 \quad \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n}(x+a_i)} > \frac{1}{\left[x+\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right]^n}。$$

對 x 從 0 至 ∞ 進行積分, 得

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{dx}{\prod\limits_{i=1}^{n}(x+a_i)} &> \int_0^\infty \frac{dx}{\left[x+\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right]^n} = -\frac{1}{(n-1)\left[x+\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right]^{n-1}}\Bigg|_0^\infty \\ &= \frac{1}{(n-1)(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i)^{n-1}}。\end{aligned}$$

$$即 \quad \left[(n-1)\int_0^\infty \frac{dx}{\prod\limits_{i=1}^{n}(x+a_i)}\right]^{-\frac{1}{n-1}} < \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \tag{8}$$

由 (7) 和 (8), 即可得到 (6), 定理證畢。

顯然, 當 $n=2$ 時, $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1$, 所以 $A_1 = A_2 = 1$ 。則

$$L(a_1, a_2) = \frac{a_2 - a_1}{\ln a_2 - \ln a_1},$$

即爲奧斯塔 (Ostle), 泰魏立杰 (Terwilliger) 和米卻列諾維奇 (Nlitrinovie) 分別於1957年、1970年提出的不等式:

$\sqrt{a_1a_2} \le L(a_1, a_2) \le \dfrac{a_1+a_2}{2}$, 當 $a_1 = a_2$ 時取等號。由此可見, 定理更爲一般的形式。

参考文獻

1. 楊鎭杭: "凸函數的又一性質", 數學通報 (84) 第二期, p.31。
2. 蘇化明: "關於兩個估計問題的討論", 數學通報 (83) 第十二期, p.26。
3. 王興華: "求積公式與分析不等式 – 關於對數平均對冪平均的分隔", 杭州大學學報 (82)。

—本文作者任教於湖南省湘潭教育學院—