輾轉相除法、黃金分割與費氏數列(上)

蔡聰明

考慮兩個自然數 51 與 30, 求它們的最大公約數 (又叫最大公因數, g.c.d., h.c.f.) 有種種辦法:

(i) 求公因數法

$$\begin{array}{r|ccc} 3 & 51 & , & 30 \\ \hline & 17 & , & 10 \end{array}$$

(ii) 因數分解法

$$\begin{aligned} 51 &= 3\times 17 \\ 30 &= 2\times 3\times 5 \end{aligned}$$

(iii) 輾轉相除法

$$\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 51 & 30 & 1 \\ & 30 & 21 & \\ \cline{2-3} 2 & 21 & 9 & 3 \\ & 18 & 9 & \\ \cline{2-3} & 3 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} 51 &= 1\times 30+21 \\ 30 &= 1\times 21+9 \\ 21 &= 2\times 9+3 \\ 9 &= 3\times 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{51,30\} \to & \ \{21,30\} \to \{21,9\} \\ \to & \ \{3,9\} \to \{3,0\} \end{aligned}$$

因此 51 與 30 的最大公約數是 3, 記成$\gcd(51,30)=3$或$G(51,30)=3$。如果是利用輾轉相除法, 我們還知道恰好經過4步求得最大公約數, 這個步數記成 $E(51,30)=4$。

在上述方法中, 一般而言, 最常用的是輾轉相除法 (又叫做歐氏算則, Euclidean Algorithm)。由此引出了兩個兩變數函數

$$\begin{aligned} G &: \mathcal{N}\times\mathcal{N}\to\mathcal{N} \\ E &: \mathcal{N}\times\mathcal{N}\to\mathcal{N} \end{aligned}$$

其中 $\mathcal{N}$ 表自然數集, $G(m,n)$ 表 m,n 的最大公約數, $E(m,n)$ 即如前所定義之步數。

本文我們要來探討這兩個函數及其所衍生的一些有趣的性質, 尤其是歐氏對局 (Euclidean game)。我們發現這兩個函數居然跟黃金分割與費氏數列 (Fibonacci sequence) 具有密切的關係, 這是非常美妙而令

人驚奇的事, 值得介紹給大家。我們特別要著重在展示探索與發現的歷程。在數學中, 往往由一個簡單的事物切入, 就可以尋幽探徑, 走出一條通向眞理與美的道路, 這是數學的魅力所在。

輾轉相除法是如何起源的? 我們先回顧一點兒數學史, 以鑑往知來。

一、畢氏音律與逐步相減法

畢氏 (Pythagoras) 爲了探求音律, 利用單弦琴 (monochord) 作實驗, 發現當兩個音的弦長爲簡單整數比時, 是諧和悅耳的 (參見 [1])。例如, $2:1$, $3:2$, $4:3$, $5:4$ 分別是八度、五度、四度及三度音程。

這些弦長之比是如何求得的呢?

畢氏利用逐步相減法 (the successive subtraction) 求得了這些比: 考慮 a, b 兩弦, 不妨設 $a>b$,

(i) 從較大的 a 減去較小的 b, 得 $a-b$; 若 $a-b$ 仍大於 b, 再減去 b 得 $a-2b; \cdots$ 直到 $a-k_1b\le b$, 其中 $k_1\in\mathcal{N}$。

(ii) 仿 (i) 之法, 從較大的 b 減去較小的 $a-k_1b, \cdots$, 直到 $b-k_2(a-k_1b)\le a-k_1b$。

(iii) 按上述要領反覆做下去, 畢氏相信經有限步的輾轉相減後必可到達 0, 計算就結束。

在 0 之前最後一個不爲零的數, 記爲 d, 則存在兩個自然數 m 與 n 使得

$$a=md,\quad b=nd \tag{1}$$

並且 d 是滿足 (1) 式的最長弦段, 叫做 a 與 b 的最大共度單位, 此時我們也說 a 與 b 是可共度的 (commensurable)。從而得到

$$a:b=m:n$$

爲整數比。我們不妨將上述的演算叫做輾轉相減法。

當 a,b 是兩個自然數的情形, 上述輾轉相減法求得的最大共度單位 d 就是 a 與 b 的最大公約數。例如, 對 108 與 72 施行輾轉相減法的結果是

$$\{108,72\}\to\{36,72\}\to\{36,36\}\to\{0,36\}$$

因此經過3步的演算求得 108 與 72 的最大公約數是 36。我們記 $P(108,72)=3$, 表示演算的步數。

一般而言, 任意給兩個自然數 m 與 n, 按畢氏輾轉相減法求最大公約數, 都可求得其演算步數 $P(m,n)$。從而定義出步數函數

$$P:\mathcal{N}\times\mathcal{N}\to\mathcal{N}$$

如果將畢氏的輾轉相減法作精簡, 步步採用扣盡的方式就得到歐氏的輾轉相除法。因此, 輾轉相除法的步數小於等於輾轉相減法的步數, 即

$$E(m,n)\le P(m,n),\ \forall(m,n)\in\mathcal{N}\times\mathcal{N} \tag{2}$$

二、輾轉相除法的步數函數

我們已經定義了 G, E, P 三個兩變數函數。面對一個函數, 我們自然要問: 它具有什麼性質? 最好的情況是由一些性質就能夠

求出函數的明白表達式, 當然這往往辦不到。即使如此, 我們還是可對函數作一些有趣的研究。

我們最感興趣的是 E 函數。顯然, 它具有下列三個性質: 對於任意 $(m,n) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N}$,

(i) $E(m,n) \geq 1$, 但是沒有上界;
(ii) $E(m,n) = E(n,m)$, (對稱性);
(iii) 若 m 可整除 n或n 可整除 m, 則 $E(m,n) = 1$。

進一步, 我們列出 E 函數的圖表, 作觀察以找尋出較深刻的性質或規律:

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
15	1	2	1	3	1	2	2	3	3	2	4	2	3	2	1
14	1	1	3	2	3	2	1	3	4	3	4	2	2	1	2
13	1	2	2	2	4	2	3	5	3	3	3	2	1	2	3
12	1	1	1	1	3	1	4	2	2	2	2	1	2	2	2
11	1	2	3	3	2	3	4	4	3	2	1	2	3	4	4
10	1	1	2	2	1	3	3	2	2	1	2	2	3	3	2
9	1	2	1	2	3	2	3	2	1	2	3	2	3	4	3
8	1	1	3	1	4	2	2	1	2	2	4	2	5	3	3
7	1	2	2	3	3	2	1	2	3	3	4	4	3	1	2
6	1	1	1	2	2	1	2	2	2	3	3	1	2	2	2
5	1	2	3	2	1	2	3	4	3	1	2	3	4	3	1
4	1	1	2	1	2	2	3	1	2	2	3	1	2	2	3
3	1	2	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1
2	1	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

表1: E 函數的數值表

我們發現: 對於固定的 n (或 m), 偏函數 (partial function)

$$E(\cdot,n) : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$$
$$(\text{或} \quad E(m,\cdot) : \mathcal{N} \to \mathcal{N})$$

從對角線之元素開始為一個周期函數, 周期為 n (或 m)。

對於指定的步數 $k = 1,2,3,\ldots$, 我們要問: 什麼樣的自然數 m 與 n 可使 $E(m,n) = k$?

顯然, 對於固定的 k, 這有無窮多組解答; 而且並不是一味地讓 m 或 n 變大就可讓 $E(m,n)$ 變大。例如

$E(13,8)=E(1653,164)=5$。由表1我們看出, 要讓 $E(m,n)$ 逐步增大可以這樣思考: 對於固定的 n, 考慮橫列 $\{E(m,n): m\in\mathcal{N}\}$。基本上這是一個周期數列, 故有最大項。我們求 $E(m,n)$ 之最大值, 但是 m 取最小值, 結果如下:

當 $n=1$ 時, $E(\cdot,1)$ 的最大值爲
$E(1,1)=1$, 此時 $m=1$;
當 $n=2$ 時, $E(\cdot,2)$ 的最大值爲
$E(3,2)=2$, 此時 $m=3$;
當 $n=3$ 時, $E(\cdot,3)$ 的最大值爲
$E(5,3)=3$, 此時 $m=5$;
當 $n=4$ 時, $E(\cdot,4)$ 的最大值爲
$E(7,4)=3$, 沒有增大;
當 $n=5$ 時, $E(\cdot,5)$ 的最大值爲
$E(8,5)=4$, 此時 $m=8$;
當 $n=6$ 或 7 時, $E(\cdot,6)$ 與 $E(\cdot,7)$ 的最大值分別爲 3 與 4, 都沒有增大;
當 $n=8$ 時, $E(\cdot,8)$ 的最大值爲
$E(13,8)=5$, 此時 $m=13$;
.... 等等。

因此, 我們得到

$$E(1,1)=1,\quad E(3,2)=2,\quad E(5,3)=3,$$
$$E(8,5)=4,\quad E(13,8)=5,\quad \ldots \tag{3}$$

其中赫然出現的數列

$$\begin{array}{cccccccc} 1, & 1, & 2, & 3, & 5, & 8, & 13, & \ldots \\ \| & \| & \| & \| & \| & \| & \| & \\ F_1, & F_2, & F_3, & F_4, & F_5, & F_6, & F_7, & \ldots \end{array}$$

恰好是頂頂著名的費氏數列, 這實在很奇妙。

費氏數列是由 1,1 出發, 接著是後項等於前兩項相加, 如此所構成的, 即

$$F_1=1,\quad F_2=1,\quad F_{n+2}=F_{n+1}+F_n,$$
$$n=1,2,3,\ldots \tag{4}$$

由 (3) 式我們可以猜測到: 對於任意自然數 n,

$$E(F_{n+2},F_{n+1})=n \tag{5}$$

事實上, 這可用輾轉相除法加以證明:

$$\begin{aligned} F_{n+2} &= 1\cdot F_{n+1}+F_n \\ F_{n+1} &= 1\cdot F_n+F_{n-1} \\ &\vdots \\ F_4 &= 1\cdot F_3+F_2 \\ F_3 &= 2\cdot F_2 \end{aligned}$$

一共是做了 n 次的演算。另一方面, F_{n+2} 與 F_{n+1} 是最小的兩自然數, 滿足 (5) 式者。

定理1: 設 (F_n) 爲費氏數列, 則
(i) $E(F_{n+2},F_{n+1})=n$,
(ii) 在滿足 $E(a,b)=n$ 的所有兩自然數 a 與 b 之中, 以 F_{n+2} 與 F_{n+1} 爲最小。

證明: 我們只需證明(ii)。

假設 $E(b_{n+2},b_{n+1})=n$ 且 $b_{n+1}<b_{n+2}$。令輾轉相除的 n 個步驟爲

$$\begin{aligned} b_{n+2} &= k_n b_{n+1}+b_n, \quad (0<b_n<b_{n+1}) \\ b_{n+1} &= k_{n-1}b_n+b_{n-1}, \quad (0<b_{n-1}<b_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\vdots && (6)\\ b_5 &= k_3 b_4 + b_3, \quad (0 < b_3 < b_4)\\ b_4 &= k_2 b_3 + b_2, \quad (0 < b_2 < b_3)\\ b_3 &= k_1 b_2 \end{aligned}$$

其中所有的數皆爲自然數, 至少爲 1。特別地, $k_1 \neq 1$, 否則 $b_3 = b_2$, 這就跟 $0 < b_2 < b_3$ 矛盾。因此 $k_1 \geq 2$ 。逆著上述輾轉相除的步驟得到

$$\begin{aligned} b_2 &\geq 1 = F_2,\\ b_3 &\geq 2 \cdot 1 = 2 = F_3,\\ b_4 &\geq 1 \cdot 2 + 1 = 3 = F_4,\\ b_5 &\geq 1 \cdot 3 + 2 = 5 = F_5,\\ b_6 &\geq 1 \cdot 5 + 3 = 8 = F_6,\\ & \quad \ldots\ldots\ldots \text{等等} \end{aligned}$$

故 (b_n) 的各項大於等於費氏數列 (F_n) 的對應項。欲 (b_n) 的各項儘可能地小, 只需在 (6) 式中取最小的 $b_2 = 1$, $k_2 = 2$, $k_i = 1$, $i = 2, 3, 4, \ldots$ 就得到費氏數列

$$b_2 = F_2,\ b_3 = F_3,\ \ldots,\ b_n = F_n, \ldots$$

至此, (ii) 證畢。

顯然, $E(m,n)$ 無上界。我們進一步想知道它的增長行爲。根據上述, 我們只需考慮 (m,n) 是費氏數列 (F_n) 相鄰兩項的情形。觀察表1 可知:

(i) 當 $0 < n \leq 8$ 時, $E(m,n) \leq 5$ 且 F_n 是一位數;

(ii) 當 $8 < n \leq 89$ 時, $E(m,n) \leq 10$ 且 F_n 是二位數;

(iii) 當 $89 < n \leq 987$ 時, $E(m,n) \leq 15$ 且F_n 是三位數。

在這些觀察下, 我們猜測到:

對任意兩自然數 m 與 n, $m > n$, 恆有

$$E(m,n) \leq 5 \times (n\text{的位數}) \qquad (7)$$

如何證明呢? 假設 $E(m,n) = k$, 記 $a_{k+2} = m$, $a_{k+1} = n$ 。令 a_{k+2} 與 a_k 的 k 個步驟之輾轉相除爲

$$\begin{aligned} a_{k+2} &= q_k \cdot a_{k+1} + a_k, \quad (0 < a_k < a_{k+1})\\ a_{k+1} &= q_{k-1} \cdot a_k + a_{k-1}, \quad (0 < a_{k-1} < a_k)\\ &\vdots\\ a_4 &= q_2 \cdot a_3 + a_2, \quad (0 < a_2 < a_3)\\ a_3 &= q_1 \cdot a_2 \end{aligned}$$

仿定理1 證明之論證知

$$\begin{aligned} &q_1 \geq 2,\ a_3 \geq F_3,\ a_4 \geq F_4, \ldots,\\ &n = a_{k+1} \geq F_{k+1} \end{aligned} \qquad (8)$$

設 n 爲 l 位數, 我們要利用 (8) 式來證明

$$k \leq 5 \cdot l \qquad (9)$$

爲此, 我們需利用費氏數列的一個增長性質: 觀察費氏數列 $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_6 = 8$, $F_7 = 13$, $F_8 = 21$, $F_9 = 34$, $F_10 = 55, \ldots$ 得知

$$F_{2+5} = \ F_7 = 13 > 10 = 10 \cdot F_2$$

$$F_{3+5} = \quad F_8 = 21 > 20 = 10 \cdot F_3$$
$$F_{4+5} = \quad F_9 = 34 > 30 = 10 \cdot F_4$$

一 般 而 言,

$$\begin{aligned} F_{n+5} &= F_{n+4}+F_{n+3} = 2F_{n+3}+F_{n+2} \\ &= 3F_{n+2}+2F_{n+1} = 5F_{n+1}+3F_n \\ &= 8F_n+5F_{n-1} = 13F_{n-1}+8F_{n-2} \\ &= 21F_{n-2}+13F_{n-3} > 20F_{n-2}+10F_{n-3} \\ &= r10F_n \qquad (10) \end{aligned}$$

因 此, F_{n+5} 至 少 比 F_n 要 多 一 位 數。由 (10) 式 得

$$F_{n+5l} > 10^l F_n, \qquad (11)$$
$$n = 2, 3, \ldots; \quad l = 1, 2, \ldots$$

回 到 (9) 式 之 證 明, 我 們 利 用 反 證 法。若 (9) 式 不 成 立, 即 若 $k > 5l$, 則 $k \geq 5l+1$, 故

$$n \geq F_{k+1} \geq F_{5l+2} \geq F_2 \cdot 10^l = 10^l。$$

這 表 示 n 至 少 有 $l+1$ 位 數, 矛 盾。因 此, (9) 式 成 立。

定理2: (Lame 定 理, 1844 年)

對 任 意 兩 自 然 數 m 與 n, $m > n$, 恆 有

$$1 \leq E(m,n) \leq 5 \times (n\text{的 位 數})。 \qquad (12)$$

注 意: 在 (12) 式 中,5 是“最 佳 可 能 值”(the best possible value), 即 將 5 改 爲 較 小 的 自 然 數 時, (12) 式 就 不 成 立 了。

三、費氏數列與黃金分割

費氏數列的模式 (pattern) 在自然界及數學的許多地方一再地出現, 內容豐富而美麗, 這是它深具興味的理由。

Fibonacci 觀察兎子的繁殖現象, 在 1202 年提出今日所謂的費氏數列。假設任何一對新生兎子, 經過兩個月後, 開始生育一對兎子, 其後每隔一個月生育一對兎子。今在年初有一對新兎, 繁殖到年末, 問一共有幾對兎子?

按月記錄下兎子的總對數就是費氏數列 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, . . . 。因此第十二月末共有 144 對兎子。

有些花草或樹木, 其枝幹之分枝成長也符合費氏數列的模式, 參見圖1。更令人驚奇的是, 費氏數列竟然出現在雄蜜蜂的家譜之中! 大家都知道, 在蜜蜂的王國, 女王蜂產卵孵化成雄蜂, 受精的卵孵化成工蜂或女王蜂, 因此雄蜂只有母親沒有父親。考慮一隻雄蜂的家譜, 牠的歷代祖先之個數成爲費氏數列, 並且第七代的13位祖先恰好可以排列成鋼琴八度音的13個半音階 (8個白鍵, 5個黑鍵), 參見圖2。

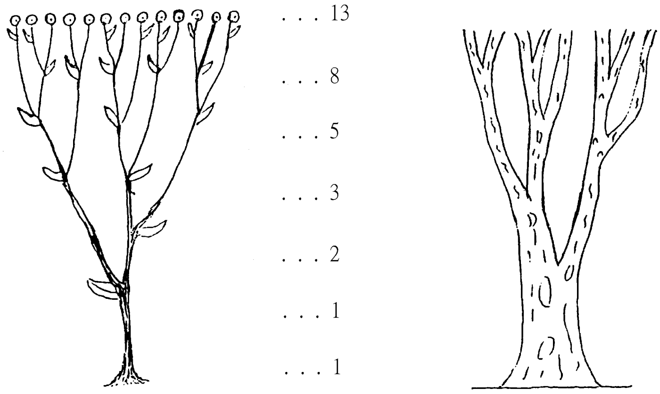

圖 1

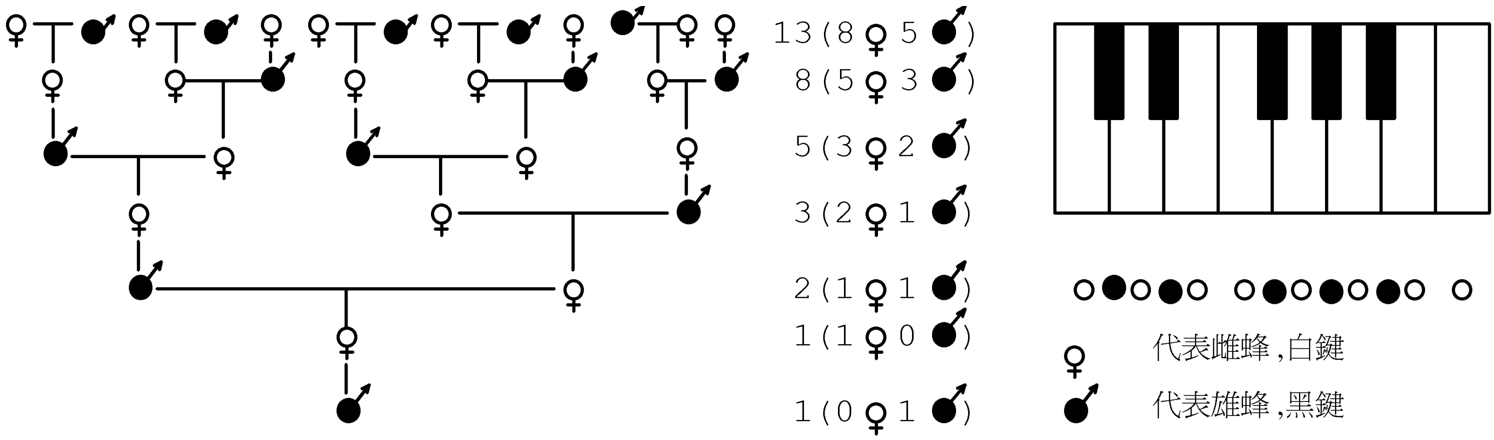

圖 2

在 Pascal 三角形中 (二項定理及開方術) 也隱含有費氏數列。Pascal三角形 (又叫做算術三角形或楊輝三角形) 如下:

1
1　1
1　2　1
1　3　3　1
1　4　6　4　4
. . . .

這些數是由二項展開定理的係數組成的。將它們重新排列成下形, 那麼水平各項之和形成費氏數列, 斜線各項是二項定理的係數, 垂直列代表兎子各代子孫的對數, 例如第九個月的 1, 7, 15, 10, 1 表示親代有一對, 子代有7對, 孫代有15對, 曾孫代有10對, (曾孫) ^{2} 代有1對 (五世同堂)。

(費氏數列)	親	子	孫	曾孫	$(曾孫)^2$	$(曾孫)^3$
1 ←	1					
1 ←	1					
2 ←	1	1				
3 ←	1	2				
5 ←	1	3	1			
8 ←	1	4	3			
13 ←	1	5	6	1		
21 ←	1	6	10	4		
34 ←	1	7	15	10	1	
55 ←	1	8	21	20	5	
89 ←	1	9	28	35	15	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

二項定理

費氏數列有許多有趣的性質, 其證明可參考 [3]:

定理3:

(i) 費氏數列任何相鄰兩項皆互質, 即 $\gcd(F_n, F_{n+1}) = 1$

(ii) 費氏數列的首 n 項之和爲 $F_{n+2} - 1$

(iii) 費氏數列 (F_n) 滿足恆等式

$$F_n^2 = F_{n-1}F_{n+1} + (-1)^{n-1}, \quad \forall n \geq 2$$

特別地, 當 $n = 2m$ 爲偶數時, 恆有

$$F_{2m}^2 = F_{2m-1}F_{2m+1} - 1 \qquad (13)$$

(iv)

$$F_nF_{n+3} - F_{n+1}F_{n+2} = (-1)^{n-1}, \ \forall n \in \mathcal{N} \qquad (14)$$

(13) 式是周知的一個幾何謎題之來源。例如, 考慮邊長是8之正方形, 面積爲64。如圖3, 將它分割成四塊, 再併成邊長是5與13的長方形, 面積爲65。這似乎是個矛盾, 相差一個單位面積跑到哪裡? 這很容易解釋: 事實上 A, B, C, D 四點並不全落在長方形的對角線上, 它們構成面積爲1的一個平行四邊形, 作圖時沒將其表現出來。

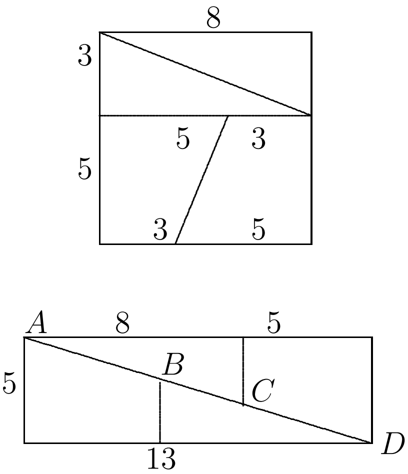

圖3

對於任意費氏數 F_{2m}, 以 F_{2m} 爲邊作一正方形, 如圖4, 將它分割成甲、乙、丙、丁四塊, 再重排成圖5, 中間的平行四邊形具有單位面積, 這就是 (13) 式之圖解。

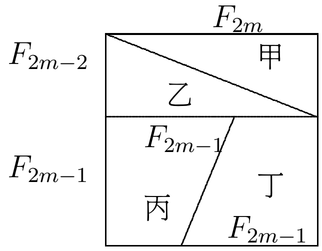

圖4

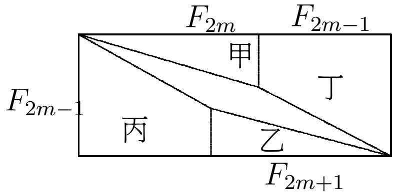

圖5

考慮費氏數列相鄰兩項的比值, 例如後項比前項 $b_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$:

$$\begin{array}{ll} b_1 = \frac{1}{1} = 1\,, & b_2 = \frac{2}{1} = 2 \\ b_3 = \frac{3}{2} = 1.5\,, & b_4 = \frac{5}{3} = 1.66\ldots \\ b_5 = \frac{8}{15} = 1.6\,, & b_6 = \frac{13}{8} = 1.625 \\ b_7 = \frac{21}{13} = 1.615\ldots\,, & b_8 = \frac{34}{21} = 1.619\ldots \\ \vdots & \vdots \end{array} \tag{15}$$

我們發現數列 (b_n) 的奇數項所成的子序列 (subseguence) 是遞增的, 而偶數項是遞減的, 形成左右夾逼的兩隊小兵, 越來越接近。因此, 我們順理成章可以「猜想」得知數列 (b_n) 的極限值存在。

問: $\lim_{n\to\infty} b_n = ?$

通常的求法是, 由 $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, 兩邊同除以 F_{n+1} 得

$$b_{n+1} = 1 + \frac{1}{b_n} \tag{16}$$

令 $\phi = \lim_{n\to\infty} b_n$, 則

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi} \tag{17}$$

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0 \tag{18}$$

解得

$$\phi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad (\text{負不合})$$

注意到: 在上述論證中, 如果極限 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 存在, 則 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; 但是如果 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 不存在, 則可能導出矛盾的結果。

例如, 由 $x^2 = 5$ 得 $x = \frac{5}{x}$ 。定義數列 (a_n) 爲: $a_1 = 3$, $a_{n+1} = \frac{5}{a_n}$, $n = 1, 2, \ldots$ 。如果令 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, 則得

$$\alpha = \frac{5}{\alpha}, \quad \text{即} \quad \alpha^2 = 5$$

解得 $\alpha = \pm\sqrt{5}$ (負不合), 所以

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{5}$$

但是仔細觀察數列 (a_n) :

$$a_1 = 3,\ a_2 = \frac{5}{3},\ a_3 = 3,\ a_4 = \frac{5}{3}, \ldots$$

它以 3, $\frac{5}{3}$ 不止息地循環, 故不收斂。這跟 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{5}$ 矛盾。

民國八十二年大學聯招自然組數學, 有一道證明題: 設 $a_0 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ 。

(i) 試證 $1 \leq a_n \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, 其中 $n = 0, 1, 2, \ldots$

(ii) 試證 $a_n \leq a_{n+1}$, 其中 $n = 0, 1, 2, \ldots$

(iii) 當 $\to \infty$ 時, 試證 a_n 趨近於一定值。

事實上, 這題就是要證明數列 (a_n) 遞增且有上界, 則由實數系的完備

性知 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ 存在。然後由 $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}$ 得 $\alpha = \sqrt{1+\alpha}$, 解得 $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 。

對於前述數列 (b_n), 我們有

定理4:

(i) (b_{2n+1}) 是遞增的,

(ii) (b_{2n}) 是遞減的,

(iii) $b_{2n-1} < b_{2n}, \quad \forall n \in \mathcal{N}$,

(iv) $1 \le b_n \le 2, \quad \forall n \in \mathcal{N}$ 。

(v) $|b_{n+1} - b_n| \to 0$, 當 $n \to \infty$ 。

證明:

(i)
$$\begin{aligned} & b_{2n+3} - b_{2n+1} \\ = & \frac{F_{2n+4}}{F_{2n+3}} - \frac{F_{2n+2}}{F_{2n+1}} \\ = & \frac{F_{2n+1}F_{2n+4} - F_{2n+2}F_{2n+3}}{F_{2n+3}F_{2n+1}} \end{aligned}$$

由定理3知, 分子等於1, 因此 $b_{2n+3} - b_{2n+1} > 0$, 亦即 (b_{2n+1}) 是遞增的。

(ii) 同理可證 (b_{2n}) 是遞減的。

$$\text{(iii) } b_{2n} - b_{2n-1} = \frac{F_{2n+1}}{F_{2n}} - \frac{F_{2n}}{F_{2n-1}} = \frac{F_{2n-1}F_{2n+1} - F_{2n}^2}{F_{2n-1}F_{2n}}$$

由定理3知, 分子等於 1, 故 $b_{2n} - b_{2n-1} > 0$, 即 $b_{2n-1} < b_{2n}$ 。

(iv) 由 $b_1 = 1$ 與 $b_2 = 2$, 配合上述 (i) 到 (iii) 就得證 $1 \le b_n \le 2, \forall n \in \mathcal{N}$ 。

(v) 由 (16) 式知

$$\begin{aligned} & |b_{n+1} - b_n| \\ = & \left|1 + \frac{1}{b_n} - b_n\right| \\ = & \left|1 + \left(1 + \frac{1}{b_{n-1}}\right)^{-1} - \left(1 + \frac{1}{b_{n-1}}\right)\right| \\ = & \left|\frac{b_{n-1}^2 - b_{n-1} - 1}{b_{n-1}(1+b_{n-1})}\right| \end{aligned} \tag{19}$$

同理可得

$$\begin{aligned} |b_n - b_{n-1}| &= \left|1 + \frac{1}{b_{n-1}} - b_{n-1}\right| \\ &= \left|\frac{b_{n-1}^2 - b_{n-1} - 1}{b_{n-1}}\right| \end{aligned} \tag{20}$$

由 (19) 與 (20) 兩式及 $b_{n-1} \ge 1$ 知

$$\left|\frac{b_{n+1} - b_n}{b_n - b_{n-1}}\right| = \left|\frac{1}{1+b_{n-1}}\right| \le \frac{1}{2}$$

因此

$$\begin{aligned} & |b_{n+1} - b_n| \\ \le & \frac{1}{2}|b_n - b_{n-1}| \\ \le & \frac{1}{2^n}|b_{n-1} - b_{n-2}| \le \cdots \\ \le & (\frac{1}{2})^{n-1}|b_2 - b_1| \\ = & 2^{-n+1} \to 0, \quad \text{當 } n \to \infty \text{ 時。證畢。} \end{aligned}$$

由實數系完備性的區間套原理(the nested intervals principle) 可知, 極限 $\lim_{n\to\infty} b_n$ 確實存在。因此, 我們得到

定理5:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\cdots \tag{21}$$

這個數就是著名的黃金分割比值 (Golden ratio)。所謂黃金分割

(Golden section) 就是將一個線段分割成大小兩段, 使得

$$\text{全段} : \text{大段} = \text{大段} : \text{小段} \tag{22}$$

若令全段爲1, 大段爲 x, 則小段爲 $1-x$, 從而

$$1 : x = x : 1-x$$

亦即

$$x^2 + x - 1 = 0$$

解得

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad (\text{負不合})$$

因此

$$x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = 0.618\cdots$$

此數叫做黃金數 (Golden number)。從而黃金分割比值 $1 : x$ 爲

$$\frac{1}{x} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

注意: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 與 $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 互爲倒數。

Kepler 說:「幾何學有兩大寶藏, 一個是畢氏定理, 另一個是黃金分割。前者有如黃金, 後者有如珍珠。」

費氏數列與黃金分割還有許多奇特的性質, 這些都有專書討論, 例如 [1]與 [2]。1963年後還發行"The Fibonacci Quanterly"之專門雜誌來推動這方面的研究。(未完待續)

—本文作者任教於台灣大學數學系—