圖上的數字

圖本來就很優美, 加上了數字, 它更顯得有生命力。

傅恆霖

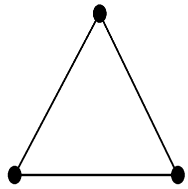
本文主要是要介紹圖的基本概念, 一些問題及它們的應用。爲了能夠吸引更多人一同來欣賞圖論的美, 我們不準備在文中做太多理論的推演, 而且儘可能減少預備知識, 希望兩眼看過去, 就能了解; 也許, 可以睜一隻眼, 閉一隻眼就夠了。

“圖上的數字”並非標準的數學術語, 很明顯的是在一個圖上添上數字使得它具有更明確的意義, 進而能夠應用它。所以, 在本文中除了介紹圖的基本概念之外, 我們將介紹一些不同方式的數字擺法; 也就適當的問題解釋它的應用。也許, 數學並非一定要馬上有用才顯得重要, 然而有用總是一件令人興奮的事。

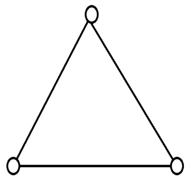
爲了使預備知識減少到最少, 在第一節我們先介紹圖的基本概念, 名詞儘可能以敍述方式說明來代替定義; 數學符號也力求避免, 除非必要, 定理都直接敍述它的性質, 有趣味於證明的讀者, 自然都歡迎自己試試看, 第二節開始, 我們依次介紹把數字放在“點”上, 然後第三節在“邊”上, 最後一節點上邊上都有數字, 雖然, 大部份的內容中數字只用到自然數, 即 $1, 2, 3, \ldots$, 數字也可以是負的, 當然也可以是實數。

一、圖的基本概念

圖是由一些點 (有限或無窮), 及一些連接兩點的邊所形成的; 這樣的圖稱爲一般圖。如果我們限制兩點之間只可以連接一個邊, 則這樣的圖稱爲簡單圖。本文中的圖都是這類型的圖。由於我們將在點上放數字, 爲了便於表示, 以及加強點的重要性, 一般的畫法 (圖一 (A)) 將改成特殊的畫法 (圖一 (B))。

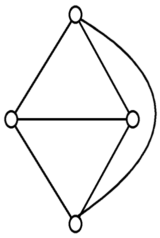


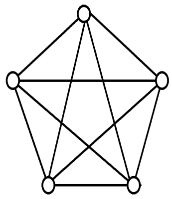
圖一(A)



圖一(B)

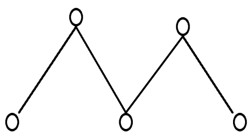
圖一的圖都是代表三個點而且點與點之間任兩點都互相連接的三角形。一個具有 n 個點而且任兩點都彼此相連的圖稱爲有 n 個點的完全圖, 以 K_n 表示。圖二 (A),(B) 分別是 K_4 及 K_5。

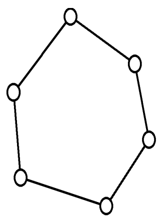




圖二(A)　　　圖二(B)

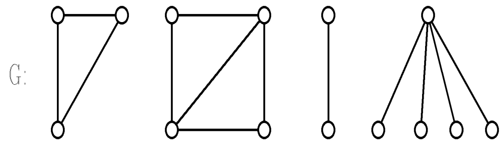
並非所有的圖都要是完全圖, 例如圖三 (A),(B); 在圖三 (A) 中, 點依次由左向右連接過去, 沒有其它邊, 這樣的圖叫做路徑; 如果令起點與終點相同, 如圖三 (B), 因此分不出那一點是起點, 我們稱它是圈圖或直接稱爲圈。五個點的路徑以 P_5 表示, 六個點的圈則表爲 C_6。





圖三(A)　　　圖三(B)

一個圖可能會有 n 部份, 如圖四。如果圖中的任意兩點都可以找到一條路徑把它們連接起來, 則此圖具有連通性, 有連通性的圖稱爲連通圖。所以圖四不爲連通圖, 但是每一部份都是連通圖。假如我們稱呼圖四爲 G, 則 $c(G)$ 代表 G 的部份數, 因此 $c(G) = 4$。

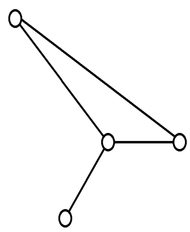


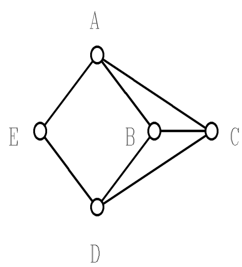
圖四

因此, 我們了解 G 爲連通圖, 若且唯若 $c(G) = 1$。

在一個圖 G 中, 我們可以用 p 代表 G 中的點數,q 代表 G 中的邊數, 如圖四, $p = 14$, $q = 13$。如果點太多, 邊太少則註定這個圖不具有連通性; 最知名的一個性質是當 $q < p - 1$ 時, 此圖必定不會是連通圖, 你會證明嗎? 想想, 一個圖有5個點,3個邊,...。當 $q = p - 1$ 時, G是否一定連通呢? 顯然未必, 如圖四所示。

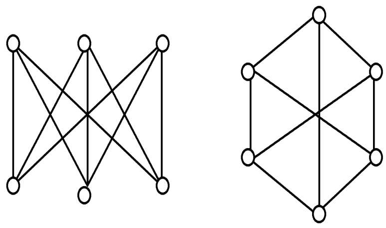
令 G 爲一個具有 p 個點, q 個邊的圖, 簡稱爲一個 (p, q)- 圖。如果 H 的點來自 G 中的點, 而且 H 的邊也是來自 G 中的邊, 則我們稱 H 爲 G 的子圖。例如圖五 (A) 可以看成是圖五 (B) 的一個子圖。子圖也可以由點來決定; 如果選定那些點後, 邊選自 G 中與這些點相關的全部邊, 則這樣





圖五(A)　　　圖五(B)

的子圖稱為是 G 的導出子圖。圖五 (A) 顯然不是圖五 (B) 中 A,B,C,D 導出的子圖, 因為連接 C 和 D 的邊不見了。這裡因為 E 點沒有選到, 所以 AE 邊就不會在子圖中出現。值得再補充說明的是圖五 (A), 可以看出是由點 A,B,C,E 所導出的子圖, 你看得出來嗎? 也許劃的方式不同, 但是結構是相同的, 這樣的關係稱為同構。譬如圖六中的兩個圖是同構。

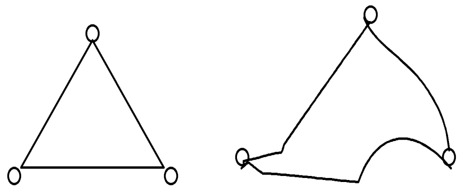


圖六: $K_{3,3}$

判斷兩個圖是否同構並不容易, 除了找出點之間, 邊之間的對應關係之外, 並無特別的好方法。

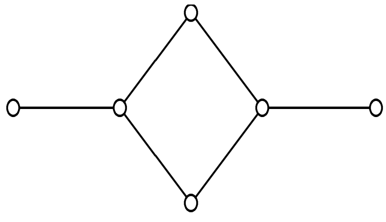
結構相同有很多基本的必要結果, 譬如兩圖的點數相同, 邊數相同, 部份數相同,... 等等; 同時, 如果一個圖中有一點和其它的三個點連接, 則與它同構的圖也必然會有一點和其它的三個點連接。因此, 假設 G_1 和 G_2 同構, 它們的點分別為 $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_p$ 及 $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_p$。令 d_i 為 G_1 中和 A_i 相連的點數, $i = 1, 2, 3, \ldots, p$; d'_i 為 G_2 中和 B_i 相連的點數, $i = 1, 2, 3, \ldots, p$。則 $d_i = d'_j$, 經過仔細安排點之後, 我們可以得到 $d_i = d'_i$, $i = 1, 2, \ldots, p$。$\{d_1, d_2, \ldots, d_p\}$及$\{d'_1, d'_2, \ldots, d'_p\}$ 分別稱為是 G_1 與 G_2 的秩數列, d_i 也稱為是點 A_i 在 G_1 的秩。以上, 我們可以得到一個結論, 同構的圖必然具有相同的秩數列, 而其逆敍述不一定眞, 你可以舉例說明嗎?

圖論中的圖並沒有劃的規格; 因為同構的圖性質自然相同, 所以任意劃一個加以討論即可; 圖劃不好看, 那有什麼關係呢? 你是否注意到; 圖的邊不一定是直線, 甚至歪七扭八也無所謂。圖七中的兩個圖都是三角形, 我們的術語是 K_3。



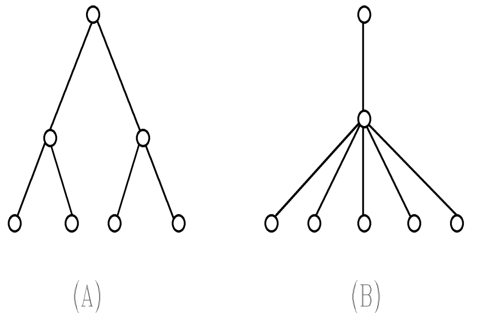
圖七

接下來我們討論一種非常特別的圖。前面提到過: 一個具有 p 個點 q 個邊的圖, 在 q 比 $p-1$ 小的情況下必定不會是連通圖。那麼要連通所需要的最少邊數是多少呢? 答案當然是“$p-1$”最好。的確我們可以找到很多這樣的圖。首先我們觀察到一個圖若是要連通又要邊數少, 則圖中的圈一定要避免, 從下圖可以看出來, 圖中的一邊是可以去掉, 仍然可以保持連通性。因此, 我們定義一個“樹圖”是一個不含任何圈 (子圖) 的連通圖。為何稱為樹圖呢? 也許是它長得像樹 (倒著看), 如圖九是兩



圖八

個例子。



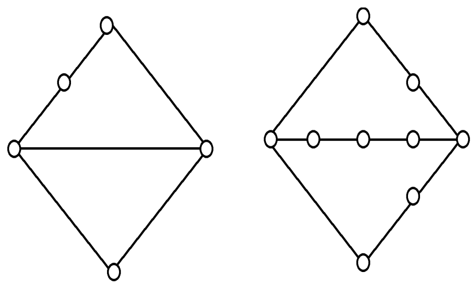
圖九

圖九 (A) 又稱爲是二分圖, 圖九 (B) 則有一個更漂亮的名稱, 星圖。

樹圖是邊數最少的連通圖 (點數固定), 這可以用直覺就看出來; 然而具有 p 個點的樹圖恰有 $p-1$ 個邊也許沒那麼容易看。你可以先觀察樹圖; 它一定會有一個點 (至少兩點) 它和具它的點之間只有連一個邊, 也就是秩爲1, 把這點去掉後, 剩下的子圖是 $p-1$ 個點的樹圖, 邊也少了一邊, 然後同樣的做法, 直到剩下一點, 沒有邊。希望這樣的解釋能讓你了解, 它的確有 $p-1$ 邊, 而上述的方法實際上就是數學歸納法。

樹圖的應用非常廣, 在第二節中我們再舉例說明。另外一種值得特別說明的圖是平面圖。樹圖也是一個平面圖。

在前面的例子中, 大部份畫出來的圖, 都可以適當地安排點及邊, 使得畫出來的圖 (平面上), 除了點之外, 其它地方都不會有交叉的現象, 這樣的圖就稱爲是平面圖。數學上, 我們也可以把它畫在球面上, 滿足上述規定的圖就是平面圖。不過, 有些圖卻始終辦不到, 例如圖二(B) 及圖六, 你相信嗎? 事實上, 古拉托夫斯基證明了這件事; 如果一個圖, 它不是平面圖, 則這個圖中一定會有長像與上述兩種圖 K_5 及 $K_{3,3}$ 相像的子圖。這裡所謂相像並不是同構, 例如圖十中的兩圖就很相像, 雖然點數不一樣多。



圖十

我們可以把它們想像成同構的圖中加上一些點在邊上, 就可以得到相像的圖。

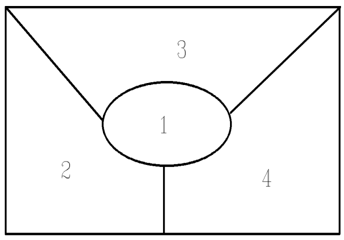
相像的圖在結構上自然會有很大的不同, 然而就圖的架構 (數學術語爲拓撲結構) 而言卻是一樣的, 譬如相像的圖可以同爲平面圖或反過來都不是平面圖。研究圖的架構也是圖論的重要課題, 在本文中由於含蓋的內容與此較不相關, 因此不做進一步的介紹。另外, 有些基本概念留在後面提到時再加以說明, 以避免第一節過於單調。

二、點上的數字

適當地在圖上填入數字以滿足規定的條件是點上填數字問題的基本形式; 最著名的一類問題是“著色問題”。因爲顏色本來就可以用數字代表, 近代電腦的彩色圖像就是這樣製成的。在圖論上最著名的點著色問題是平面地圖的著色問題。

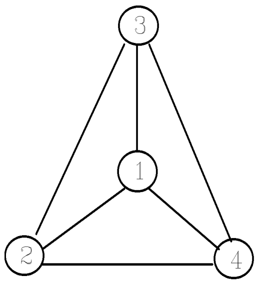
1. 四色問題

在十九世紀中期有一個學生提出這個在平面地圖上著色的問題, 他認爲四個顏色就夠用, 使得邊界相鄰的國家都用不同的顏色著色。這裡的四色是必要的, 從圖十一可以看出來。



圖十一

如果我們規定每個國家以首都 (點) 爲代表, 相鄰的國家把首都連在一起, 於是我們可以得到一個圖, 顏色塗在點上即可。因此, 圖十二和圖十一具有相同的意義。

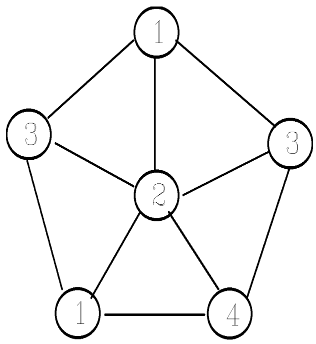


圖十二

在理論上, 圖十二又稱爲圖十一的對偶圖。四色問題整整影響了圖論的發展近一個世紀半, 雖然在1976年, 有兩位數學家亞伯和漢肯利用電腦的協助, 證明了這個問題所猜想的四色是正確的; 然而如何找到一個純粹數學的證明, 仍是圖論專家致力研究的工作。

2. 點著色的一般問題

任給一個圖, 最少需要幾個自然數 (由1開始) 來放在點上, 使得相連的兩點, 點上的數字不相同? 例如圖十二當然是4, 因爲這四個點彼此皆互相連接。你看得出來圖六只需要2嗎? 至少有一個邊的樹圖也是2, 如果圖中有一個三角形, 我們知道答案至少是3, 但是, 如果沒有任何三角形是否一定小於3呢? 顯然, 這是錯誤的結論, 因爲有5個點的圈也至少需要3個數字才可以辦得到; 實際上, 有些圖中沒有任何三角形卻需要很多數字才可以辦得到哩!一般而言, 要決定最少的顏色數是非常困難的事。儘管這是一個難題, 它卻是很有用的。首先, 我們假設有一個圖 G, 它點上都適當地填入數字, 使得相連的點所填入的數字不相同。現在我們先看填相同數字的點所成的集合, 顯然這個集合中的任兩點皆不相連, 這樣的集合又稱爲是 G 中的一個獨立集。所以需要的不同數字, 它的個數等於是把 G 中的點分成同樣個數的獨立集。例如圖十三可以分成四個獨立集, 分別填入數字1,2,3,4。4是最少的嗎?



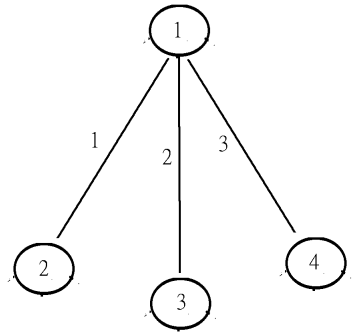
圖十三

接下來, 我們來談談它的應用。如果我們把不能同時做的工作, 用邊把它們連接起來, 有一些工作需要完成, 我們可以用點表示工作, 然後再按上述規定填入數字, 即可以知道要分多少次才可以把全部工作做完。譬如圖十三就需要分四次才能完全。現在, 如果已經知道十項工作要完成, 而且也已經知道分兩次就可以完成, 我們可否再要求每次做五項工作呢? 也就是說數字出現的次數, 越均衡越好。很不幸, 這麼一來, 我們可能辦不到, 你可否舉例說明呢? 值得一提的是, 在這方面的研究, 我國的數學家目前得到的結果是最好的; 數學傳播也刊登過這方面研究成果的報告。

從四色問題開始, 點著色的問題就吸引著非常多數學家去研究它; 直到今天, 依舊令人著迷, 然而如何才能解決仍然存在的那麼多問題, 就得靠更多的年輕數學家去努力完成。

3. 優美圖的研究

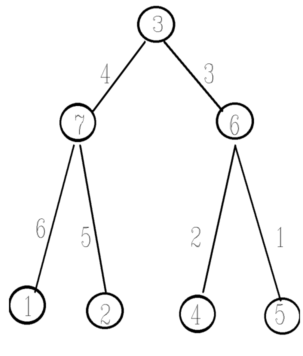
在一個圖中, 如果點都已填上數字, 我們可以用這些數字來定義這個圖中邊的加權量或直接稱爲是該邊的量; 以下我們就用一邊上的兩端點之數字差的絕對值來定義該邊的量。圖十四中, 邊上的數字代表它的量。



圖十三

一個圖 G, 如果它有 p 個點及 q 個邊, 同時我們可以用1到 $q+1$ 中的 p 個數別填在 P 點上使得所有邊的量都不相同, 則我們稱此圖爲一個優美圖。圖十三是優美圖的例子, 但是 K_5 就不是一個優美圖, 你相信嗎?

一般的圖要成爲優美圖並不容易? 但是, 樹圖看起來機會比較大。一方面點與點連接的關係比較單純, 因爲沒有圈; 另一方面一個樹圖如果它有 p 個點, 則一定有 $p-1$ 個邊; 於是我們恰好用 $1, 2, \ldots, p$ 填在點上, 使得 $p-1$ 個邊的量都不相同, 恰好由1一直到 $p-1$。圖十四是一個比較複雜一點的優美圖。

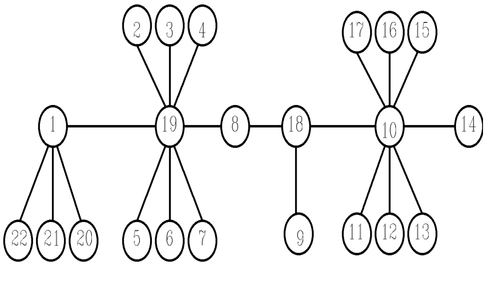


圖十四

是否任一個樹圖都是優美圖呢? 我確信你隨便舉一個例子 (樹圖), 都可以證實它是優美圖。可是, 如何證明這一件事, 卻是目前圖論中一個膾炙人口的猜想; 看過的人都想試試看, 當然, 尚未發現成功者, 否則它已成爲定理了。

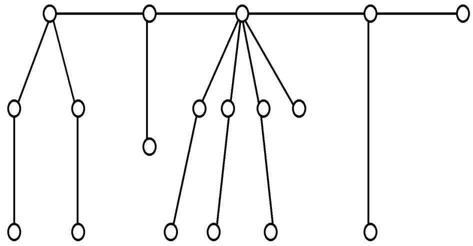
也許我們會問, 這個圖那麼“優美”, 有用嗎? 如果我們把圖的點當成是連絡站, 每個站都有自己傳遞訊息的發射頻率, 要讓可能干擾到的發射站頻率差皆不相同, 就需要設計上述的優美圖。

究竟如何才算解決了優美圖的問題呢? 以樹圖爲例, 我們不可能一個個拿出來試, 而是需要一套方法, 對某一類型的圖都可以按照這方法去填上數字。就以圖十五爲例, 該圖又稱爲是毛毛蟲, 你想像得出來嗎? 你可以先找出蟲身, 然後$\cdots$, 相信從這例子你可以看出方法。如果把蟲脚變成兩倍, 又要如何填呢?



圖十五

圖十六就是這樣的圖, 你可以想像出它叫什麼嗎? (龍蝦) 是否有一個規則可以填上數字使它成爲優美的龍蝦呢?(有些脚只有一節?)



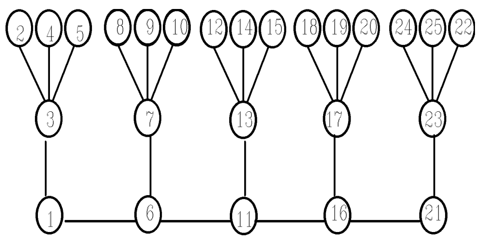
圖十六

如果你喜歡填數字, 不妨也試試下一個問題。

4. 互質圖

任給一個 p 點的圖, 我們可否用 1 到 p 分別填在不同的點上, 使得互相連接的兩點互質, (不相連的點則沒有規定)。它的答案當然是不一定辦得到, 例如完全圖 K_p, $p \geq 4$, 就一定辦不到, 因爲 2 和 4 不互質。不過, 扣除一些邊之後就有可能辦到, 你應該可以看出來。

和優美圖類似的地方是, 究竟樹圖是否一定爲互質圖, 目前仍然無法全部證明出來哩! 以下我們來看一個很有趣的樹圖一棕櫚樹。(圖十七), 它是否爲一互質圖呢?(是)

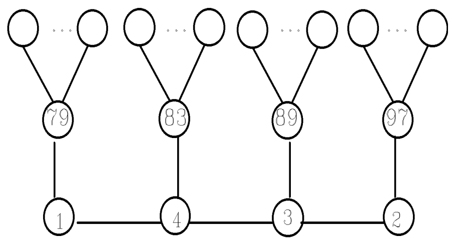


圖十七

圖十七的例子是有三個分叉的棕櫚樹圖, 從一個小棕櫚樹來看, 我們會發現那兒有

五個點, 其中一點上的數字要和其它的四個數都互質, 如果我們是塡上連續的數字, 就會有一種現象; 在連續的數字中, 找到一個數, 它與其它所有的數皆互質。顯然這個問題的答案不會太樂觀, 我們的確有可能找到連續的一些數字, 它們彼此間都會有一對數是不互質, 你可以試試看, 這種現象需要至少17個數字才辦得到哩!也就是說, 任何連續的16個數字, 都可以找到一個, 它與其它的15個數字都互質, 蠻不容易讓人相信, 不過這也是正確的。

以上的現象並不是說明了, 有15個分叉以上的棕櫚樹圖都沒希望, 因爲你可以安排其它的方式, 例如圖十八的答案, 充分地利用質數的特性。



圖十八. 23個分叉的棕梠樹圖
(最上層92個數字)

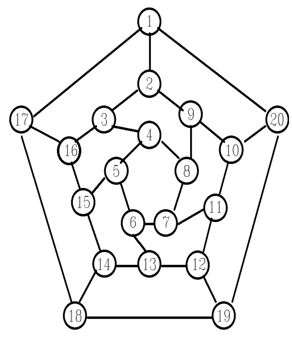
萬一數字太大了, 質數可能很難找, 你相信我們可以找到連續的 10^{100} 個數字都不是質數嗎? 這個問題的答案是肯定的。不過互質圖的問題卻是尙未解決啊!

除了上述的數字塡法外, 尙有很多種不同的塡法, 例如規定相連兩點所塡的數字差不可以在一個指定的集合中; 或是規定相連兩點所塡的數字和不可以再拿來塡在另一點上, 或是和要全部相異等等, 以下我們介紹另一種塡法。

5. 哈米爾頓圖

有一位經銷商他想要到某縣的全部鄉鎭去做生意; 他希望每一鄉鎭恰好去過一次, 走過的路不再走, 同時最後一個要去的鄉鎭剛好是他第一個去的地方。我們如何解決這個問題呢? 首先, 我們把全部鄉鎭都當成點, 有路相連的兩個鄉鎭用邊連接起來, 於是得到一個圖。我們只要在圖上的點適當地安排數字:1到點的個數, 表示出到各鄉鎭的前後順序即可。顯然, 並非所有連接出來的圖都可以辦到, 你想像得到嗎? 我們把可以辦得到的圖稱爲哈米爾頓圖。

從在圖上安排數字以滿足所希望的條件, 到決定那種圖可以如此辦到, 是非常自然的想法, 然而, 決定一個圖是否爲一個哈米爾頓圖卻是一個非常困難的問題。圖十九是一個非常出名的圖, 看起來像足球的設計; 它是一個哈米爾頓圖, 最早還被拿來當益智遊戲用 — 只要每一個點給一個世界大城市的名字, 就可以環遊世界了。



圖十九

完全圖 K_n 毫無疑問地是一個哈米爾頓圖, 而且有非常多種不同的塡法, $n!$。因爲不論怎麼塡都可以? 現在如果那位經銷商同時希望最省油錢地可以到過每一鄉鎭, 要如何走呢? 當然, 我們可以把每一邊 (路) 所需要的油錢列出來 (邊上的數字), 在 $n!$ 種不同的選法中, 看那一種方法油錢總和最小就可以了, 不是嗎? 可是, 如果有50個鄉鎭, 要找到什麼時候呢? 的確, 它是一個難題, 也就是出名的“經銷商問題”, 目前仍然找不到好的方法來解決這個問題哩!

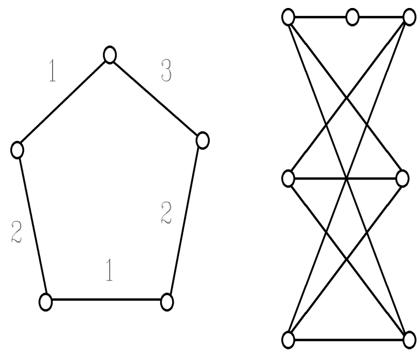
你是否想到電腦應該可以協助解決這問題? 是的, 鄉鎭不多時都可以求出來, 例如10個, 但多了就麻煩了。然而在理論上, 我們要解決的問題並不限制 n 的大小。事實上這個問題也是刺激電腦科學進步的動力之一。

三、邊上的數字

從經銷商問題中, 我們發現到所謂由一個地方到另一個地方所需要的油錢, 就等於是在邊上塡上數字以代表這項費用; 然而這些費用彼此間並沒有什麼關係, 我們把這類型的數字稱爲是該邊的加權量。以下所要討論的問題都不是這種型式, 我們將要求邊與邊之間有些特殊的關係。爲了便於表示, 數字將塡在邊的左 (上) 方。

1. 邊著色問題

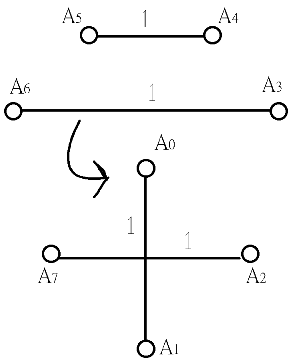
這問題和點著色問題的概念類似, 顏色特以數字來表示。唯一的要求是碰到同一點的兩邊要塡上不同的數字。所以, 如果用 $\Delta(G)$ 代表圖 G 中最大的秩, 即一個點最多連到 $\Delta(G)$ 個點, 則 G 至少要準備 $\Delta(G)$ 個數字才夠用, 也就是說塡入的數字至少要由1到 $\Delta(G)$。顯然, 有很多情況下 $\Delta(G)$ 是不夠的, 例如 C_{2m+1}, $m \geq 1$, 雖然最大秩爲2, 但是至少要用1,2,3才可以, 其實最多也會是1,2,3。也許你可以試試看, 不管是那一種圖, 只要最大秩加1就可以適當地在邊上塡入數字, 使得相接的兩邊都塡入不同的數字。圖二十是著名的兩個例子。第二圖需要1到4才可以, 你相信嗎? 你知道爲什麼嗎?



圖二十

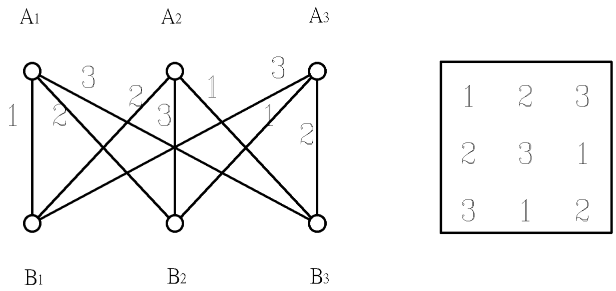
目前在研究這問題的工作, 最主要還是在判斷那一類型的圖只需要用到數字 $1, 2, \ldots, \Delta(G)$, 那一類型的圖則一定要多於 $\Delta(G)$。由於蘇聯的數學家韋靖證明了不管是那種圖 G, $\Delta(G)+1$ 個數字一定夠用, 所以按邊著色的特性可以把圖分成兩類, 只要 $\Delta(G)$ 個數字的圖是第一類圖, 另一類則需 $\Delta(G)+1$ 個數字。例如完全圖 K_n, 當 n 爲偶數時是第一類, n 爲奇數時爲第二類。證明 K_{2m} 爲第一類圖有一個很漂亮的方法可以用: 先畫一個正 $2m-1$ 多邊形, 再加上正中心一點, 點與點之間全部連接起來就

是一個 K_{2m}。我們把正中心命名爲 A_0, 多邊形上的點分別爲 $A_1, A_2, \ldots, A_{2m-1}$。數字的填法如下: A_0A_i 及與這邊垂直的所有邊皆填入 i, $i=1,2,\ldots,2m-1$; 這就是一個用 $\Delta(K_{2m})=2m-1$ 個數字塡好的圖。圖21是 K_8 的塡法。



圖二十一

K_{2m} 是第一類圖, 在組合設計中非常有用, 在此不深入說明。另一個出名的第一類圖是完全兩部份圖 $K_{n,n}$。圖6是 $n=3$ 的情況。就以 $n=3$ 爲例子。我們先找一個 3×3 的矩陣, 只用數字1,2,3, 使得每一行每一列每個數字都恰好出現一次, 如圖22所示; 然後把 $K_{3,3}$ 的點分別使 A_1, A_2, A_3 在一部份,B_1, B_2, B_3 在另一部份; 數字的塡法是把矩陣中第 i 到第 j 行的數塡在 A_iB_j 邊上即可, 剛好可以, 不是嗎?



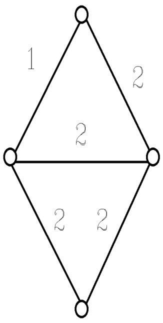
圖二十二

右邊的矩陣又稱爲是3階的拉丁方陣, 這也是應用非常廣的一種設計, 最早應用在實驗的設計上。你可以造一個4階,5階,... 的拉丁方陣嗎。

如果我們仔細觀察圖22, 我們立刻可以發現到 (i) 塡法有非常多種, 當然 $n=3$ 時有12種; (ii) 塡同一數字的邊, 彼此都不相接, 即沒有共同點; 這樣的集合又稱爲是邊獨立集, 或配對。如何在一個圖中找到最多邊的配對是另一個有趣的問題, 在此不多介紹, 讀者可以參考一般離散數學的書都可以得到資料。

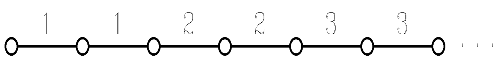
2. 完全不規則圖的問題

和點上數字的構想類似, 我們可以在邊上塡入數字, 數字可以重複, 不過規定就每一個點而言, 和它相接的所有邊上數字和都要彼此相異, 圖23就是一個這樣的例子。四個點的數字和分別爲3,4,5和6。



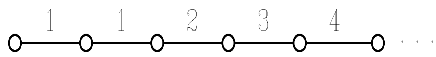
圖二十三

如果數字可以無限制它的大小, 這是一個很容易的問題; 但是, 要求填入的數字越小越好, 要達到最好絕不是容易的事。首先, 我們先說明圖 23 用 1,2 是最好的答案。因爲圖 23 有兩個點的秩是 2, 所以當全部都填 1 時, 最少有兩個點, 四週的數字和相等, 不合所求。事實上, 只要用一點心思就可發現到, 不管你如何畫出一個圖, 至少會有兩點它們的秩令相等, 你相信嗎? 因此, 最小的數自然是 2。當然, 就有些圖而言, 2 也不會夠用的, 例如圖 24, 圖中有很多秩爲 2 的點, 而 1,2 的搭配最多也只能有 4 種不同的和, 所以答案是 3 以上。



圖二十四

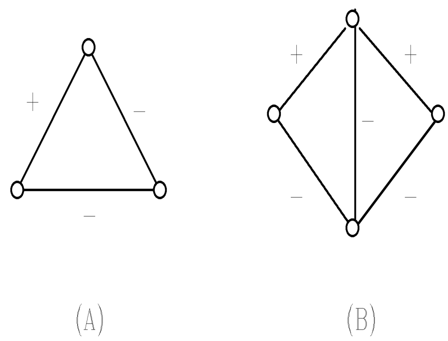
在圖 24 中, 我們同時發現到點附近的數字和最好是由小到大不要間斷, 然而這也是一件困難的事; 譬如上圖的最後一邊若是按照前面的填法, 不斷地增加 (兩個兩個), 答案就錯了。當然, 這可以適當地加以修飾。我們可以看出這個問題的複雜性, 的確, 顯然截至目前爲止, 對一般圖而言, 並沒有一般解, 也許我猜永遠不會有。



圖二十五

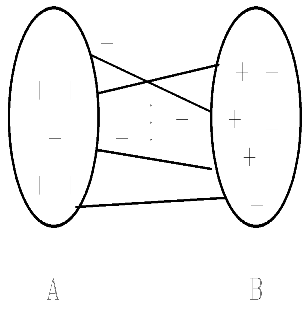
3. 平衡圖

任給一個圖, 在圖上的邊填上數字 $1^{(+)}$ 或 $-1^{(-)}$, 使得圖中任一個圖上的邊, 負號邊的總數爲偶數, 這樣的圖(辦得到的話) 稱爲是平衡圖。圖26 中的兩個圖皆爲平衡圖。



圖二十六

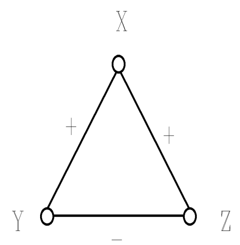
有一種方法一定可以把一個一般圖轉換 (填) 成平衡圖。任取圖中的一部份點 A(圖 27), 剩下的點集合爲 B, A 中, B 中若有任何邊, 皆填入正號邊, 連接 A、B 的所有邊皆填入負號邊, 這就是一個平衡圖。



圖二十七

你可以證明上面的塡法都可以得到平衡圖嗎? 實際上, 平衡圖的長像也都是像圖27的樣子。這也是不難證明的一件事。

平衡圖的概念在人文及社會科學上有很多應用。譬如: 它說明了政黨政治以兩黨政治最容易平衡。這當然是因爲黨內團結, 兩黨則對抗, 沒有其它枝節而造成太多的變數。以下可以用三角形的關係略加說明, 在圖28中, X,Y,Z 代表三個人, 如果兩人互相信賴, 則以 + 號表示, 否則用 − 號。假如三人的關係如圖所示, 只有一個 − 號, 則必不平衡。因爲 X 可能會聽到 Y(Z) 說到 Z(Y) 的一些缺點而動搖了他對 Z(Y) 的信賴。

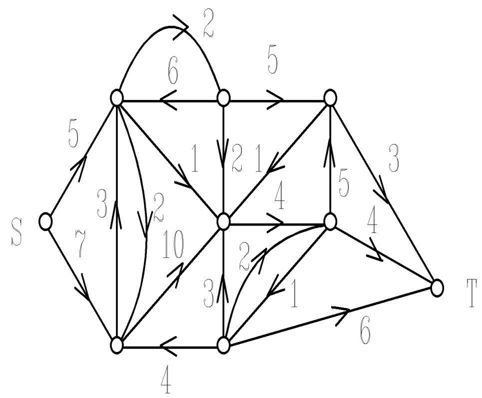


圖二十八

如果三角形中有兩個負號 (圖26A), 情況反而好轉; 三人分成兩邊, 對抗時對抗, 平衡多了。平衡圖的問題中, 最重要的大概是如何在一個不平衡圖中找到最少的邊, 改變它們的符號, 以得到平衡圖。你有興趣研究一下嗎?

4. 網路的形成

一個圖中有一些點, 一些邊, 看起來並沒有多大的意義; 可是當我們把圖中的邊加上方向, 並且塡上數字, 它就不同了。再加上一個只有出沒有入的點稱爲起點及一個只有入沒有出的終點就形成一個網路, 邊上的方向可以有兩個, 各個方向的數字也可以不同。(圖29就是一個網路的例子。)



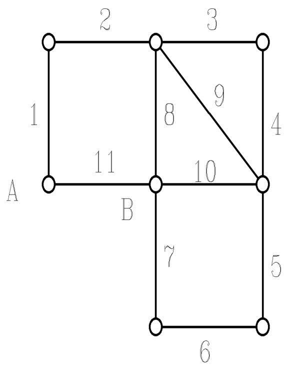
圖二十九

從圖的結構, 我們不難想像到網路的概念可以應用到交通, 資訊等系統上面。由於我們的目的在說明圖上多了數字後的變化; 而網路的介紹可以在很多書上看到, 在此不多說明。值得一提的是, 網路也可以定義成多個起點及多個終點的形式, 圖29是比較單純的一個。另外, 在交通流量的分配方面, 圖29上面數字可以代表該條路的容量; 在流量維持不大於容量的情況下, 才能維持交通的暢通,

高速公路的匝道管制就是在做這樣的一件事啊!

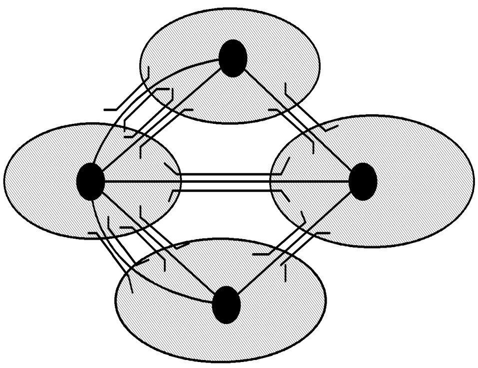
5. 尤拉圖

對應於點上數字的第五個問題, 我們也可以在邊上依次填入數字: 由1一直到 q (邊的個數), 使得相鄰兩數填入的邊必定要相接, 而且最後一邊 (填 q) 和填1的邊相接。圖30是一個這樣的例子。



圖三十

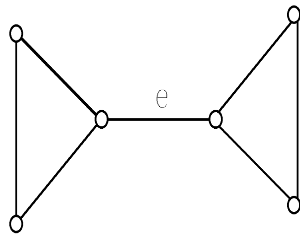
顯然, 並不是任意圖都可以如此填好數字; 最著名的例子是七橋問題所形成的圖(31)。



圖三十一

我們把橋想像成即將填入的數字, 同時該數字代表走過的順序; 於是我們希望能由1填到7以滿足上面所規定的條件。從圖30可以看出在一個點附近邊上的數字必成對出現, 所以要辦到的話, 只好規定每個點的秩必定是偶數。反過來, 如果秩都是偶數, 在兩百多年前, 尤拉已經證明; 依次填數字是可以辦得到的事; 所以這樣的圖又稱爲是尤拉圖。

究竟要如何填呢? 首先, 我們介紹橋, 一個連通圖 G 中, 如果有一邊 e, 當它拿掉之後, $G-e$ 就成爲不連通的圖, 這樣的邊, 稱爲是圖 G 中的橋。例如圖32中的 e。

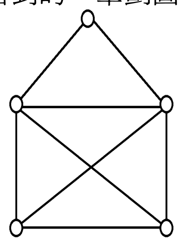


圖三十二

現在利用下列方法就可以在一個尤拉圖 G 上填好數字: 任選一點, 在與它相接的任一邊上填入1, 然後繼續往下填, 繼續要填的邊如果只一種選擇就別無它法只好選它, 如果有兩個邊以上可以選擇, 就看圖 G 去掉已填過的邊之後的部份, 有沒有和這個點相接的橋, 沒有的話, 任意選一邊填; 否則選不是橋的一邊填上數字, 然後繼續下去。以圖30爲例, 填到7時, 剩下的四邊有三邊和 B 點相接, 而 AB 邊爲一橋, 所以不可以填8。想想看, 這套方法眞的可以填好嗎?

和尤拉圖類似的問題是一筆劃圖, 由於一筆劃並沒有規定要出發的點與結束的點相同, 所以不需要每一個點的秩都是偶數, 所

以容許有兩個點的秩是奇數, 出發點與終點恰好是這兩點, 相信可以容易看出來。因此, 七橋問題所得到的圖甚至連一筆劃都辦不到哩!圖33是最常看到的一筆劃圖。你看過嗎?



圖三十三

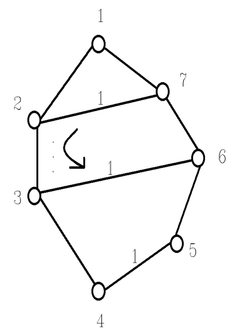
四、點邊上的數字

這是比較新的問題, 目前仍在發展中, 希望日後會更爲人所熟知。

1. 裁判安排問題

有七隊參加循環決賽, 每隊各準備一位隨隊裁判; 大會安排比賽的裁判, 規定兩隊的比賽裁判必須來自第三隊, 而且一隊的比賽, 相同的裁判不可以執法兩場以上, 以示公平。由於一共有21場比賽, 要如何安排才可以讓每位裁判執法3場 (最多) 比賽。

這個問題可以轉換成填數字在點及邊上的形式。首先將不同的七個數字1到7填 K_7 的點上, 如圖34, 然後邊上的數字只要和邊的兩點上的數字不同即可; 如果我們可以用1到7填在邊上, 則每個數字自然會出現在邊上三次, 不是嗎? 填法和圖21的概念相似, 請自己試試看。



圖三十四

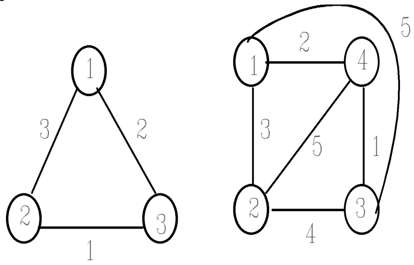
現在如果是六隊的循環賽, 六個隨隊裁判夠嗎? 因爲每位裁判只能執法兩場, 所以還差三場比賽沒裁判; 毫無疑問地大會要派一位來執法這三場比賽, 當然這位裁判也不可以對某一隊特別有利 (或不利), 也就是說每隊只碰到某一個裁判最多一次。於是我們需要七位裁判, 也就是說在 K_6 上填入七個不同的數字, 才可能合乎規定。

依上述的說明, 不難發現當比賽隊數爲奇數時, 隨隊裁判就夠用了, 當隊數是偶數時, 則需要再加一位以協助執法。(加入越多位越容易安排; 不過我們假設大會裁判來自與比賽隊不同的單位, 而且也希望減少開支, 不是嗎?)

2. 全著色問題

在裁判安排問題中, 我們發現不同隊才會比賽, 所以等於是要求填在一般兩端點的數字要不同 (點著色); 同一位裁判不同時執法一隊參加不同的比賽, 是規定相接的兩邊要填不同的數字 (邊著色); 最後規定隨隊裁判或任何裁判都不執法與自己相關的隊參與比賽, 因此點與相鄰的所有邊填入的數字也

都要不同。合乎上述三項要求的著色方法又稱爲是圖的全著色。圖35是三角形及 K_4 的全著色。

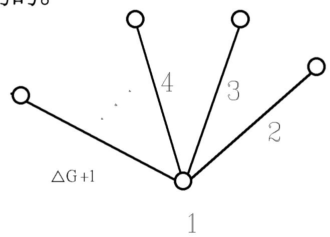


圖三十五

能夠全著色所需用到最少的數字量稱爲該圖的全著色數, 例如 K_3 爲3, K_4 爲5。由裁判安排問題, 我們知道 K_6 的全著色數是7, 而 K_7 的全著色數也是7。事實上, 我們不難證明當 n 爲奇數時, K_n 的全著色數爲 n, 而在 n 爲偶數時 K_n 的全著色爲 $n+1$。

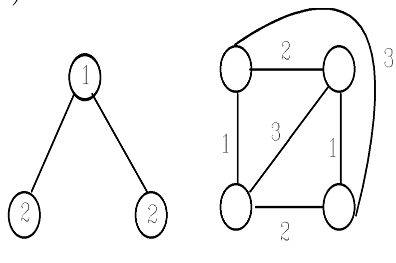
就一般圖 G 而言,G 的最大秩 $\Delta(G)$ 與全著色數的關連很大, 顯然 G 的全著色數一定會大於或等於 $\Delta(G)+1$, 這可以由圖36看出來, 但是全著色數會不會小於或等於 $\Delta(G)+2$, 到目前爲止仍然沒有人能證或提出反例。爲什麼是 $\Delta(G)+2$ 呢? K_{2m} 就

C研究全著色的專家一般相信 $\Delta(G)$+2 應該是足夠的。



圖三十六

有一種想法是先把點依照點著色的方法填好數字, 然後再去塡邊上的數字來求出全著色; 或者反過來先塡邊上的數字再塡點; 看起來也沒什麼不可以, 不過所用的數字常常會多於該圖的全著色數, 例如圖37(A), 甚至還會超過 $\Delta(G)+2$ 哩!你能找到例子嗎? 見圖37(B)。



(A)　　(B)

圖三十七

一般而言, 先塡點會比較容易得到與全著色數接近的數字, 當然也會有大於 $\Delta(G)+2$ 的時候, 你可以想想看, 這不代表猜測全著色數不大於 $\Delta(G)+2$ 有誤, 因爲全著色不一定要這樣去著色啊!

五、結語

圖上放入數字的問題絕對是比在本文中所介紹到的幾個多很多; 然而概念相近。希望能藉本文中的一些問題吸引更多人來學習, 研究圖論, 讓這門近代最具影響力的“數學分枝”在國內能生根萌芽, 開花, 結果。最後, 我得再說明, 研究圖論的方向非常廣泛, 絕非本文所介紹的內容所能含蓋, 不過, 知道了一些, 總算是好的開始。

註: 作者除了感謝編輯在文筆上的潤飾外, 更謝謝讓我有機會利用「數學傳播」的一角介紹一些“優美的圖”。

—本文作者任教於交通大學數學系—