三角形內的比例線段

劉俊傑

一. 前言

比例的性質在幾何學中, 扮演著相當重要的角色, 舉凡相似形、平行線的截線、角平分線定理、圓冪定理、阿波羅尼斯圓、托勒密定理、黃金分割等, 都能見到比例的蹤影 [1]。而在近世幾何學, 比例更被廣泛地用來討論點共線及線共點的問題 [2], 在射影幾何學中, 距離、角度等最基礎的幾何觀念, 雖然都失去內在意義, 然而我們仍可見到許許多多線段與線段間的比例關係式 [3]。

幾乎在每本名爲 Modern Geometry 的書中, 我們都可以遇到一個簡潔有力的定理 — Menelaus 定理, 它是西元前100年由亞力山卓城的數學家 Menelaus 所發現, 但直到近世幾何學興起, 才逐漸地受到重視, 並在西元1678年由義大利數學家 Ceva 給出了對應的 Ceva 定理 [4]。Menelaus 定理揭發出, 在幾何學中, 三點共線和其所決定的線段間最基本的比例關係。(如圖 1)

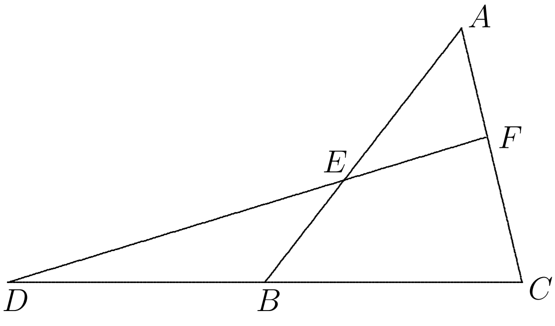

圖 1

Menelaus **定理**: 若且唯若 D, E, F 共線, 則

$$\frac{EA}{BE}\ \frac{FC}{AF}\ \frac{DB}{CD} = 1$$

有了 Menelaus 和 Ceva 定理, 很多共線及共點的題目, 如重心、垂心、內心等的證明, 將會容易許多。

當我們在計算有關三角形內的比例值問題, 常常會遇到很多繁瑣的計算, 而其運算過程中, 又有許多相同的步驟。爲了簡化解法, 節省時間, 一套以一般化文字敍述的比例公式便因應而生。整個立論的依據在於, 當某些三角形內線段比例已知的前提下, 我們就可以確定其它未知的比例值, 而不用考慮這個三角形的大小、角度等其它幾何性質。

本文的目的, 就是從 Menelaus 定理出發, 嘗試建立一套三角形內兩相交線段所引出的比例關係式, 共計有六組卅七個。利用這套公式, 我們將可以迅速地求出三角形內兩線段的比例, 進而能夠很容易地處理許多有關三角形中點的共線與兩線的平行等問題。

二. 比例公式

(一) 首先, 第一組的六個公式, 是討論一線段上相異四點間的比例關係 (如圖2)。這一組是公式中的公式, 稍後在其它組公式的

演證過程中, 都要運用到這一組公式。這組公式的證明僅需利用合分比的性質即可 [5], 由於證明方法大致相同, 在此僅就第1及第6個做證明。

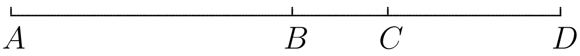

圖 2

I-(1) 若 $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{a}{b}$, $\dfrac{AB}{BD}=\dfrac{c}{d}$,
則 $\dfrac{AC}{CD}=\dfrac{c(a+b)}{ad-bc}$
且 $\dfrac{BC}{CD}=\dfrac{bc}{ad-bc}$。

I-(2) 若 $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{a}{b}$, $\dfrac{AC}{CD}=\dfrac{c}{d}$,
則 $\dfrac{AB}{BD}=\dfrac{ac}{bc+ab+bd}$
且 $\dfrac{BC}{CD}=\dfrac{bc}{d(a+b)}$。

I-(3) 若 $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{a}{b}$, $\dfrac{BC}{CD}=\dfrac{c}{d}$,
則 $\dfrac{AB}{BD}=\dfrac{ac}{b(c+d)}$
且 $\dfrac{AC}{CD}=\dfrac{c(a+b)}{bd}$。

I-(4) 若 $\dfrac{AB}{BD}=\dfrac{a}{b}$, $\dfrac{AC}{CD}=\dfrac{c}{d}$,
則 $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{a(c+d)}{bc-ab}$
且 $\dfrac{BC}{CD}=\dfrac{bc-ad}{d(a+b)}$。

I-(5) 若 $\dfrac{AB}{BD}=\dfrac{a}{b}$, $\dfrac{BC}{CD}=\dfrac{c}{d}$,
則 $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{a(c+d)}{bc}$
且 $\dfrac{AC}{CD}=\dfrac{ac+ad+bc}{bd}$。

I-(6) 若 $\dfrac{AC}{CD}=\dfrac{a}{b}$, $\dfrac{BC}{CD}=\dfrac{c}{d}$,
則 $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{ad-bc}{bc}$
且 $\dfrac{AB}{BD}=\dfrac{ad-bc}{b(c+d)}$。

證明: 公式(1)

1.
$$\frac{AB}{BC}=\frac{a}{b}\Rightarrow\frac{AB}{AC}=\frac{a}{a+b}$$
$$\Rightarrow AC=\frac{a+b}{a}AB$$
$$\frac{AB}{BC}=\frac{a}{b}\Rightarrow BC=\frac{b}{a}AB$$
$$\frac{AB}{BD}=\frac{c}{d}\Rightarrow BD=\frac{d}{c}AB$$
$$CD=BD-BC=\frac{ad-bc}{ac}AB$$

2.
$$\frac{AC}{CD}=\frac{\frac{a+b}{a}AB}{\frac{ad-bc}{ac}AB}=\frac{c(a+b)}{ad-bc}$$
$$\frac{BC}{CD}=\frac{\frac{b}{a}AB}{\frac{ad-bc}{ac}AB}=\frac{bc}{ad-bc}\qquad\#$$

公式 (6)

1.
$$\frac{AC}{CD}=\frac{a}{b}\Rightarrow\frac{AD}{CD}=\frac{a+b}{b}$$
$$\Rightarrow AD=\frac{a+b}{b}CD$$
$$\frac{BC}{CD}=\frac{c}{b}\Rightarrow\frac{BD}{CD}=\frac{c+d}{d}$$
$$\Rightarrow BD=\frac{c+d}{d}CD$$
$$\frac{AD}{BD}=\frac{\frac{a+b}{b}CD}{\frac{c+d}{d}CD}=\frac{d(a+b)}{b(c+d)}$$
$$\Rightarrow\quad\frac{AB}{BD}=\frac{d(a+b)-b(c+d)}{b(c+d)}=\frac{ad-bc}{b(c+d)}$$

2.
$$\frac{BD}{BC}=\frac{\frac{c+d}{d}CD}{\frac{c}{d}CD}=\frac{c+d}{c}$$

$$\Rightarrow BC = \frac{c}{c+d}BD$$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{\frac{ad-bc}{b(c+d)}BD}{\frac{c}{c+d}BD} = \frac{ad-bc}{bc} \qquad \#$$

(二) 現在考慮過三角形頂點及其對邊的兩條直線 (如圖3)。顯然這圖形中只有 $\frac{AF}{FD}$, $\frac{CE}{EA}$, $\frac{BF}{FE}$ 及 $\frac{BD}{DC}$ 等四個比例, 因此就這四個比例值列出公式。這些只要稍微應用一下 Menelaus 定理, 就不難得到它們的證明, 在此僅就第1個公式進行說明。

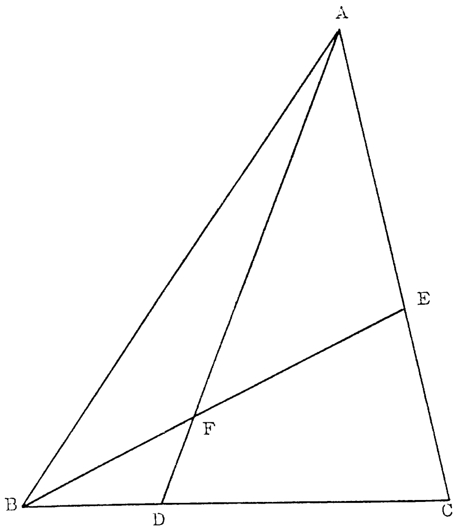

圖 3

II-(1) 若 $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{a}{b}, \dfrac{CE}{EA} = \dfrac{c}{d}$,

則 $\dfrac{AF}{FD} = \dfrac{d(a+b)}{ac}$。

II-(2) 若 $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{a}{b}, \dfrac{AF}{FD} = \dfrac{c}{d}$,

則 $\dfrac{CE}{EA} = \dfrac{d(a+b)}{ac}$。

II-(3) 若 $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{a}{b}, \dfrac{CE}{EA} = \dfrac{c}{d}$,

則 $\dfrac{BF}{FE} = \dfrac{a(c+d)}{bd}$。

II-(4) 若 $\dfrac{CE}{EA} = \dfrac{a}{b}, \dfrac{BF}{FE} = \dfrac{c}{d}$,

則 $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{bc}{d(a+b)}$。

證明: 公式(1)

由 Menelaus 定理

得 $\dfrac{FA}{FD}\,\dfrac{EC}{AE}\,\dfrac{BD}{BC} = 1$

已知 $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{a}{b}, \dfrac{CE}{EA} = \dfrac{c}{d}$

故 $\dfrac{FA}{FD}\,\dfrac{c}{d}\,\dfrac{a}{a+b} = 1$

$\Rightarrow \dfrac{AF}{FD} = \dfrac{d(a+b)}{ac}$

(三) 現在考慮, 過三角形一頂點及其對邊的直線, 和一條過另兩邊的截線 (如圖4)。這兩種線在幾何學中分別稱爲 Ceva 線與 Menelaus 線 [6]。在這個圖形中, 很明顯地共有五條線段, 五個比例值, 如果已知其中的三個比例值, 便可以從而得知其餘的兩個比例值。在此以一般化的公式, 將這幾個比例值之間的關係表示出來。

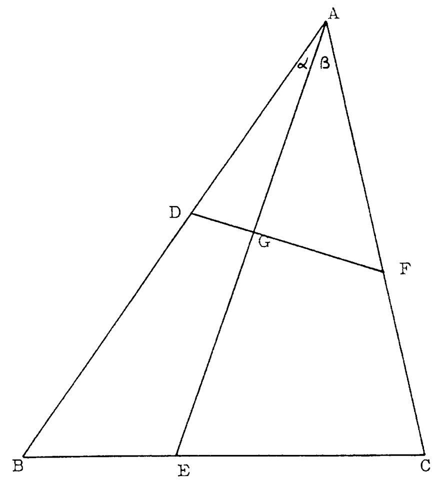

圖 4

在證明過程中, 使用了一個近世幾何學中相當好用的定理 (請看圖 4):

$$\frac{BE}{EC}=\frac{AB}{AC}\ \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\ [6]$$

III-(1) 若 $\frac{AD}{DB}=\frac{a}{b}, \frac{BE}{EC}=\frac{c}{d}, \frac{CF}{FA}=\frac{e}{f}$,
 則 $\frac{DG}{GF}=\frac{a(e+f)c}{(a+b)df}$。

III-(2) 若 $\frac{AD}{DB}=\frac{a}{b}, \frac{CF}{FA}=\frac{c}{d}, \frac{DG}{GF}=\frac{e}{f}$,
 則 $\frac{BE}{EC}=\frac{(a+b)de}{a(c+d)f}$。

III-(3) 若 $\frac{AD}{DB}=\frac{a}{b}, \frac{BE}{EC}=\frac{c}{d}, \frac{CF}{FA}=\frac{e}{f}$,
 則 $\frac{AG}{GE}=\frac{af(c+d)}{ace+bdf}$。

III-(4) 若 $\frac{BE}{EC}=\frac{a}{b}, \frac{CF}{FA}=\frac{c}{d}, \frac{AG}{GE}=\frac{e}{f}$,
 則 $\frac{AD}{DB}=\frac{bde}{bdf+adf-ace}$。

III-(5) 若 $\frac{AD}{DB}=\frac{a}{b}, \frac{BE}{EC}=\frac{c}{d}, \frac{AG}{GE}=\frac{e}{f}$,
 則 $\frac{CF}{FA}=\frac{acf+adf-bde}{ace}$。

證明: 公式(1)

1. 令 $\angle BAE=\alpha$, $\angle EAC=\beta$, $AD=aS$, $DB=bS$, $AF=fT$, $FC=eT$

$$\frac{BE}{EC}=\frac{AB}{AC}\ \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$
$$=\frac{(a+b)S}{(e+f)T}\ \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{c}{d}$$
$$\Rightarrow\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{cT(e+f)}{dS(a+b)}$$

2. $$\frac{DG}{GF}=\frac{AD}{AF}\ \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$
$$=\frac{aS}{fT}\ \frac{cT(e+f)}{dS(a+b)}=\frac{a(e+f)c}{(a+b)df}$$

公式 (3)

1. 延長 DF 交 BC 延長線於 H

 利用 Menelaus 定理

 得 $\frac{FA}{CF}\frac{DB}{AD}\frac{HC}{BH}=1\Rightarrow$
 $\frac{f}{e}\frac{b}{a}\frac{HC}{BH}=1$
 $\Rightarrow\frac{HC}{BH}=\frac{ae}{bf}\Rightarrow\frac{HC}{BC}=\frac{ae}{bf-ae}$

 又已知 $\frac{BE}{EC}=\frac{c}{d}$, 代入公式 I-2

 得 $\frac{BE}{EH}=\frac{bcf-ace}{bdf+ace}$
 $\Rightarrow\frac{BH}{EH}=\frac{bf(c+d)}{bdf+ace}$

2. 再應用 Menelaus 定理, 知 $\frac{GA}{EG}\ \frac{DB}{AD}\ \frac{HE}{BH}=1$
 $\frac{GA}{EG}\ \frac{b}{a}\ \frac{bdf+ace}{bf(c+d)}=1$
 $\frac{AG}{GE}=\frac{af(c+d)}{ace+bdf}$

在此要特別提出說明, 如果一個三角形的比例關係的類型, 在同一平面上旋轉後可以代入已得證的公式, 將不再予以敍述。

但另有些圖形, 必須要將整個圖“翻轉”過來, 才能代入已得證的公式, 這種情形就好像從紙的背面看這個圖一樣, 爲了避免常常“翻來翻去”, 對於這些圖形, 將列出公式。例如本組中第五個公式求 $\frac{CF}{FA}$ 和第四個公式求 $\frac{AD}{DB}$ 恰好是對稱的。我們以一直線爲對稱軸, 作出對稱圖形, 在

這種轉換下, 距離沒改變, 因此對應點的比例值自然是相同的, 此種現象可以用幾何變換中的反向保距鏡射變換來解釋。[7]

(四) 考慮過三角形兩邊的兩條截線, 所決定的六個比例值 (如圖5)。這組公式的證明使用了 Menelaus 定理及第一組的公式, 值得注意的是第4, 5, 6號公式, 經過鏡射變換後, 可分別由第1, 3, 2號公式推導出來, 因此無需再多做證明。

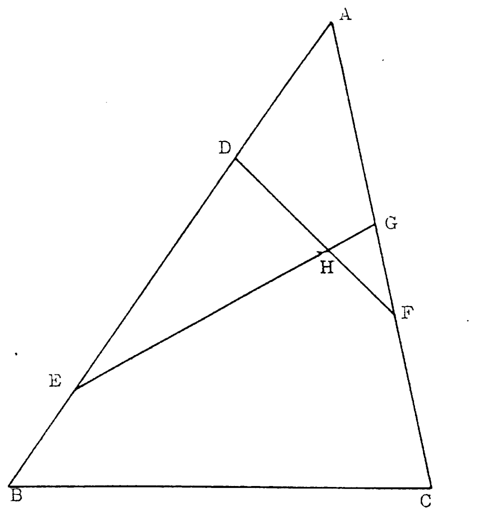

圖 5

IV-(1) 若 $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{a}{b}, \dfrac{AE}{EB}=\dfrac{c}{d}, \dfrac{CF}{FA}=\dfrac{e}{f}, \dfrac{CG}{GA}=\dfrac{g}{h}$,
則 $\dfrac{EH}{HG}=\dfrac{f(g+h)(bc-ad)}{a(c+d)(fg-eh)}$。

IV-(2) 若 $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{a}{b}, \dfrac{CF}{FA}=\dfrac{c}{d}, \dfrac{CG}{GA}=\dfrac{e}{f}, \dfrac{DH}{HF}=\dfrac{g}{h}$,
則 $\frac{AE}{EB}=\frac{afh(c+d)}{bhf(c+d)-g(a+b)(de-cf)}$。

IV-(3) 若 $\dfrac{AE}{EB}=\dfrac{a}{b}, \dfrac{CF}{FA}=\dfrac{c}{d}, \dfrac{CG}{GA}=\dfrac{e}{f}, \dfrac{EH}{HG}=\dfrac{g}{h}$,
則 $\frac{AD}{DB}=\frac{adh(e+f)}{g(a+b)(de-cf)+bdh(e+f)}$。

IV-(4) 若 $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{a}{b}, \dfrac{AE}{EB}=\dfrac{c}{d}, \dfrac{CF}{FA}=\dfrac{e}{f}, \dfrac{CG}{GA}=\dfrac{g}{h}$,
則 $\dfrac{DH}{HF}=\dfrac{h(e+f)(bc-ad)}{c(a+b)(fg-eh)}$。

IV-(5) 若 $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{a}{b}, \dfrac{AE}{EB}=\dfrac{c}{d}, \dfrac{CF}{FA}=\dfrac{e}{f}, \dfrac{DH}{HF}=\dfrac{g}{h}$,
則 $\frac{CG}{GA}=\frac{h(e+f)(bc-ad)+ceg(a+b)}{cfg(a+b)}$。

IV-(6) 若 $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{a}{b}, \dfrac{AE}{EB}=\dfrac{c}{d}, \dfrac{CG}{GA}=\dfrac{e}{f}, \dfrac{EH}{HG}=\dfrac{g}{h}$,
則 $\frac{CF}{FA}=\frac{aeg(c+d)-h(e+f)(bc-ad)}{afg(c+d)}$。

證明: 公式(1)

1. 由已知 $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{a}{b}, \dfrac{AE}{EB}=\dfrac{c}{d}$
   代入公式I-4
   $\Rightarrow \dfrac{AD}{DE}=\dfrac{ac+ad}{bc-ad}$
   又已知 $\dfrac{CF}{FA}=\dfrac{e}{f}, \dfrac{CG}{GA}=\dfrac{g}{h}$
   代入公式I-4
   $\Rightarrow \dfrac{AG}{GF}=\dfrac{fh+eh}{gf-eh} \Rightarrow \dfrac{FA}{FG}=\dfrac{fh+gf}{gf-eh}$

2. 利用 Menelaus 定理
   知 $\dfrac{HE}{GH}\dfrac{DA}{ED}\dfrac{FG}{AF}=1$
   $\Rightarrow \dfrac{HE}{GH}\dfrac{ac+ad}{bc-ad}\dfrac{gf-eh}{fh+gf}=1$
   $\Rightarrow \dfrac{EH}{HG}=\dfrac{f(g+h)(bc-ad)}{a(c+d)(fg-eh)}$

公式 (2)

1. 已知$\dfrac{CF}{FA}=\dfrac{c}{d}, \dfrac{CG}{GA}=\dfrac{e}{f}$,代入公式I-4
$\Rightarrow \dfrac{FG}{GA}=\dfrac{ed-cf}{fd+fc}$
又依據Menelaus定理
知$\dfrac{HF}{DH}\ \dfrac{GA}{FG}\ \dfrac{ED}{AE}=1$
$\Rightarrow \dfrac{h}{g}\ \dfrac{fd+fc}{ed-cf}\ \dfrac{ED}{AE}=1$
$\Rightarrow \dfrac{ED}{AE}=\dfrac{g(ed-cf)}{fh(c+d)}$
$\Rightarrow \dfrac{ED}{AD}=\dfrac{g(de-cf)}{fh(c+d)-g(de-cf)}$

2. 已知$\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{a}{b}$
及$\dfrac{ED}{AD}=\dfrac{g(de-cf)}{fh(c+d)-g(de-cf)}$
代入公式I-1
得$\dfrac{AE}{EB}=\frac{afh(c+d)}{bfh(c+d)-g(a+b)(de-cf)}$ #

(五) 考慮過三角形三邊的兩條截線, 所產生出的六個比例值 (如圖6)。這組公式中第4, 5, 6號公式的比例關係, 經過鏡射變換後可代入第1, 2, 3號公式得到證明。另外, 在第2號公式的證明過程中,使用了代數方程式的解法。

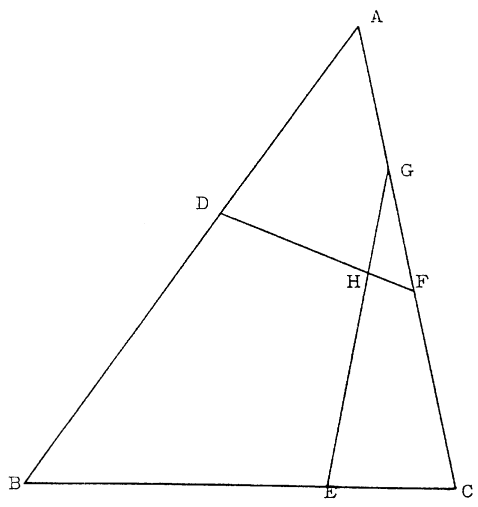

圖 6

V-(1) 若 $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{a}{b}, \dfrac{BE}{EC}=\dfrac{c}{d}, \dfrac{CF}{FA}=\dfrac{e}{f}, \frac{CG}{GA}=\frac{g}{h}$,
則 $\dfrac{GH}{HE}=\dfrac{a(c+d)(fg-eh)}{(h+g)(bdf+ace)}$。

V-(2) 若 $\dfrac{BE}{EC}=\dfrac{a}{b}, \dfrac{CF}{FA}=\dfrac{c}{d}, \dfrac{CG}{GA}=\dfrac{e}{f}, \dfrac{GH}{HE}=\dfrac{g}{h}$,
則 $\frac{AD}{DB}=\frac{bdg(e+f)}{h(a+b)(de-cf)-acg(e+f)}$。

V-(3) 若 $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{a}{b}, \dfrac{BE}{EC}=\dfrac{c}{d}, \dfrac{CG}{GA}=\dfrac{e}{f}, \dfrac{GH}{HE}=\dfrac{g}{h}$,
則 $\dfrac{CF}{FA}=\dfrac{aeh(c+d)-bdg(e+f)}{acg(e+f)+afh(c+d)}$。

V-(4) 若 $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{a}{b}, \dfrac{BE}{EC}=\dfrac{c}{d}, \dfrac{CF}{FA}=\dfrac{e}{f}, \dfrac{CG}{GA}=\dfrac{g}{h}$,
則 $\dfrac{DH}{HF}=\dfrac{(e+f)(acg+bdh)}{d(a+b)(fg-eh)}$。

V-(5) 若 $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{a}{b}, \dfrac{CF}{FA}=\dfrac{c}{d}, \dfrac{CG}{GA}=\dfrac{e}{f}, \dfrac{DH}{HF}=\dfrac{g}{h}$,

則 $\frac{BE}{EC}=\frac{g(a+b)(de-cf)-bfh(c+d)}{aeh(c+d)}$。

V-(6) 若 $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{a}{b}, \dfrac{BE}{EC}=\dfrac{c}{d}, \dfrac{CF}{FA}=\dfrac{e}{f}, \dfrac{DH}{HF}=\dfrac{g}{h}$,

則 $\frac{CG}{GA}=\dfrac{bdh(e+f)+deg(a+b)}{dfg(a+b)-ach(e+f)}$

證明: 公 式(1)

1. 延 長 DF 交 BC 於 I

利 用 Menelaus 定 理

得 知 $\dfrac{FA}{CF}\dfrac{DB}{AD}\dfrac{IC}{BI}=1$

$\Rightarrow \dfrac{f}{e}\dfrac{b}{a}\dfrac{IC}{BI}=1 \Rightarrow \dfrac{IC}{BC}=\dfrac{ae}{bf-ae}$。

又 已 知 $\dfrac{BE}{EC}=\dfrac{c}{d}$,

代 入 公 式 I-2 $\Rightarrow \dfrac{EC}{CI}=\dfrac{d(bf-ae)}{ae(c+d)}$

$\Rightarrow \frac{IC}{EI}=\dfrac{ae(c+d)}{bdf+ace}$。

2. 由 已 知 $\dfrac{CF}{FA}=\dfrac{e}{f}, \dfrac{CG}{GA}=\dfrac{g}{h}$,

代 入 公 式I-4, 得 $\dfrac{GF}{FC}=\dfrac{gf-eh}{eh+eg}$。

再 由Menelaus 定 理, 知

$$\frac{FG}{CF}\frac{HE}{GH}\frac{IC}{EI}=1$$

$$\Rightarrow \frac{fg-eh}{eh+eg}\frac{HE}{GH}\frac{ae(c+d)}{bdf+ace}=1$$

$$\Rightarrow \frac{GH}{HE}=\frac{a(c+d)(fg-eh)}{(h+g)(bdf+ace)} \qquad \#$$

公 式 (2)

設 $\frac{AD}{DB}=x$, 已 知 $\frac{BE}{EC}=\frac{a}{b}, \frac{CF}{FA}=\frac{c}{d}, \frac{CG}{GA}=\frac{e}{f}, \frac{GH}{HE}=\frac{g}{h}$

代 入 公 式V-1

得 $\dfrac{g}{h}=\dfrac{x(a+b)(de-cf)}{(e+f)(bd+acx)}$

$\Rightarrow h(a+b)(de-cf)x$

$=acg(e+f)x+bdg(e+f)$

$\Rightarrow x=\frac{bdg(e+f)}{h(a+b)(de-cf)-acg(e+f)}=\frac{AD}{DB}$

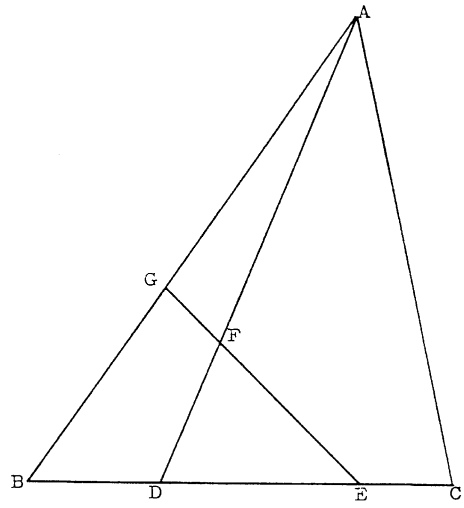

圖 7

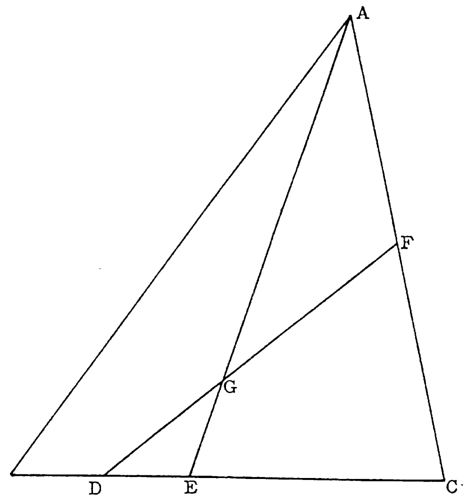

圖 8

(六) 這 組 公 式 的 圖 形 看 似 簡 單 (如 圖 7,8), 但 卻 有 10 個 公 式, 這 是 因 爲 此 圖 形 不 具 對 稱 性, GE及FD各 決 定 了 5 個 比 例 值。但 我 們 只 要 透 過 鏡

射變換, 就可以將公式 (6) 和公式 (1) 的圖形視為相同的圖形, 自然也就只需要做一次證明, 同樣的道理也適用在公式 (2) 和 (7), (4) 和 (8), (3) 和 (9) 及 (5) 和 (10)。

(1) $\sim$ (5) 請看圖7, (6) $\sim$ (10) 請看圖8。

VI-(1) 若 $\dfrac{AG}{GB}=\dfrac{a}{b}, \dfrac{BD}{DC}=\dfrac{c}{d}, \dfrac{BE}{EC}=\dfrac{e}{f}$,
則 $\dfrac{AF}{FD}=\dfrac{ae(c+d)}{b(de-cf)}$。

VI-(2) 若 $\dfrac{AG}{GB}=\dfrac{a}{b}, \dfrac{BD}{DC}=\dfrac{c}{d}, \dfrac{BE}{EC}=\dfrac{e}{f}$,
則 $\dfrac{GF}{FE}=\dfrac{ca(e+f)}{(a+b)(de-cf)}$。

VI-(3) 若 $\dfrac{AG}{GB}=\dfrac{a}{b}, \dfrac{BE}{EC}=\dfrac{c}{d}, \dfrac{GF}{FE}=\dfrac{e}{f}$,
則 $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{ce(a+b)}{af(c+d)+de(a+b)}$。

VI-(4) 若 $\dfrac{AG}{GB}=\dfrac{a}{b}, \dfrac{BD}{DC}=\dfrac{c}{d}, \dfrac{GF}{FE}=\dfrac{e}{f}$,
則 $\dfrac{BE}{EC}=\dfrac{c(af+ae+be)}{de(a+b)-acf}$。

VI-(5) 若 $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{a}{b}, \dfrac{BE}{EC}=\dfrac{c}{d}, \dfrac{GF}{FE}=\dfrac{e}{f}$,
則 $\dfrac{AG}{GB}=\dfrac{e(bc-ad)}{af(c+d)-e(bc-ad)}$。

VI-(6) 若 $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{a}{b}, \dfrac{BE}{EC}=\dfrac{c}{d}, \dfrac{CF}{FA}=\dfrac{e}{f}$,
則 $\dfrac{AG}{GE}=\dfrac{bf(c+d)}{e(bc-ad)}$。

VI-(7) 若 $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{a}{b}, \dfrac{BE}{EC}=\dfrac{c}{d}$,
$\dfrac{CF}{FA}=\dfrac{e}{f}$,
則 $\dfrac{FG}{GD}=\dfrac{df(a+b)}{(e+f)(bc-ad)}$。

VI-(8) 若 $\dfrac{BE}{EC}=\dfrac{a}{b}, \dfrac{CF}{FA}=\dfrac{c}{d}, \dfrac{DG}{GF}=\dfrac{e}{f}$,
則 $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{af(c+d)-bde}{b(de+df+cf)}$。

VI-(9) 若 $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{a}{b}, \dfrac{CF}{FA}=\dfrac{c}{d}, \dfrac{DG}{GF}=\dfrac{e}{f}$,
則 $\dfrac{BE}{EC}=\dfrac{de(a+b)+af(c+d)}{bf(c+d)}$。

VI-(10) 若 $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{a}{b}, \dfrac{BE}{EC}=\dfrac{c}{d}$,
$\dfrac{DG}{GF}=\dfrac{e}{f}$,
則 $\dfrac{CF}{FA}=\dfrac{de(a+b)-f(bc-ad)}{f(bc-ad)}$。

證明: 公式(1)

1. 由已知 $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{c}{d}, \dfrac{BE}{EC}=\dfrac{e}{f}$
運用公式I-4
得 $\dfrac{BD}{DE}=\dfrac{c(f+e)}{de-cf}$
$\Rightarrow \dfrac{BE}{DE}=\dfrac{e(c+d)}{de-cf}$。
2. 依據 Menelaus 定理
$\dfrac{AF}{FD}\dfrac{GB}{AG}\dfrac{ED}{BE}=1$
$\Rightarrow \dfrac{AF}{DF}\dfrac{b}{a}\dfrac{de-cf}{e(c+d)}=1$
$\Rightarrow \dfrac{AF}{DF}=\dfrac{ae(c+d)}{b(de-cf)}$。

公式 (3)

1. 應用$Menelaus$定理
$\dfrac{FE}{GF}\dfrac{DB}{ED}\dfrac{AG}{BA}=1 \Rightarrow \dfrac{f}{e}\dfrac{DB}{ED}\dfrac{a}{a+b}=1$
$\Rightarrow \dfrac{DB}{ED}=\dfrac{e(a+b)}{af}$
2. 因為$\dfrac{BD}{DE}=\dfrac{e(a+b)}{af}/\dfrac{BE}{EC}=\dfrac{c}{d}$
由公式I-2得到
$\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{ce(a+b)}{acf+de(a+b)+adf}$

$$= \frac{ce(a+b)}{af(c+d)+de(a+b)}$$

三. 應用

例題 1: 已知 : $\frac{IA}{AJ} = \frac{JF}{FC} = \frac{CD}{DI} = \frac{AH}{HF} = \frac{DG}{GA} = \frac{GB}{BH} = a$, 求證 ABC 三點共線。

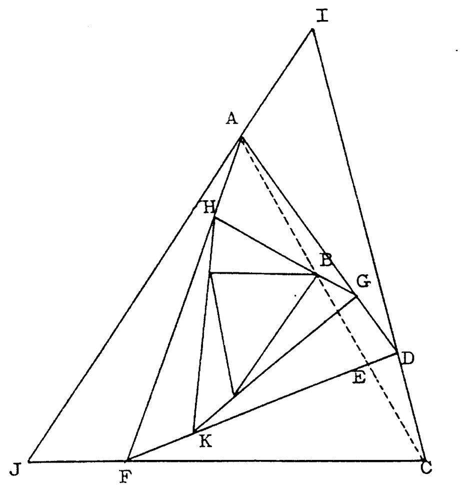

圖 9

證明:因 $\frac{CD}{DI} = \frac{IA}{AJ} = \frac{JF}{FC} = a$
代入公式III-1
$\Rightarrow \frac{DE}{EF} = a^2$
令 CA 交 HG 於 B'
已知 $\frac{AH}{HF} = \frac{DG}{GA} = a$ 及 $\frac{DE}{EF} = a^2$
再代入公式III-1
得 $\frac{GB'}{B'H} = a$, 故 $B = B'$,
得證 A, B, C 共線。 #

例題 2 :

$$\text{已知:}\frac{AD}{DB} = \frac{BE}{EC} = \frac{CF}{FA} = a$$
$$\frac{AG}{GB} = \frac{BR}{RC} = \frac{CS}{SA} = \frac{DI}{IE}$$
$$= \frac{ET}{TF} = \frac{FH}{HD} = c\text{。}$$

求證 (1)CG, FI, EH 三線共點。
(2)$\frac{LM}{MN} = a$。
(3)$\triangle ABC$ 和 $\triangle QPM$ 共重心。

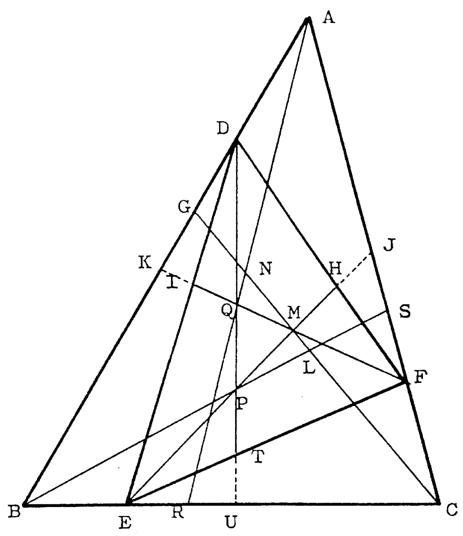

圖 10

證明:

(1) 已知 $\frac{BE}{EC} = \frac{CF}{FA} = \frac{AD}{DB} = a$
且 $\frac{EI}{ID} = \frac{1}{c}$
代入公式V-6, 得 $\frac{AK}{KB} = \frac{CJ}{JA} = \frac{a+c}{1-a^2c}$
設 FI 交 EH 於 M,
知 $\frac{AK}{KB} = \frac{a+c}{1-a^2c}, \frac{BE}{EC} = \frac{CF}{FA} = a$,
$\frac{CJ}{JA} = \frac{a+c}{1-a^2c}$

代入公式V-1, 得

$$\frac{JM}{ME}=\frac{c(a+c)(a+1)}{a+c+1-a^2c}$$

令 CG 交 EJ 於 M'

知 $\dfrac{CJ}{JA}=\dfrac{a+c}{1-a^2c},\dfrac{AG}{GB}=c,\dfrac{BE}{EC}=a$

代入公式III-1,

得$\dfrac{JM'}{M'E}=\dfrac{c(a+c)(a+1)}{a+c+1-a^2c}$

因此$\dfrac{JM}{ME}=\dfrac{JM'}{M'E}\Rightarrow M=M'$

故 CG,FI,EH 共點

(2) 由前述得知, AR,FI,DT 共點,

EH,DT,BS 共點,

利用 Menelaus 定理

得到 $\dfrac{LC}{LG}\dfrac{SA}{CS}\dfrac{BG}{AB}=1$

$\Rightarrow\dfrac{CL}{LG}=c(c+1)$

已知 $\dfrac{CJ}{JA}=\dfrac{a+c}{1-a^2c},\dfrac{AG}{GB}=c,\dfrac{BE}{EC}=a$

代入公式III-3,

得知 $\dfrac{CM}{MG}=\dfrac{(a+c)(c+1)}{ac^2+1}$

再依據 Menelaus 定理

得 $\dfrac{NC}{GN}\dfrac{RB}{CR}\dfrac{AG}{AB}=1$

$\Rightarrow\dfrac{CN}{NG}=\dfrac{c+1}{c^2}$

然後將$\dfrac{CL}{LG},\ \dfrac{CM}{MG},\ \dfrac{CN}{NG}$

經合分比得到 $\dfrac{LM}{MN}=a$

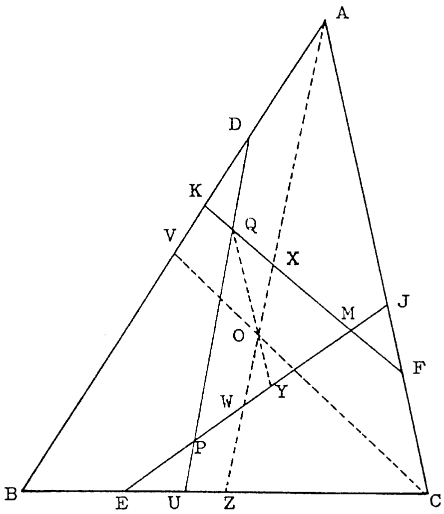

圖 11

(3) 令$\dfrac{AK}{KB}=\dfrac{BU}{UC}=\dfrac{CJ}{JA}=d,$

$AZ,\ QY,\ CV$是中線(如圖11)

已知$\dfrac{BU}{UC}=d,\dfrac{CF}{FA}=a,\dfrac{AD}{DB}=a,$

$\dfrac{AK}{KB}=d$

代入公式V-1

得 $\dfrac{KQ}{QF}=\dfrac{JM}{ME}=\dfrac{d(a+1)(d-a)}{(d+1)(1+a^2d)}$

另由 $\dfrac{AK}{KB}=d,\dfrac{BE}{EC}=\dfrac{CF}{FA}=a,$

$\dfrac{CJ}{JA}=d$

代入公式V-4

得 $\dfrac{KM}{MF}=\dfrac{JP}{PE}=\dfrac{(a+1)(1+ad^2)}{(d+1)(d-a)}$

再由 $\dfrac{AK}{KB}=d,\ \dfrac{BZ}{ZC}=1,\ \dfrac{CF}{FA}=a$

代入公式III-1

得 $\dfrac{KX}{XF}=\dfrac{d(a+1)}{d+1}$

綜合 $\dfrac{KQ}{QF},\ \dfrac{KM}{MF},\ \dfrac{KX}{XF}$

有 $\dfrac{QX}{XM}=\dfrac{d(a^2d-d+a+1)}{ad^2+ad-d^2+1}$

由 Menelaus 定理, 得

$$\frac{WE}{JW}\frac{ZC}{EZ}\frac{AJ}{CA}=1$$
$$\Rightarrow \frac{WE}{JW}\frac{a+1}{1-a}\frac{1}{d+1}=1$$
$$\Rightarrow \frac{JW}{WE}=\frac{a+1}{(d+1)(1-a)},$$

由前述知 $\frac{JM}{ME}$, $\frac{JP}{PE}$,
再經過合分比計算出

$$\frac{MW}{WP}=\frac{ad^2+ad-d^2+1}{ad^2-a^2d^2-d+1}$$

已知 $\frac{MY}{YP}=1$, 代入公式 I-4,

$$\text{有 } \frac{MY}{YW}=\frac{2ad^2-a^2d^2+ad-d^2-d+2}{ad-d^2+a^2d^2+d}$$
$$\Rightarrow \frac{MW}{YW}=\frac{2(ad^2+ad-d^2+1)}{d(a^2d-d+a+1)}$$

因爲 O 是 $\triangle QPM$ 的重心, $\frac{OQ}{YO}=\frac{2}{1}$ 綜合以上結果,

$$\frac{OQ}{YO}\frac{XM}{QX}\frac{WY}{MW}=\frac{2}{1}\frac{ad^2+ad-d^2+1}{d(a^2d-d+a+1)}$$
$$\times\frac{d(a^2d-d+a+1)}{2(ad^2+ad-d^2+1)}=1$$

依據 Menelaus 定理, 知 X, O, W 共線, 故 O 在中線 AZ 上。同理可知 O 在中線CV上, 所以 $\triangle ABC$ 和 $\triangle QPM$ 共重心。 #

四. 結語

平面幾何學是第一套結構細緻, 組織龐大, 推理嚴謹的數理公設系統。從幾個不證自明的公設作爲磐石, 以邏輯演繹的方法, 推導衍生出環環相扣, 形形色色的定理, 如畢氏定理、中線定理、歐拉定理...... 等, 然後再運用這些定理, 推演出其它衆多的定理, 也可以解決一些實際生活中的幾何問題。

本文中所列的37個“公式”, 在後續的幾篇文章中, 將扮演著基礎定理的角色, 只要是有關於三角形兩相交線段的比例求值問題, 都可以應用這套公式迅速地獲得解決。

參考資料

1. 九章編輯部譯, “幾何學辭典”, 九章出版社, 1986, P.932-943。
2. D. R. Davis, “Modern College Geometry”, 1949.
3. Otto Schreier, “Projective Geometry of n dimensions”, Chelsea Publishing Company, 1985。
4. Roger A. Johnson, “Advanced Euclidean Geometry”, Dover Publications, INC. 1960, P.145-149。
5. 孫文先, “平面幾何”, 九章出版社, 1986, P.31。
6. Howard Eves, “A Survey of Geometry”, Vo1.1, P.67-68。
7. 趙文敏, “幾何學概論”, 九章出版社, 1986, P.77-103。

—本文作者任教於省立西螺農工—