

數學教師應當關注的幾個問題

一兼論“數學教育哲學”的研究

鄭毓信

本文論及了幾個有著重要的教育涵義，但又常常為人們所忽視的問題，即數學觀念的更新，數學教育的基本性質，以及關於數學學習活動本質的認識。一般地說，這也就是“數學教育哲學”的研究課題。

筆者在文中所闡述的基本立場為：(1) 除去現代數學知識的學習以外，我們也應關注數學觀的現代演變，即由靜態的數學觀向動態的數學觀的轉移；(2) 我們不應成為關於數學教育改革的各種時髦口號的不自覺俘虜，而應注意分析數學教育的本質特性，並以此作為自己行動的自覺指導；(3) 與具體的教學方法的研究相比，我們更應注意分析數學學習這種特殊的認識論活動的本質，從而以“社會的建構主義”去取代傳統的以“傳授 — 接受”為主要特徵的數學教學觀。

一．數學觀的革命

這是一個已經得到普遍認可的論點，即數學教師應當樹立終身學習的觀念，特別是，數學知識的更新更可以說是獲得了相當的重視，即如關於集合論思想的學習等；有很多數

學教育工作者並已在以現代數學思想指導初等數學的教學這一方向上作出了很好的工作，即如梅向明先生的《用近代數學觀點研究初等數學》、張奠宙先生等的《現代數學與中學數學》等等。

以上的工作應當說具有重要的意義；然而，筆者認為，在強調數學知識更新的同時，我們也應注意基本的數學觀念的變革，特別是，我們即應清楚地認識到數學觀的現代演變、即由靜態的數學觀向動態的數學觀的轉移具有重要的教育涵義。

具體地說，所謂“基本的數學觀”所涉及的即是這樣的一個問題：“究竟什麼是數學？”

但是，這難道不是一種哲學的思考嗎？從而與我們日常的數學教學活動有什麼關係呢？

不錯，這正是數學哲學、或者說數學教育哲學的研究課題；但是，由以下的事實我們即可以看出這一問題對於數學活動、特別是數學教學活動的重要意義，即一個人儘管掌握了不少的數學知識，但卻仍然可能不了解數學的本質；另外，對一個數學教師來說，

如果連“什麼是數學”的問題都沒有搞清，豈非正在“自欺欺人”？

事實上，儘管我們中的一些人並未認真考慮過以上的問題，但他們又總是在一定的數學觀念指導下從事自己的教學活動的，或者說，他們的數學教學活動總是體現了一定的數學觀念；更為糟糕的是，由於這是一種不自覺的行為，因此，他們又往往處於某種素樸的、但卻是錯誤的數學觀影響之下。

例如，一種最常見的觀念即是，人們往往把數學等同於數學知識（這主要是指各種具體的數學命題和公式）的匯集，而所說的數學知識則又常常被看成無可懷疑的真理。

然而，筆者要大聲地疾呼：以上的觀念（對此可稱為“靜態的數學觀”）是不正確的！與此相反，我們應當把數學看成是人類的一種創造性活動，從而就包含有“命題”、“問題”、“語言”、“方法”和“觀念”等多種成分；另外，也正因為這是一種人類活動，我們就應明確承認數學的猜測性，這也就是說，數學活動應當被看成一種包含有猜測、錯誤和嘗試、證明與反駁、檢驗與改進的複雜過程。

具體地說，以上所說的即是“動態的數學觀”的主要內容。顯然，由傳統的靜態的數學觀向動態的數學觀的轉移即是數學觀的一次革命，而這事實上也就是數學哲學現代發展的一個主要特徵。以下我們就圍繞所謂的“數學活動論”和“擬經驗主義的數學觀”對其主要思想和對於教育的重要涵義作出進一步的介紹。

所謂“數學活動論”，即是指在從事數學的哲學分析時，我們不應把注意力唯一地集

中於數學活動的最終產物，而應就數學活動本身來進行分析。例如，問題顯然構成了數學活動的實際出發點；另外，為了得出明確的結論（數學定理等），我們則又必須採取一定的表述工具和研究方法，從而，這也就涉及到了數學活動的另外兩個要素：“語言”和“方法”。最後，應當特別強調的是，在現代社會中，每個數學工作者又必定處在一定的數學傳統之中——儘管他本人可能並未明確地認識到這樣一點——而所說的數學傳統則又往往借助於所謂的“觀念”得到了明確的表現。例如，以下即可被認為是一個最為基本的觀念：數學家的工作目標是要獲得這樣的命題，它們是借助於為人們（更恰當地說，是“數學共同體”所一致接受的語言得到表述的，是對於為人們所一致接受的問題的解答，並建立在為人們一致接受的論證之上。進而，作為現代數學傳統的一個主要內容，我們則又必須對上述的觀念作出進一步的“具體化”：我們應當採用集合論的語言，數學問題的重要性不僅取決於它的實踐意義，而且也取決於它的數學意義；所謂的證明則應當（至少在原則上）是可以予以形式化的。

顯然，從數學教育的角度看，以上的論述也就清楚地表明了，在數學教學中我們不應唯一注重於具體的結論和公式，而且也應注意有關的方法、問題和語言；另外，除去這些具體的知識內容以外，我們則又應當特別注意數學觀念的養成。特殊地，從後一角度去分析，我們並可看到，現行數學教育的一個重要弊病就在於學生通過數學學習所形成的數學觀念並不能被看成對於“真正的數學”的真實

寫照，恰恰相反，他們正是由此而發展起了種種不正確的觀念（例如，“數學是無意義的符號遊戲”；“只有天才才能在數學中作出發明創造”；“學習數學就是記憶和模仿”；等等），而這對於其今後的學習乃至整个人生都可能產生嚴重的消極影響。

其次，所謂“擬經驗的數學觀”，其直接涵義之一即是對於數學猜測性的肯定；另外，從更深入的層次看，這又包括了對於數學真理性問題的進一步分析，特別是，作為對於“經驗的數學觀”的必要補充和重要發展，“擬經驗的數學觀”明確主張，在承認社會實踐對於數學發展的決定性作用的同時，數學研究還具有自己相對獨立的標準，這即是關於其數學意義的分析，如新的研究是否有利認識的深化和方法論上的進步等。顯然，這事實上也就是對於數學特殊性的直接肯定：數學不應被簡單地等同於一般的經驗科學。

和“數學活動論”一樣，“擬經驗的數學觀”也有著重要的教育涵義。例如，這首先就表明了，在數學中我們不應僅僅教證明，而且也應教會學生猜測的方法；另外，從更深的層次看，這更清楚地表明了培養“數學意識”的重要性，特殊地，這即是與培養學生對於數學美的鑒賞能力直接相聯繫的，而又正如彭加萊所說，“缺乏這種審美感的人永遠不會成為真正的創造者。”

一般地說，現代的數學教育家正在對數學哲學的研究課題表現出越來越多的關注。例如，美國著名數學教育家倫伯格（T. Romberg）就曾指出：“兩千多年來，數學一直被認為是與人類的活動和價值觀念無關的

無可懷疑的真理的集合。這一觀念現在遭到了越來越多的數學哲學家的挑戰，他們認為數學是可錯的、變化的，並和其它知識一樣都是人類創造性的產物。……這種動態的數學觀具有重要的教育涵義。”特殊地，在筆者看來，這也就直接導致了“數學教育哲學”這一新的研究課題的誕生。

二． 數學教育的基本性質及其現代化問題

縱覽數學教育的著作和論文，容易發現，其中最經常提及的一個口號即是“數學教育的現代化”；然而，只需稍作一點深入的分析，我們則又可以發現，不同的作者對於“數學教育現代化”的理解或解釋並不是完全相同的，特別是，作為這種不同理解或不同解釋的集中表現，在數學教育中並出現過一些不同的改革運動，即如六十年代的“新數學運動”及現代的“大眾數學等”等。那麼，我們究竟應當如何去認識這些不同的改革運動呢？什麼又是“數學教育現代化”的正確涵義呢？顯然，這一問題的深入分析對於數學教育的實踐有著重要的指導意義，特別是，這就關係到了我們的數學教師不應成為各種時髦口號的不自覺俘虜，而應以關於數學教育本質的深入認識作為自己行動的自覺指導。

具體地說，筆者認為，我們在此應當首先肯定數學教育包含有兩個不同的側面，即“數學方面”和“教育方面”：前者是指數學教育應當正確地體現數學的本質，後者則是指數學教育應當充分體現教育的社會目標並符合教

育的規律。由於這兩者也可以說是從不同角度表明了數學教育的性質——所說的“數學方面”清楚地表明了數學教育相對於一般教育的特殊性，“教育方面”則表明了數學教育相對於一般教育的共同性——因此，它們事實上就構成了數學教育的基本矛盾；進而，能否很好地處理這一矛盾（或者說，搞好這兩個方面的均衡）也就可以被看成搞好數學教育改革的關鍵所在。

爲了清楚地說明問題，我們就可以“新數學運動”和“大眾數學”爲例來進行分析。

如衆所知，“新數學運動”是六十年代在世界範圍內展開的一場轟轟烈烈的數學教育改革運動。國際競爭，特別是軍備競賽爲這一運動在歐美各國能以較大的規模開展提供了現實的可能性；另外，數學本身的發展，特別是數學中結構主義學派的工作則爲這一運動提供了必要的理論基礎，因爲，正如其名稱所已清楚地表明的，“新數學運動”的主要目標就是要以現代數學思想對傳統的數學教育進行改造，從而實現數學教育的現代化。

顯然，上述關於“新數學運動”的指導思想，即應當以現代數學思想對傳統數學教育進行改造的思想是完全合理的；也正因爲此，人們曾對“新數學運動”的成功寄予了很大的期望。但是，隨著時間的推移，這一運動卻暴露出了衆多的弊病、並最終以失敗而告結束。那麼，究竟什麼是這一運動失敗的原因呢？筆者認爲，這主要就是由於“新數學運動”只是注意了“數學方面”、而忽視了數學教育的“教育方面”，從而也就沒有能很好地解決上述的關於數學教育的基本矛盾。

例如，“新數學運動”的一個明顯弊病就在於，在強調及早地引入現代數學概念的同時，沒有能依據教育的規律去對這些概念的“可接受性”（相對於不同年齡的學生而言）和正確的教學方法作出深入的分析，從而，有關教學活動的失敗就不可避免了。

除去片面強調數學教育的“數學方面”而忽視了“教育方面”的錯誤以外，在實踐中也還存在相反的傾向，這即是僅僅注意了數學教育的“教育方面”而未能正確地反映數學的本質。

例如，作爲對於傳統的數學教育的一種反對，現代的數學教育工作者提出了“大眾數學”的口號，而其主要內容之一即是希望能使數學對大多數學生來說成爲更有吸引力和力所能及的。也正是出於這樣的考慮，所謂的“開放性問題”在現代就得到了大力的提倡，因爲，普遍認爲，與具有唯一正確解答，甚至唯一正確解題方法的“傳統問題”相比，在解答和解題方法上都保持“開放性”的問題更適於使所有的學生都參與到解題活動之中——他們不僅可以依據各自的水平去進行求解，而且可以“自由地”採取各種可能的解題方法，包括經驗方法、直覺與猜想等等（由此可見，對於“開放性問題”的強調並是與對“非形式方法”的肯定直接相聯繫的）。

例如，以下就是美國數學課本中所給出的兩個“開放性問題”：

例1(十年級)

(1) 用一張硬紙構造起一個儘可能大的盒子，即努力使其具有最大的體積，所說的盒子包括四個長方形的側面和上下底；

(2) 說出你所認為具有最大體積的盒子，並對這一盒子為什麼具有最大的體積作出直觀的解釋；

(3) 再用一張紙構造起儘可能大的不具頂的盒子。

例2(九年級)：

一個農民在送雞蛋去市場的路上發生了車禍，儘管她本人沒有受傷，但所有的雞蛋卻都破損了。由於她事先參加了保險，因此就前往保險公司索賠。後者要求她說出損失的雞蛋的數目。她說她不知道準確的數字，而只記得以下的事實：當她在把雞蛋中裝進小盒時，如果成雙地裝則剩下一個；如果三個三個地裝也剩下一個，四個、五個、六個地裝也是同樣的情況；而當她七個一裝時則正好裝完。問：

(1) 她有多少個雞蛋？

(2) 這一問題是否只有一個答案？

對於上述作法的基本出發點，即是希望能使數學對大多數學生來說成爲是更有吸引力和力所能及的，人們普遍持肯定的態度；然而，由於只是注意了數學教育的“教育方面”而未能對相應的“數學方面”予以足夠的重視，因此，在“開放性問題”的教學中也就出現了一些偏向。例如，美國加州大學的 H. Wu 教授就曾通過實際考察對此提出了尖銳的批評。

例如，針對上述的第二個問題，Wu 提出，由於大多數學生能夠通過“實驗”的方法（錯誤嘗試法）獲得 301 這樣一個解答，這一問題對他們來說就是力所能及的；而且，由於“實驗”正是數學活動的一個有機組成部分，

因此，通過解題活動讓學生領會“實驗的精神”就是很有意義的。但是，現在的問題是，我們的學生在面對這樣的問題時，往往只是滿足於用實驗的方法求得了 301 這樣一個解答，甚至教師也以此作爲自己的唯一的教學目標。針對這種情況，Wu 提出：“數學並不停止於實驗，而必須把它與理性的解釋聯繫起來：在這些看上去並無聯繫的事實背後是否隱藏著某種普遍的理論？這些事實能否被納入某個統一的數學結構？”從而，“在鼓勵學生在數學中進行實驗的同時，我們又應向他們指出實驗方法的局限性：通過實驗所得出的發現不應被看成終點，而只是邁向以某種廣泛的數學結構爲背景的更全面理解的第一步。”

Wu 並曾對應當如何看待證明的問題進行了分析。他認爲，對於直覺與非形式的強調是無可非議的，但是，我們並不能以此去取代數學證明，而只能作爲後者的必要補充。然而，如上述例 1 這樣的開放性問題——其中僅僅要求學生對所作的猜測作出“直觀的解釋”——卻使學生對存在於猜測和證明之間的重要區別認識不清：“如果在解決問題的過程中總是滿足於不加證明的猜測，他們很快就會忘記在猜測與證明之間的區分”；而後者甚至可以說比根本不知道如何去解決問題更糟，因爲，“證明正是數學的本質所在”。

儘管以上的論述所涉及的只是一些具體的例子，但是，在 Wu 看來，其所反映的情況卻具有相當的普遍性：“在現實中，開放性問題在某些場合正在成爲不求甚解和不加檢驗的猜測的同義詞”，由於這可能使學生對數學的本性形成錯誤的認識，因此就不能不

說是由於過分強調數學的可接受性（或者說，數學教育的“教育方面”）所造成的一種消極後果。一般地說，這事實上也就代表了一種普遍的關注。例如，人們提出，“我所擔心的是，通過使數學變得越來越易於接受，最終所得出的將並非是數學，而是什麼別的東西。”（A. Cuoco）“大眾數學是否就意味著沒有數學？”（J. D. Lange）

綜上可見，無論是片面地強調數學教育的“數學方面”或“教育方面”都將導致數學教學改革運動的失敗，從而，這也就更為清楚地表明了，正確地處理好數學教育的基本矛盾正是搞好數學教育的關鍵所在。

最後，依據以上的分析，我們也就可以對“什麼是數學教育現代化”的問題作出進一步的分析，特別是，作為“數學教育現代化”的評價標準，我們在此即可提出如下的“數學教育的時代性原則”：

數學教育應當適應時代的進步，也即表現出以下三個方面的適應性：

第一，數學教育必須與社會的進步相適應。

這不僅是指數學教育應當充分反映現代社會的要求，從而培養出社會所需要的人才；而且是指數學教育應當充分利用現代社會所提供的新的物質（技術）和文化條件——顯然，後者事實上也就是實現前一目標的一個重要保證。

第二，數學教育必須與數學的發展相適應。

這不僅是指數學教育內容的更新，即如引入新的教學內容，而且是指用現代數學思

想來指導初等數學的教學，還包括數學觀的轉變。

第三，數學教育必須與教育科學研究的深入相適應。

這是指數學教育應當注意吸收教育科學研究的現代成果。一般地說，這即就直接關係到了數學教育能否成為一門真正的科學。

顯然，依據以上的原則我們即可以看出以下的兩種關於“數學教育現代化”的常見解釋都不是很適當的，因為它們都只是強調了時代進步的某一個側面：“數學教育的現代化”主要是指如何依據現代的數學思想去對傳統的數學教育進行改造；或者說，“數學教育的現代化”就是要以計算機為基礎來“重建”數學教育。與此相反，我們應當從更廣泛的角度對“數學教育的現代化”的內涵作出更為深入的分析，並以此來指導自己的實際行動。

三. 數學教學思想的根本性變革

作為一個數學教師，我們當然應當重視教學方法的研究；然而，在作出這種努力的同時，我們卻又不應忘記：科學的教學方法依賴於科學的教學理論，而後者則又必須以對於學生學習活動的深入研究作為直接的基礎。

事實上，如果就數學教學的現狀進行分析，容易看出，一個普遍的傾向即是人們往往只是注意了“應當怎樣教？”而忽視了對於學生真實思維活動的深入了解和分析。例如，關於數學教學的論文和著作（至少在國

內是這樣)常常是給出了各種“教案”,但卻很少能夠看到具體的“學例”。然而,如果離開了對於學生學習活動的具體分析和深入的理論研究,我們的教學實踐充其量也只是“經驗型”的,更何況這種實踐所體現的很可能只是一種錯誤的教學思想。

一般地說,對於學生學習活動的深入研究即是數學學習心理學的研究內容,而這正是一個有待於深入研究的領域,特別是,在筆者看來,以下的三點即是深入開展這方面研究的關鍵所在:

第一,我們應當緊緊追隨學習心理學研究的現代發展,特別是,我們應當清楚地認識認知心理學(更為一般地說,就是認知科學)研究對於學習心理學深入發展的重要意義。

具體地說,現代認知心理學的基本立場即是把思維活動看成是人腦對於信息加工的過程,包括信息的獲得、貯存、提取、產生等;另外,從歷史的角度看,認知心理學取代行為主義在心理學領域中占據了主導地位則更有著十分重要的意義,因為,按照行為主義的理論,心理學的研究只能局限於可見行為,而認知心理學的研究則表明了我們可以,而且應當深入地去研究內在的思維活動。事實上,以下所論及的數學教學思想的根本性轉變在很大程度上也就可以看成現代認知心理學研究的直接產物。

第二,相對於一般的學習心理學而言,我們當然更加關心數學學習心理學的研究;然而,我們又應怎樣去從事數學學習心理學的研究呢?或者說,我們在此應當如何去處理在一般學習心理學與數學學習心理學之間所存在的“一般”和“特殊”的關係呢?

顯然,我們在此應當首先明確肯定一般學習心理學對於數學學習心理學的指導意義。事實上,這也就是上述關於我們應當充分重視認知心理學現代研究的論述所體現的基本立場;但是,作為問題的另一方面,我們又應強調指出,數學學習心理學如果有單獨存在的必要,它就應當充分體現數學學習活動的特殊性,這也就是說,數學學習心理學不應被等同於“一般學習心理學的理論框架闡數學的例子”。

然而,就現狀而言,我們又的確可以看到這種“框架闡實例”的作法。即如作為數學學習過程中心理活動的分析,只是從十分一般的角度去指明知覺、思維、記憶等等的特點,再指出其對於數學教育的直接涵義,並通過若干實例予以說明。當然,這種研究也是有一定意義的;但是,筆者認為,就數學學習心理學的理論建設而言,我們決不能滿足於這種簡單化的作法,而應對數學教學領域中的特殊現象、特殊問題作出直接的、深入的分析,從而揭示出數學學習活動的特殊性質。(事實上,除數學學習心理學外,在其它的一些研究領域內,即如關於“數學美學”的研究等,我們也可看到類似的簡單化作法;更為一般地說,這更關係到了師範院校數學系的辦學方針:數學教育不應被等同於“數學闡教育”——顯然,這也就更為清楚地表明了注意糾正這種簡單化傾向的重要性和緊迫性。)

第三,除去對於數學學習活動的具體研究以外,我們還應注意從認識論的高度去揭示數學學習這種特殊的認識活動的本質,並以此來指導數學學習心理學的具體研究。

具體地說，筆者在此所主張的是，數學學習心理學的研究必須上升到必要的哲學高度。例如，皮亞杰關於兒童心理學的研究即可說是在這方面為我們提供了一個很好的範例：在皮亞杰那裡，心理學的研究是與一般哲學、特別是認識論的研究密切相關的（這就是所謂的“發生認識論”），從而，心理學的研究就為其哲學主張提供了重要的論據，反之，認識論的分析則又事實上決定了他在心理學研究中所採取的基本立場。一般地說，筆者認為，這事實上也就是我國深入開展數學學習心理學研究的一個重要環節。例如，在對國外的學習理論進行介紹時，我們就應特別注意它們的基本觀點、也即關於學習活動本質的主要結論；另外，更為重要的是，我們又應通過獨立思考建立起我們在這一問題上的明確主張。

正是在後一意義上，筆者認為，我們應當特別注意所謂的關於數學學習的“社會建構主義”觀點。具體地說，建構主義觀點正是八十年代以來數學學習心理學研究的一個熱點。這就正如美國數學教育家戴維斯（R. Davis）教授所指出的：“‘建構主義’的思想——在一些年前幾乎無人提及——現今在數學教育界中引起了極大的重視。許多人對此進行思考並撰文加以論述。儘管人們的意見並不完全一致；但是，在這些爭論背後我們則又可以看到關於學習的性質、數學的性質以及適當的教學方法的實質性一致。”

應當強調的是：以上所說的“實質性一致”事實上也就是建構主義數學教學觀的核心所在，即是認為數學學習並非是學生對於教師所授予的知識的被動的接受，而是一個

以其已有的知識和經驗為基礎的主動的建構過程。由此可見，建構主義的數學教學觀事實上也就是對於傳統的以“授予——接受”為主要特徵的數學教學思想的直接否定。

當然，從理論的角度看，建構主義的內涵還有待於進一步的闡明和澄清。例如，特別重要的是，我們在此應當明確反對所謂的“極端的建構主義”，也即應當明確肯定建構活動的社會性。這也就是說，學習活動（更為一般地說，就是認識活動）不應被看成主體的孤立行為，而必定是在一定的社會環境中完成的，也即必然地包含有一個表達、交流、批評、改進的過程。也正是在這樣的意義上，我們即可對教師的作用作出新的認識：教師在教學活動中的主要責任就是要為學生的學習活動創造一個合適的“社會環境”。特別是，由於學習活動主要是一個“順應”的過程，因此，教師的一項主要工作就是如何從學生的實際出發（這以深入了解學生真實的思維活動為必要的前提），通過提供適當的問題或實例以促進學生的反思，包括引起必要的概念衝突，從而最終通過其主動的建構建立起新的認知結構。顯然，在所說的意義上，我們也就可以引入“學習共同體”的概念——這是由教師和各個學生所組成的；進而，如果說以下的斷言即可說是表明了建構主義的基本立場：“學生是一個個的主體”，那麼，從“社會的建構主義”的基本立場出發，我們則就應當作出如下的補充或澄清：“這些主體並和教師一起組成了一個共同體”。

顯然，對於廣大的數學教師來說，我們也就應當努力實現由傳統的數學教學觀向“社

會的建構主義”的轉變，並以此來指導自己的教學實踐。

至此我們論述了對於數學教育有著重要意義的三個問題，即數學觀的革命、對於數學教育基本性質的正確認識、以及數學教學思想的根本性變革。容易看出，如果從更為一般的角度去進行分析，這事實上也就涉及到了這樣三個基本的問題：什麼是數學？為什麼要進行數學教育？我們又應如何去進行數學教學？而這正是“數學教育哲學”的主要研究課題。

最後，應當強調的是，“數學教育哲學”作為一個新的、具有重要意義的研究方向，在國際數學教育界正在得到普遍的關注和重視，而這不僅將對具體的教學活動產生重要的影響，而且也將為科學的數學教育理論的建立提供必要的理論基礎。對此詳可見筆者的新著：《數學教育哲學》(四川教育出版社出版)。

主要參考書目

1. 鄭毓信：《數學哲學新論》，江蘇教育出版社，1990年。

2. 徐利治、鄭毓信：《數學模式論》，廣西教育出版社，1993年。
3. 徐利治、鄭毓信：“數學哲學現代發展概述”，載《數學傳播》，十八卷一期，83年3月。
4. 曹才翰等：《數學教育學概論》，江蘇教育出版社，1989年。
5. 張奠宙等：《數學教育學》，江西教育出版社，1991年。
6. ICMI 研究叢書之一：《國際展望：九十年代的數學教育》，上海教育出版社，1990年。
7. ICMI Study Series : *Mathematic and Cognition*, Cambridge University Press, 1990。
8. R. Davis, C. Maher & N. Noddings (ed), *Constructivist Views on the Teaching and Learning of Mathematics*, *Journal for Research in Mathematics Education*, Monograph No. 4, 1990。
9. P. Ernest: *The Philosophy of Mathematics Education*, the Falmar Press, 1990。
10. D. Grouuws (ed), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Macmillian Pub. Company, 1992。

—本文作者任教於南京大學哲學系—