列鳥威里規則的引伸與拓廣

殷堰工

蘇聯數學家列鳥威里找到了一種有趣的規則: $1^3+2^3=(1+2)^2, 1^3+2^3+3^3=(1+2+3)^2, 1^3+2^3+3^3+4^3=(1+2+3+4)^2, 1^3+2^3+3^3+4^3+5^3=(1+2+3+4+5)^2, \cdots$ 本文試就此規則進行引伸和拓廣, 指出不僅列鳥威里數組滿足等式 $\sum_{i=1}^n a_i^3=(\sum_{i=1}^n a_i)^2$, 還有其它數組也滿足這個等式, 並給出了構造這類數組的新方法。

定義1: 在自然數中取任意 n 個數組成一組 $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n)$ 稱爲一個數組。$a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 稱爲該數組的元素。形如 $(1,2,\cdots,n)$ 的數組稱自然數組, n 稱爲該數組的級, 該數組簡稱 n 級數組。元素在數組中的位置可以是任意的。

一個數組中可以有相同元素, 而在自然數組中, 顯然沒有相同的元素。

定義2: 若一個數組 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 滿足條件

$$\sum_{i=1}^n a_i^3=(\sum_{i=1}^n a_i)^2 \qquad (*)$$

則稱該數組爲奇妙數組, 等式 $(*)$ 稱爲奇妙等式。

用數學歸納法容易推證對任意自然數 n, 有等式 $\sum_{i=1}^n i^3=(\sum_{i=1}^n i)^2$, 事實上,

當 $n=1$ 時, $1^3+2^3=(1+2)^2=9$ 顯然成立。

假設當 $n=k$ 時, $\sum_{n=1}^k n^3=(\sum_{n=1}^k n)^2$ 爲眞, 則當 $n=k+1$ 時,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{k+1} n^3 &= \sum_{n=1}^{k} n^3+(k+1)^3 \\
&= (\sum_{n=1}^{k} n)^2+(k+1)^3 \\
&= (1+2+\cdots+k)^2+(k+1)^2 \\
&\quad \cdot(k+1) \\
&= (1+2+\cdots+k)^2+k(k+1)^2 \\
&\quad +(k+1)^2 \\
&= (1+2+\cdots+k)^2+2\cdot\frac{k(k+1)}{2} \\
&\quad \cdot(k+1)+(k+1)^2 \\
&= (1+2+\cdots+k)^2+2\cdot \\
&\quad (1+2+\cdots+k)\cdot(k+1)+(k+1)^2 \\
&= [(1+2+\cdots+k)+(k+1)]^2 \\
&= (\sum_{n=1}^{k+1} n)^2
\end{aligned}$$

依歸納原理知, 等式$\sum_{i=1}^n i^3=(\sum_{i=1}^n i)^2$ 爲眞。

從而有

引理1: n 級數組是一個奇妙數組。

定義3: 對一個自然數 k, 若它的約數爲$x_1, x_2, \cdots, x_n$, 其中x_i 的約數個數爲$a_i (i = 1, 2, \cdots, n)$, 則稱數組$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 爲數 k 的列烏威里數組, 簡稱列氏數組。

例1: 求8的列氏數組。

解: 8有4個約數 $1, 2, 4, 8$, 其中1只有1個約數, 2有2個約數, 4有3個約數, 8有4個約數, 故8的列氏數組爲 $(1, 2, 3, 4)$ 。

例2: 求關於12的列氏數組。

解: 12的約數爲 $1, 2, 3, 4, 6, 12$, 各約數的約數個數分別爲 $1, 2, 2, 3, 4, 6$, 故12 的列氏數組爲 $(1, 2, 2, 3, 4, 6)$ 。

定理1(列烏威里規則): 任意自然數 k 的列氏數組是奇妙數組。

在證明這個定理之前, 先給出一些引理。

引理2: 若 $k = p^n$ (p 爲質數), 則 k 的列氏數組爲 $n + 1$ 級數組, 也是奇妙數組。

證明: 顯見,k的約數爲$1, p, p^2, \cdots, p^n$, 共 $n + 1$ 個, 故其列氏數組爲 $(1, 2, 3, \cdots, n + 1)$ 是 $n + 1$ 級數組, 據引理1知是奇妙數組。

定義4: 設兩個數組$A=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$,$B = (b_1, b_2, \cdots, b_m)$, 則數組 $C = (a_1b_1, a_1b_2, \cdots, a_1b_m, a_2b_1, a_2b_2, \cdots, a_2b_m, \cdots, a_nb_1, \cdots, a_nb_m)$ 爲數組 A 與 B 的積, 記作 $C = A \otimes B$

引理3: 若 A、B 均爲奇妙數組, 則 $A \otimes B$ 也是奇妙數組。

證明: 由 A、B 均爲奇妙數組, 有

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^3 = (\sum_{i=1}^{n} a_i)^2 \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{m} b_i^3 = (\sum_{i=1}^{m} b_i)^2 \tag{2}$$

(1) × (2) 得

$$\text{左邊} = (\sum_{i=1}^{n} a_i^3)(\sum_{i=1}^{m} b_i^3) = \sum_{i,j=1}^{n,m} (a_ib_j)^3$$

$$\text{右邊} = (\sum_{i=1}^{n} a_i)^2(\sum_{i=1}^{m} b_i)^2 = (\sum_{i,j=1}^{n,m} a_ib_j)^2$$

左邊=右邊, 故 $A \otimes B$ 是奇妙數組。把數組的積由2個推廣到 n 個, 有

推論1: n 個奇妙數組之積 $C = A_1 \otimes A_2 \otimes A_3 \otimes \cdots \otimes A_n$ 是奇妙數組。

引理4: 若 K、M 互質, A、B 分別爲 K、M 的列氏數組, 則 $K \times M$ 的列氏數組爲 $A \otimes B$ 。

證明: 設 K 的約數爲 $x_i (i = 1, 2, \cdots, n)$, 其列氏數組爲 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$; M 的約數爲 $y_j (j = 1, 2, \cdots, m)$, 其列氏數組爲 $(b_1, b_2, \cdots, b_m)$ 。

因 K、M 互質, 故 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 除兩個1之外其它各數是兩兩不等的。

而 $K \times M$ 的全部約數 $x_iy_j (i = 1, 2, \cdots, n;\ j = 1, 2, \cdots, m)$ 共有 $n \times m$ 個兩兩不同的約數, 每個約數的約數個數分別爲 $a_1b_1, a_1b_2, \cdots, a_1b_m, a_2b_1, a_2b_2, \cdots, a_2b_m, \cdots, a_nb_1, a_nb_2, \cdots, a_nb_m$ 構成 $K \times M$ 的列氏數組, 這個數組恰好等於 $A \otimes B$ 。

推廣至 n, 有

推論2: 設 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 爲兩兩互質的 n 個數, k_i 的列氏數組爲 $A_i = (i = 1, 2, \cdots, n)$, 則 $K = k_1 \times k_2 \times \cdots \times k_n$ 的列氏數組爲 $A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_n$ 。

證明用數學歸納法, 這裡略。

下面, 我們給出定理1的證明。

設自然數 $k = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdots p_m^{n_m}$, 其中 p_1, p_2, p_3, $\cdots, p_m$ 是兩兩不等的質數。令 $k_i = p_i^{ni}$, 則 $k = \prod_{i=1}^m k_i$, 按引理2知, k_i 的列氏數組 $A_i (i = 1, 2, \cdots, m)$ 是奇妙數組。

由推論2, k 的列氏數組 $A = A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_m$。

再按推論1, $A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_m$ 是奇妙數組。

故 A 是奇妙數組, 即 K 的列氏數組是奇妙數組。定理證畢

在定理1的證明過程中, 我們又得到了一個副產品, 即下面的

推論3: 任何一個數 k 的列氏數組, 可表成若干個自然數組之積, 數組的個數是 k 的質因數個數, 每個數組的級是相應質因數的指數加1。

那麼, 是否存在奇妙數組, 它不是任何數的列氏數組呢? 我們有定理2, 在給出定理2之前, 先給出如下定義。

定義5: 一個 n 級數組, 將其元素 $n-1, n-3$, 直至 $n-2k+1$ 分別換成 $2, 4, \cdots, 2k (k < \frac{n}{2})$ 所得數組稱 n 級 k 階數組。

例3. 12級4階數組爲 $(1,2,3,4,8,6,6,8,4,10,2,12)$。

例4. 9級2階數組爲 $(1,2,3,4,5,4,7,2,9)$。

定理2: 任意 n 級 k 階數組 $(k < \frac{n}{2})$ 是奇妙數組。

證明: 設 n 級 k 階數組爲 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, 顯然其中必有 $n-2k$ 個元素組成 $n-2k$ 級數組。因爲

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{n} a_i^3 - \sum_{i=1}^{n-2k} i^3 = \sum_{i=1}^{k} (2i)^3 - \sum_{i=0}^{k-1} (n-2i)^3 \\
= \; & 8\sum_{i=1}^{k} i^3 + kn^3 - 6n^2 \sum_{i=0}^{k-1} i + 12n \sum_{i=0}^{k-1} i^2 - 8\sum_{i=0}^{k-1} i^3 \\
= \; & 8k^3 + kn^3 - 3n^2 k(k-1) \\
& +2nk(k-1)(2k-1) \\
= \; & k(8k^2 + n^3 - 3n^2 k + 3n^2 + 4k^2 n \\
& -6kn + 2n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\sum_{i=1}^{n} a_i)^2 - (\sum_{i=1}^{n-2k} i)^2 \\
= \; & [\sum_{i=1}^{k} 2i + \sum_{i=0}^{k-1} (n-2i)][2\sum_{i=1}^{n-2k} i + \sum_{i=1}^{k} 2i \\
& + \sum_{i=0}^{k-1} (n-2i)] \\
= \; & (2k+nk)[(n-2k)(n-2k+1) \\
& +2k+nk] \\
= \; & k(8k^2 + 4k^2 n - 6kn - 3n^2 k + 2n \\
& +n^3 + 3n^2)
\end{aligned}$$

所以 $\sum_{i=1}^{n} a_i^3 - \sum_{i=1}^{n-2k} i^3 = (\sum_{i=1}^{n} a_i)^2 - (\sum_{i=1}^{n-2k} i)^2$

又因 $\sum\limits_{i=1}^{n-2k} i^3 = (\sum\limits_{i=1}^{n-2k} i)^2$

因此 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^3 = (\sum\limits_{i=1}^{n} a_i)^2$

所以n級k階數組是奇妙數組。證畢

據定理可舉出 12 級 2 階數組 $A = (1,2,3,\ 4,5,6,7,8,4,10,2,12)$ 爲奇妙數組, 下面證明這個數組不是列氏數組。

若不然, A 是一個列氏數組。則 A 必可表爲 S 個自然數組之積, 但 A 中元素7是質數, 故這 S 個數組中至少有一 k 級數組包含7。設其餘數組中至少有一數組, 其元素個數不少於2, 則 A 中就至少有兩個元素是7的倍數, 這與事實不符, 故其餘數組都只能有一個元素1, 於是 A 應是 n 級數組, 也與事實不符, 因此 A 不能表爲 S 個自然數組之積, 可見 A 不是列氏數組。

由此可見, 列氏數組並不包括全部奇妙數組, 前面的引理3和定理2, 給出了構造奇妙數組的新方法。

—本文作者任教於中國江蘇省蘇州市蘇州教育學院數學系—